Некоторые соотношения статистической физики, построенной на основе энтропии Реньи

Т. Н. Бакиев,[1] Д. В. Накашидзе,[2] А. М. Савченко[2,a]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики. Россия, 119048, Москва, ул. Усачева, д. 6.
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 12.09.2020, после доработки 12.10.2020, принята к публикации 15.10.2020.

Статистическая теория, построенная на основе параметрического семейства функционалов энтропии Реньи, является обобщением статистики Гиббса. В зависимости от значения имеющегося параметра соответствующее распределение Реньи может принимать как экспоненциальную, так и степенную форму, характерную для широкого круга статистических моделей. В настоящей работе доказывается теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы в случае статистики Реньи, позволяющая решить проблему получения средней энергии для большого числа классических статистических моделей. Проводится сравнение предложенного подхода вычисления средней энергии с процедурой прямого расчета данной величины для системы, описываемой простейшим гамильтонианом степенного вида. Получены новые соотношения, упрощающие расчеты в рассматриваемой теории. Исследуется частный случай распределения Реньи, представляющий собой обобщение степенного распределения, позволяющее более точно аппроксимировать некоторые эмпирические данные.

Ключевые слова: энтропия Реньи, распределение Реньи, теорема о равнораспределении, средняя энергия, степенное распределение.
УДК: 536.758. PACS: 05.20.-y, 05.90.+m.

ВВЕДЕНИЕ

Функционал энтропии, предложенный венгерским математиком Альфредом Реньи [1, 2], позволяет обобщить знаменитую энтропию Больцмана—Гиббса—Шеннона [3], широко применяемую в равновесной статистической физике. Процедура максимизации функционала энтропии Реньи при определенных условиях приводит к одноименному распределению [4], предельными случаями которого, важно отметить, являются экспоненциальное распределение Гиббса и степенное распределение. Последнее известно как распределение Парето [5], или закон Ципфа [6], и характерно для широкого круга самоорганизующихся систем [7], явлений теории разрушений [8], описания атмосферных каскадов космических лучей [9], а также для большого числа статистических моделей, возникающих в таких науках, как экономика [10], биология [11], теория сетей [12] и лингвистика [13]. Само распределение Реньи применимо к описанию многофрактальных структур [14], турбулентностей [15], квантовой запутанности [16], статистическому анализу землетрясений [17] и дробной диффузии [18].

Однако, чтобы записать явный вид распределения Реньи для конкретных систем, необходимо задать значение параметра $q > 0$ [1], входящего в функционал энтропии Реньи. На данный момент вопрос установления связи параметра q с характеристиками статистических систем является открытым, а значения q определяются экспериментальным путем. Помимо этого в распределении фигурирует величина средней энергии, вычисление которой представляется весьма громоздкой задачей и зачастую не может быть проведено аналитически. Как оказалось, существует общий подход, позволяющий решить данную проблему для широкого спектра классических статистических моделей.

В настоящей работе доказывается теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы для случая статистики Реньи. Применение данной теоремы позволяет достаточно просто определять величину средней энергии большого числа статистических систем, примерами которых являются: гармонический осциллятор, классический и ультрарелятивистский идеальный газ. Рассматривается система со степенным модельным гамильтонианом простейшего вида, на примере которой демонстрируется преимущество используемого способа получения средней энергии перед методом прямого расчета данной величины. Также приводятся новые полезные соотношения для энтропии и распределения Реньи, полученные в ходе нашего исследования. В работе впервые выведена q-формула, которая значительно упрощает вычисления, проводимые в данной теории.

Важным аспектом настоящей работы служит изучение асимптотического перехода распределения Реньи к степенной форме [19]. Графики предельного распределения наглядно демонстрируют применимость статистики Реньи к большому числу явлений, что подтверждается многочисленными экспериментальными данными.

Подчеркнем, что с целью придания наглядности исследуемым соотношениям и полученным результатам мы будем придерживаться стандартных обозначений, не прибегая, как это часто встречается в работах данной тематики, к формализму так называемых q-деформированных функций, который, с нашей точки зрения, не способствует раскрытию физического смысла происходящего.

[a] E-mail: a.m.savchenko@gmail.com

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕНЬИ

Рассмотрим некоторую статистическую систему, в которой возможна реализация W микросостояний с вероятностями $p = \{p_i\}_{i=1}^{W}$. Функционал энтропии Реньи такой системы, определяется следующим образом:

$$S^{(R)}(p) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{W} {p_i}^q, \quad q > 0. \tag{1}$$

Он служит обобщением знаменитого функционала энтропии Больцмана—Гиббса—Шеннона. Действительно, нетрудно заметить, что

$$\lim_{q \to 1} S^{(R)}(p) = S^{(G)}(p) = -\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i. \tag{2}$$

Отметим, что энтропия Тсаллиса [20], которая во многих работах вводится самостоятельно и аксиоматически, является частным случаем энтропии Реньи при $|1-q| \ll 1$. При учете нормировки $\sum_i p_i = 1$ условие $|1-q| \ll 1$ эквивалентно тому, что $\left|\sum_i p_i^q - 1\right| \ll 1$. Поэтому, раскладывая (1) в ряд Тейлора по $\sum_i p_i^q$ вблизи единицы до первого порядка, получим

$$\frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{W} {p_i}^q \bigg|_{|1-q| \ll 11} \approx \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{W} {p_i}^q = S^{(T)}(p). \tag{3}$$

Тем самым мы приходим к упомянутой энтропии Тсаллиса, характерной, как принято сейчас считать, для неаддитивных статистических систем [21, 22]. Данной тематике посвящен интернет-ресурс [23], на котором собраны как теоретические, так и экспериментальные исследования моделей, описываемых данным видом функционала энтропии.

Обоснование выбора формы энтропии (1) принадлежит Шору и Джонсону и изложено в работах [24–26].

Следуя подходу Джейнса [27, 28], получим распределение Реньи, соответствующее введенному функционалу энтропии $S^R(p)$. Фиксируя условие нормировки $\sum_i^W p_i = 1$, а также среднюю энергию рассматриваемой системы $U = \sum_i^W p_i H_i$, имеем функционал:

$$\Phi^{(R)}(p) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{W} {p_i}^q - \alpha \sum_{i=1}^{W} p_i - \beta \sum_{i=1}^{W} p_i H_i, \tag{4}$$

в котором α и β — постоянные множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума функционала (4) имеет вид:

$$\frac{\delta \Phi^{(R)}(p)}{\delta p_i} = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{p_i^{q-1}}{\sum_k p_k^q} - \alpha - \beta H_i = 0. \tag{5}$$

Умножив данное соотношение на p_i и просуммировав по индексу $i = \overline{1, W}$, пользуясь определением внутренней энергии U и условием нормировки распределения, получим выражение для множителя α:

$$\alpha = \frac{q}{1-q} - \beta U. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) и выражая p_i, имеем соотношение:

$$p_i = \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{1}{q-1}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{W} p_k^q\right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{7}$$

Чтобы найти выражение для последнего сомножителя в правой части (7), воспользуемся условием нормировки распределения. Тем самым

$$\left(\sum_{k=1}^{W} p_k^q\right)^{-\frac{1}{q-1}} = \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{8}$$

Таким образом, решением задачи максимизации функционала (4) является распределение Реньи:

$$p_i^{(R)} = \frac{1}{Z^{(R)}} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{9}$$

в котором

$$Z^{(R)} = \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{1}{q-1}} \tag{10}$$

играет роль статистической суммы.

Следует выделить случай классических систем, для которых спектр допустимых значений энергии непрерывен. Тогда мы имеем дело с плотностью вероятности вида

$$p^{(R)} = \frac{1}{Z^{(R)}} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H(r,p) - U)\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{11}$$

$$Z^{(R)} = \int_X \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H(r,p) - U)\right)^{\frac{1}{q-1}} d\Gamma, \tag{12}$$

где $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — координаты частиц, $p = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N)$ — импульсы частиц, N — количество частиц, X — занимаемый системой объем в фазовом пространстве состояний. Элемент интегрирования по фазовому пространству имеет вид

$$d\Gamma = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^{N} \gamma_i \frac{d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{13}$$

где под γ_i понимается число внутренних, не подверженных классическому переходу степеней свободы частицы с номером i, а $N!$ — число перестановок тождественных частиц.

Несмотря на различие случаев непрерывного и дискретного распределений, удобно понимать $i = \overline{1, W}$ как индекс, который может принимать как дискретный, так и непрерывный спектр значений, причем во втором случае под суммированием подразумевается интегрирование. Это позволяет использовать запись $p = \{p_i\}$ в контексте обоих типов распределений.

Также отметим тот факт, что распределение Реньи переходит в каноническое распределение Гиббса в пределе $q \to 1$

$$\lim_{q \to 1} p_i^{(R)} = p_i^{(G)} = \frac{e^{-\beta H_i}}{Z_c^{(G)}}, \tag{14}$$

$$Z_c^{(G)} = \sum_{i=1}^{W} e^{-\beta H_i}. \tag{15}$$

Сопоставляя статистическую энтропию Реньи $S^{(R)}(p^{(R)})$ с термодинамической энтропией Клаузиуса, можно показать, что множитель Лагранжа β имеет смысл обратной температуры системы $\beta = 1/\theta$, чему посвящен один из последующих разделов.

Таким образом, мы пришли к наиболее общей форме статистического распределения, однако оно не обладает рядом удобных для расчетов свойств, присущих гиббсовской экспоненте, а именно свойством факторизации и сохранения формы распределения при дифференцировании по параметру. Поэтому в процессе вычислений с использованием распределения Реньи оказывается полезным следующее соотношение.

2. q-ФОРМУЛА

Обратим внимание на определение средней энергии

$$U = \sum_i^W p_i^{(R)} H_i. \tag{16}$$

С другой стороны, в силу условия нормировки распределения $\sum_i^W p_i^{(R)} = 1$ мы можем записать

$$U = \sum_i^W p_i^{(R)} U. \tag{17}$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\sum_i^W p_i^{(R)} U = \sum_i^W p_i^{(R)} H_i \tag{18}$$

или в эквивалентной форме

$$\sum_i^W p_i^{(R)} \Delta H_i = 0, \tag{19}$$

где для краткости записи расчетов введено обозначение $\Delta H_i = H_i - U$. Подставляя явный вид распределения Реньи (9), имеем

$$\sum_{i=1}^W \Delta H_i \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} \Delta H_i\right)^{\frac{1}{q-1}} = 0. \tag{20}$$

Подразумевая $\beta \neq 0$ и $q \neq 1$, домножим данное выражение на $\beta(1-q)/q$ и к обеим частям равенства прибавим статистическую сумму $Z^{(R)}$, записанную в явном виде (10). Тогда мы получим весьма полезную для расчетов так называемую q-формулу:

$$\sum_{i=1}^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} (H_i - U)\right)^{\frac{1}{q-1}} = \\ = \sum_{i=1}^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} (H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}}, \tag{21}$$

причем при $q \to 1$ данная формула остается справедливой и переходит в тривиальное равенство.

На первый взгляд, доказанное равенство может показаться странным. Но на самом деле нужно помнить, что параметр β зависит от U, чем и обеспечивается справедливость данного соотношения. Более того, при заданном U полученное равенство может рассматриваться в качестве уравнения относительно неизвестного параметра β, однако данная связь между величинами β и U возникает еще при решении задачи на условный экстремум функционала энтропии Реньи. Также обратим внимание, что q-формула справедлива только в том случае, когда сходятся статистическая сумма и выражение для средней энергии. В свою очередь, данные требования эквивалентны условию существования распределения Реньи.

Полученное соотношение играет важную роль при выводе свойств распределения и энтропии Реньи.

3. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ

Для удобства далее будем использовать обозначение $S^{(R)}$ в качестве краткой записи $S^{(R)}(p^{(R)})$.

Лемма 1. Энтропия Реньи связана со статистической суммой распределения Реньи по формуле

$$S^{(R)} = \ln Z^{(R)}. \tag{22}$$

Доказательство. Из определения статистической суммы (10) и q-формулы (21) следует, что

$$Z^{(R)} = \sum_{i=1}^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} (H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}}. \tag{23}$$

Поэтому

$$S^{(R)} = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^W \left(p_i^{(R)}\right)^q = \\ = \frac{1}{1-q} \ln \left[\frac{1}{\left(Z^{(R)}\right)^q} \sum_{i=1}^W \left(1 - \beta \frac{q-1}{q} (H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}}\right] = \\ = \frac{1}{1-q} \ln \left(Z^{(R)}\right)^{(1-q)} = \ln Z^{(R)}. \tag{24}$$

□

Можно заметить, что аналогичная форма выражения для энтропии справедлива и в случае статистики Гиббса. Чтобы это продемонстрировать, сперва обратим внимание на тот факт, что распределение Реньи содержит зависимость от отклонений энергии от среднего значения $\Delta H_i = (H_i - U)$. Приведем каноническое распределение (14) к подобному виду зависимости, что легко сделать благодаря свойству факторизации экспоненты

$$p_i^{(G)} = \frac{e^{-\beta_0 H_i}}{Z_c^{(G)}} = \frac{e^{-\beta_0 (H_i - U)}}{Z^{(G)}}, \\ Z^{(G)} = e^{\beta_0 U} Z_c^{(G)}.$$

Таким образом,

$$S^{(G)} = -\sum_{i=1}^{W} p_i^{(G)} \ln p_i^{(G)} = \\ = -\sum_{i=1}^{W} p_i^{(G)} \ln e^{-\beta_0 H_i} + \sum_{i=1}^{W} p_i^{(G)} \ln Z_c^{(G)} = \\ = \beta_0 \sum_{i=1}^{W} p_i^{(G)} H_i + \ln Z_c^{(G)} \sum_{i=1}^{W} p_i^{(G)} = \\ = \beta_0 U + \ln Z_c^{(G)} = \ln Z^{(G)}, \quad (25)$$

что соответствует форме выражения (22). Более того, $\lim\limits_{q\to 1} Z^{(R)} = Z^{(G)}$, откуда следует, что $\lim\limits_{q\to 1} \beta = \beta_0 = 1/\theta$.

Используя полученный вид энтропии Реньи (22), можно легко получить следующее дифференциальное соотношение.

Лемма 2. Для энтропии Реньи $S^{(R)}$ справедливо равенство

$$\frac{\partial S^{(R)}}{\partial \beta} = \beta \frac{\partial U}{\partial \beta}. \quad (26)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial S^{(R)}}{\partial \beta} = \frac{1}{Z^{(R)}} \frac{\partial Z^{(R)}}{\partial \beta} = \\ = \frac{1}{Z^{(R)}} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta \Delta H_i\right)^{\frac{q}{q-1}} = \\ = \frac{1}{Z^{(R)}} \sum_{i=1}^{W} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta \Delta H_i\right)^{\frac{q}{q-1}} = \\ = -\frac{1}{Z^{(R)}} \sum_{i=1}^{W} \Delta H_i \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta \Delta H_i\right)^{\frac{1}{q-1}} + \\ + \frac{1}{Z^{(R)}} \sum_{i=1}^{W} \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta \Delta H_i\right)^{\frac{1}{q-1}} = \\ = \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{1}{Z^{(R)}} \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta \Delta H_i\right)^{\frac{1}{q-1}} = \beta \frac{\partial U}{\partial \beta}. \quad (27)$$

Заметим, что во втором равенстве использовалась q-формула. □

Из (10) и (22) видно, что $S^{(R)}$ является функцией $\Delta H_i = (H_i - U)$. Поэтому полностью аналогично тому, как это делается для $S^{(G)}$ [29], можно показать, что исследуемая статистическая энтропия Реньи $S^{(R)}$ соответствует термодинамической функции энтропии Клаузиуса, фигурирующей в началах термодинамики.

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА β

Рассмотрим систему, состояние которой задается набором параметров (U, x, N), где $x = (V, a)$, U — средняя энергия, N — число частиц, V — объем системы, a — воздействующие на систему внешние поля. Тогда уровни энергии $\{H_i\}_{i=1}^{W}$ зависят от параметров x, N. Поэтому из выражения (10) для статистической суммы следует, что $Z^{(R)} = Z^{(R)}(U, x, N)$, откуда $S^{(R)} = \ln Z^{(R)} = S^{(R)}(U, x, N)$. Во избежание загромождения выкладок на время опустим индекс (R). Запишем полный дифференциал энтропии

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{x,\,N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{U,\,N} dx + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,\,x} dN. \quad (28)$$

Рассмотрим каждую частную производную отдельно. При их вычислении будем использовать полученную нами q-формулу (21), а также выражение для энтропии (22).

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{x,\,N} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial U} \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}} = \\ = -\left(\frac{\partial \beta}{\partial U}\right)_{x,\,N} \sum_{i=1}^{W} (H_i - U) p_i + \beta \sum_{i=1}^{W} p_i = \beta; \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{U,\,N} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{W} \left(1 - \beta \frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}} = \\ = -\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_{U,\,N} \sum_{i=1}^{W} (H_i - U) p_i + \beta \sum_{i=1}^{W} p_i \left(-\frac{\partial H_i}{\partial x}\right)_{U,\,N} = \\ = \beta \sum_{i=1}^{W} p_i \left(-\frac{\partial H_i}{\partial x}\right)_{U,\,N}. \quad (30)$$

Введем обозначение для возникшей обобщенной силы

$$X_i = -\left(\frac{\partial H_i}{\partial x}\right)_{U,\,N}. \quad (31)$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{U,\,N} = \beta \sum_{i=1}^{W} p_i X_i = \beta X, \quad (32)$$

где X — средняя обобщенная сила.

Аналогично получаем, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,\,x} = \beta \sum_{i=1}^{W} p_i \left(-\frac{\partial H_i}{\partial N}\right). \quad (33)$$

Рассмотрим полученную конструкцию более подробно. Учитывая тот факт, что минимальный шаг по N равен единице, имеем

$$\sum_{i=1}^{W} p_i \left(\frac{\partial H_i}{\partial N}\right) = \sum_{i=1}^{W} p_i \left(\frac{H_i(N+1) - H_i(N)}{1}\right). \quad (34)$$

Полученная сумма представляет собой среднее по распределению p_i от изменения уровней энергии H_i при добавлении одной частицы в изолированной системе, в процессе которого система не получает тепла и не совершает работы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{W} p_i \left(\frac{H_i(N+1) - H_i(N)}{1}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\substack{\delta Q = 0\\ \delta W = 0}} = \mu, \quad (35)$$

где μ — химический потенциал.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,\,x} = -\beta\mu. \tag{36}$$

Таким образом, полный дифференциал энтропии Реньи в переменных (U, x, N) имеет вид

$$dS = \beta(dU + Xdx - \mu dN). \tag{37}$$

Замечая, что по построению Xdx — производимая системой работа, а также вспоминая первое начало термодинамики, мы приходим к соотношению

$$dS = \beta\delta Q, \tag{38}$$

в котором δQ — количество теплоты, получаемое системой. Из (38) видно, что β является интегрирующим множителем для выражения первого начала термодинамики. Но, как нам известно из второго начала термодинамики, данный интегрирующий множитель равен обратной температуре системы, поэтому для любого допустимого q,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{x,\,N} = \beta = 1/\theta. \tag{39}$$

Тем самым мы приходим к выводу о том, что введенная в рассмотрение статистическая энтропия Реньи соответствует термодинамической энтропии Клаузиуса. Данный факт позволяет нам использовать все термодинамические соотношения в контексте статистики Реньи.

В соответствии с (39) распределение Реньи может быть записано в виде

$$p_i^{(R)} = \frac{1}{Z^{(R)}}\left(1 - \frac{q-1}{q}\cdot\frac{H_i - U}{\theta}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad i = \overline{1, W},$$
$$Z^{(R)} = \sum_{i=1}^{W}\left(1 - \frac{q-1}{q}\cdot\frac{H_i - U}{\theta}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

5. ТЕОРЕМА О РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ

Теорема 1. Для классической статистической системы с D-мерным фазовым пространством $X = (x_1, x_2, \ldots, x_D)$ и гамильтонианом $H(X)$, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, для любого натурального $k \leqslant D$ выполняется следующее соотношение:

$$\left\langle x_k \frac{\partial H}{\partial x_k}\right\rangle = \theta, \tag{40}$$

в котором усреднение производится по распределению Реньи.

Доказательство. Докажем справедливость сформулированной теоремы. Для этого удобно использовать q-формулу (21). С ее помощью, учитывая условие нормировки $\sum_i^W p_i = 1$ и вид распределения Реньи (9), получим выражение

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\sum_{i=1}^{W}\left(1 - \beta\frac{q-1}{q}(H_i - U)\right)^{\frac{q}{q-1}} = 1. \tag{41}$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения:

$$\lambda = \frac{q-1}{q}, \qquad \Delta H_i = H_i - U. \tag{42}$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\sum_{i=1}^{W}(1 - \beta\lambda\Delta H_i)^{\frac{1}{\lambda}} = 1. \tag{43}$$

Рассматриваемая теорема справедлива для классических систем с непрерывным энергетическим спектром, поэтому необходимо перейти от дискретного случая с H_i к функции $H(x_1, x_2, \ldots, x_D)$, непрерывно зависящей от своих аргументов. При этом суммирование по состояниям системы переходит в интегрирование по объему фазового пространства X. Элемент интегрирования обозначим

$$d\Gamma = \frac{1}{(D/2d)!}\frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_D}{(2\pi\hbar)^{D/2}}\prod_{i=1}^{D/2d}\gamma_i, \tag{44}$$

где с помощью γ_i учитываются квантовые степени свободы частицы с номером i, d — размерность физического пространства, а $(D/2d)!$ определяет количество перестановок тождественных частиц, учет которых является существенным при переходе от квантового случая к классическому, в котором каждая частица пронумерована. Множитель $(2\pi\hbar)^{D/2}$ представляет собой объем ячейки фазового пространства X, где подразумевается одинаковое количество координатных и импульсных переменных. Тогда выражение (43) принимает вид

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\int\limits_X (1 - \beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}} d\Gamma = 1. \tag{45}$$

Предполагая явную зависимость H от x_k $(k = \overline{1, D})$, применим формулу интегрирования по частям по обозначенной переменной. Тогда

$$\int\limits_X (1 - \beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}} d\Gamma =$$
$$= \int\limits_{X_k}\left[(1 - \beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}} x_k\right]\Bigg|_{x_k=a}^{x_k=b} d\Gamma_k +$$
$$+ \beta\int\limits_X x_k\frac{\partial\Delta H}{\partial x_k}(1 - \beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}-1} d\Gamma, \tag{46}$$

где $X_k = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_D)$, $d\Gamma_k = d\Gamma/dx_k$, a и b — границы области интегрирования по переменной x_k. Также сделаем замечание по поводу производной отклонения энергии от среднего значения:

$$\frac{\partial\Delta H}{\partial x_k} = \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_k}, \tag{47}$$

но U не зависит от переменной x_k, поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\Delta H}{\partial x_k} = \frac{\partial H}{\partial x_k}. \tag{48}$$

В итоге получим

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\int\limits_{X_k}\left[(1-\beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}}x_k\right]\Bigg|_{x_k=a}^{x_k=b}d\Gamma_k+ \\ +\frac{\beta}{Z^{(R)}}\int\limits_{X}x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}(1-\beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}-1}d\Gamma=1. \quad (49)$$

Рассмотрим первый интеграл из (49). Множитель $(1-\beta\lambda\Delta H)$, входящий в подынтегральную функцию, взаимно однозначно определяет нулевые значения вероятностей в распределении Реньи. То есть

$$p^{(R)}(X_0)=0\Leftrightarrow(1-\beta\lambda\Delta H(X_0))=0,$$

где $p^{(R)}(X_0)$ — значение плотности вероятности на множестве $X_0\subset X$.

В соответствии с самим физическим смыслом плотности вероятности состояний данная функция на границе области возможных значений переменных фазового пространства должна равняться нулю, то есть имеет ограниченный носитель. Поэтому в случае конечных значений a и b данный интеграл равен нулю. В случае когда в подстановках содержится $+\infty$ или $-\infty$, мы имеем дело с неопределенностью вида $0\cdot\infty$, однако теперь мы можем воспользоваться тем фактом, что рассматриваемая система физически ограничена и все ее параметры являются конечными величинами. Поэтому уже при некоторых конечных, но достаточно больших по модулю значениях a и b достигается область фазового пространства, вероятность нахождения системы в которой равна нулю. Исходя из вышесказанного, можем заключить, что

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\int\limits_{X_k}\left[(1-\beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}}x_k\right]\Bigg|_{x_k=a}^{x_k=b}d\Gamma_k=0, \quad (50)$$

и тогда имеет место соотношение

$$\frac{1}{Z^{(R)}}\int\limits_{X}x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}(1-\beta\lambda\Delta H)^{\frac{1}{\lambda}-1}d\Gamma=\frac{1}{\beta}. \quad (51)$$

Вспоминая, что $1/\lambda-1=1/(q-1)$, $\beta=1/\theta$, получаем

$$\left\langle x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}\right\rangle=\theta, \quad (52)$$

где усреднение производится по распределению Реньи.

Что и требовалось доказать. □

Доказанная теорема позволяет с легкостью получить величину средней внутренней энергии большого числа статистических систем. Более того, одинаковая форма вириальных соотношений в статистиках Гиббса и Реньи приводит к знакомым выражениям внутренней энергии. Например, для одномерного гармонического осциллятора $U_{osc}=\theta$, для свободного одноатомного газа $U_0=(3/2)N\theta$, для ультрарелятивистского одноатомного газа $U_0^R=3N\theta$.

6. СИСТЕМА С МОДЕЛЬНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ $H=Cx^k$

С целью демонстрации преимуществ использования теоремы о равнораспределении энергии рассмотрим важный случай модельного степенного гамильтониана одной переменной

$$H=Cx^k,\quad x\in[0,+\infty), \quad (53)$$

в котором C и k — некоторые положительные постоянные. Данная задача была рассмотрена в работе [30], где изложен путь прямого расчета величины средней энергии. Продемонстрируем, насколько упрощается данный процесс благодаря теореме о равнораспределении. Из доказанной теоремы следует, что

$$U=\langle H\rangle=\frac{1}{k}\left\langle x\frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle=\frac{\theta}{k}. \quad (54)$$

Однако необходимо отметить, что подобный метод вычисления средней энергии не позволяет получить соответствующие условия сходимости U, которые естественным образом следуют из процедуры прямого расчета. Поэтому с целью получения упомянутых ограничений приведем соответствующие выкладки.

По определению

$$U=\frac{1}{Z}\int\limits_0^{+\infty}Cx^k\left(1-\beta\frac{q-1}{q}(Cx^k-U)\right)^{\frac{1}{q-1}}dx, \quad (55)$$

где

$$Z=\int\limits_0^{+\infty}\left(1-\beta\frac{q-1}{q}(Cx^k-U)\right)^{\frac{1}{q-1}}dx. \quad (56)$$

Обратим внимание на то, что у нормировки Z отсутствует индекс R, так как в данном случае Z представляет собой нормировочный интеграл, а не статистическую сумму, которая фигурировала в предыдущих разделах.

Чтобы выполнить соответствующие вычисления, воспользуемся значением табличного [31] интеграла вида:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\mu-1}}{(a+bx^\nu)^\lambda}dx=\frac{1}{\nu a^\lambda}\left(\frac{a}{b}\right)^{\mu/\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\Gamma\left(\lambda-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(\lambda)} \quad (57)$$

с условиями сходимости

$$0<\frac{\mu}{\nu}<\lambda,\qquad\lambda>1. \quad (58)$$

Для начала рассмотрим выражение для нормировки Z, которое имеет структуру, подобную интегралу I. Из вида (57) можно заключить, что $Z=I$ при

$$\lambda=\frac{1}{1-q},\quad\nu=k,\quad\mu=1,$$
$$a=1+\beta U\frac{q-1}{q},\quad b=-C\beta\frac{q-1}{q}.$$

Таким образом,

$$Z=\frac{1}{k}\left(1+\beta U\frac{q-1}{q}\right)^{\left(\frac{1}{q-1}+\frac{1}{k}\right)}\times \\ \times\left(-C\beta\frac{q-1}{q}\right)^{\left(-\frac{1}{k}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \tag{59}$$

при выполнении условий сходимости:

$$0<\frac{1}{k}<\frac{1}{1-q},\qquad \frac{1}{1-q}>1. \tag{60}$$

Аналогично поступим с интегралом

$$J=\int\limits_0^{+\infty}x^k\left(1-\beta\frac{q-1}{q}(Cx^k-U)\right)^{\frac{1}{q-1}}dx, \tag{61}$$

который принимает вид (57) при

$$\lambda=\frac{1}{1-q},\quad \nu=k,\quad \mu=k+1,$$
$$a=1+\beta U\frac{q-1}{q},\quad b=-C\beta\frac{q-1}{q},$$

Тогда, используя выражение (57), получим

$$J=\frac{1}{k}\left(1+\beta U\frac{q-1}{q}\right)^{\left(\frac{1}{q-1}+\frac{1}{k}+1\right)}\times \\ \times\left(-C\beta\frac{q-1}{q}\right)^{\left(-\frac{1}{k}-1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \tag{62}$$

с условиями сходимости:

$$\begin{cases}0<\dfrac{1}{k}+1<\dfrac{1}{1-q}\\ 1<\dfrac{1}{1-q}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad q_{\min}=\frac{1}{1+k}. \tag{63}$$

В результате взятия интегралов выражение (55) примет вид:

$$U=C\frac{J}{Z}=\frac{1}{\beta}\left(\frac{q}{1-q}-\beta U\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}{\times} \\ \times\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}\right)}. \tag{64}$$

Вспомним полезное свойство Г-функции: $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ и воспользуемся им для упрощения полученного выражения

$$\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}\right)= \\ =\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}-1\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)=\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right).$$

Тогда из (64) получаем величину средней энергии

$$U=\frac{1}{\beta k}. \tag{65}$$

Вспоминая, что $1/\beta=\theta$, получим результат, предсказываемый теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы

$$U=\frac{\theta}{k}. \tag{66}$$

Таким образом, прямым вычислением мы убедились в справедливости теоремы о равнораспределении энергии, а также получили условие сходимости $q>q_{\min}=1/(1+k)$. Тем самым распределение Реньи для системы с модельным гамильтонианом (53) выглядит следующим образом:

$$p^{(R)}(x)=\frac{1}{Z^{(R)}}\left(1-\frac{q-1}{kq}(C_ux^k-1)\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{67}$$

где введено обозначение $C_u=C/U$.

7. ОБОБЩЕНИЕ СТЕПЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как оказалось, с точки зрения практики особый интерес представляет предельный случай данного распределения при $q\to q_{\min}$. Поэтому мы рассмотрим его более подробно. Так как при $q=q_{\min}$ интеграл средней энергии расходится, введем положительный параметр $\varepsilon\to 0$ такой, что $q=q_{\min}+\varepsilon$:

$$p^{(R)}(x,\varepsilon)=(Z)^{-1}\left(C_ux^k\right)^{-\frac{k+1}{k}\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}\times \\ \times\left[1-\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\left(1-\left(C_ux^k\right)^{-1}\right)\right]^{-\frac{k+1}{k}\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}. \tag{68}$$

Нормировочная функция данного распределения имеет вид

$$Z=\frac{1}{k}\left(\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{-\left(1+\varepsilon\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right)}\times \\ \times\left[C_u\left(1-\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\right)\right]^{-\frac{1}{k}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1+\varepsilon\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right)}{\Gamma\left(1+\varepsilon\left(\frac{k+1}{k}\right)^2+\frac{1}{k}\right)}. \tag{69}$$

Отметим, что полученная нормировка совпадает с приближенным значением нормировочной функции (59) вблизи $q=q_{\min}$. Однако необходимо помнить, что при разложении распределений функция Z может не совпадать с разложением исходной нормировочной функции, так как в общем случае процедура разложения распределения нарушает исходную нормировку.

Проведем анализ полученного разложения. Очевидно, что при $\varepsilon=0$ распределение (68) приобретает степенную форму:

$$p^{(R)}\Big|_{\varepsilon\to 0}\sim x^{-(k+1)}. \tag{70}$$

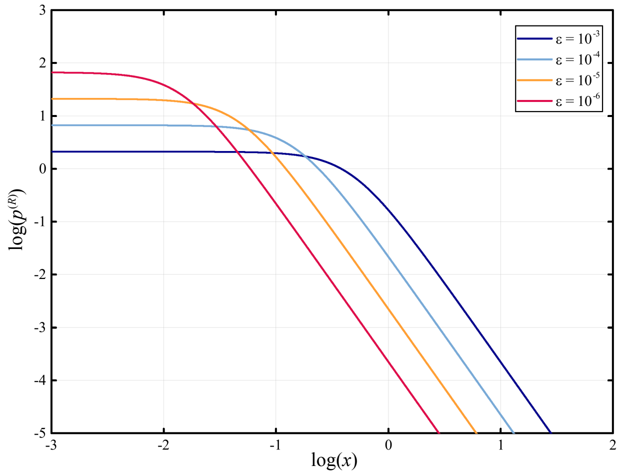

Рис. 1. Распределение Реньи для системы с гамильтонианом $H = x^2$ и $\beta = 0.01$ при $q = q_{\min} + \varepsilon$

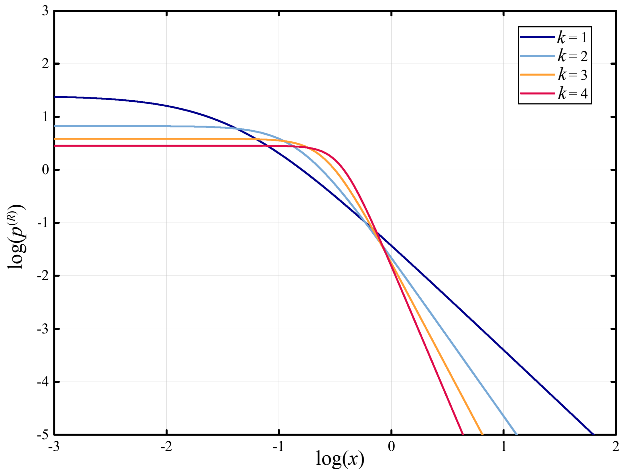

Рис. 2. Распределение Реньи для системы с гамильтонианом $H = x^k$ и $\beta = 0.01$ при $q = q_{\min} + 10^{-4}$

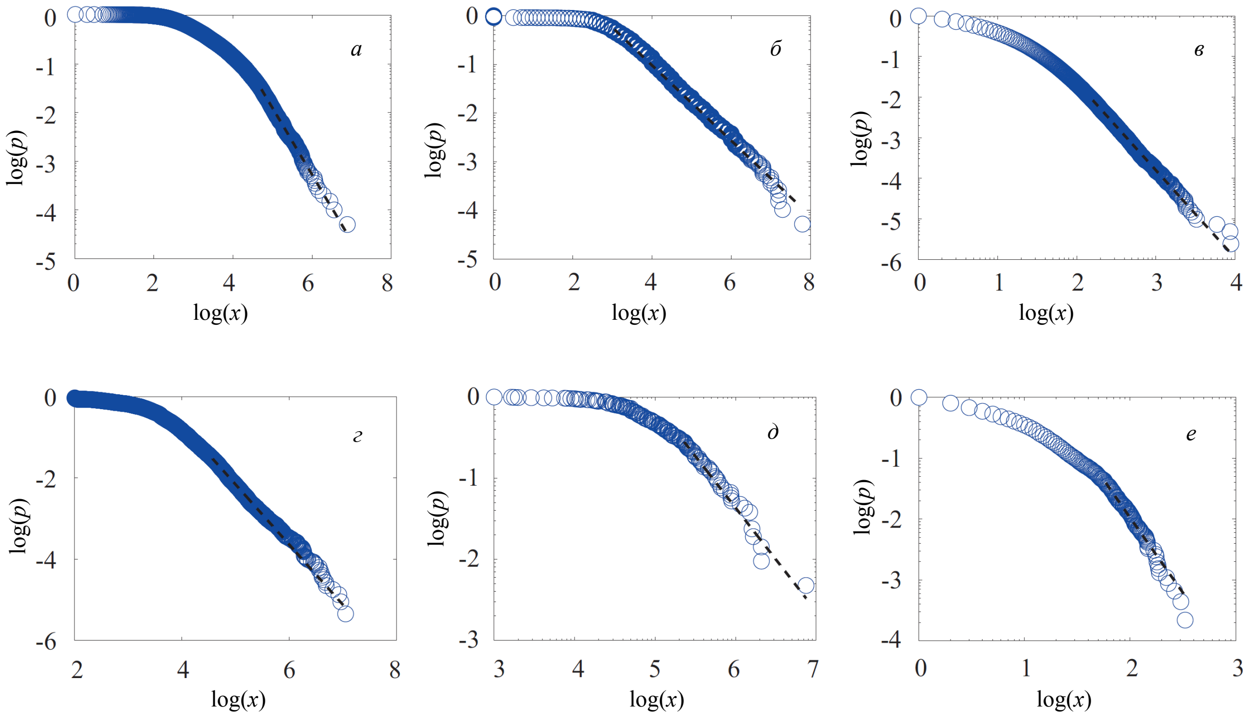

Рис. 3. Совокупные функции распределения $p(x)$ и соответствующие им наиболее вероятные аппроксимации степенным законом для шести различных наборов эмпирических данных [32]. (*а*) Численность населения городов США. (*б*) Интенсивность землетрясений. (*в*) Число цитирований опубликованных научных статей. (*г*) Количество информации в байтах, полученной в ответ на HTTP (сетевые) запросы с компьютеров большой исследовательской лаборатории. (*д*) Число клиентов, затронутых отключениями электричества в США. (*е*) Размеры адресных книг электронной почты в университете

Однако не стоит забывать, что при $q = q_{\min}$ ($\varepsilon = 0$) имеет место расходимость величины средней энергии, а следовательно, распределение Реньи лишь асимптотически приближается к степенной форме при $\varepsilon \to 0$.

Теперь рассмотрим случай $x \to +\infty$. Из (68) нетрудно заметить, что в данном пределе мы получаем степенную зависимость

$$p^{(R)}\Big|_{x\to+\infty} \sim x^{-(k+1)\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}. \qquad (71)$$

Переходя к логарифмическому масштабу, легко понять, что наклон графика зависимости $\ln p^{(R)}$ от $\ln x$ в рассматриваемом пределе $x \to +\infty$ определяется выражением $-(k+1)\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)$.

В области малых значений переменной x ($x \to 0$) распределение (68) выходит на константу

$$p^{(R)}\Big|_{x\to 0} = (Z)^{-1}\left[\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\right]^{-\frac{k+1}{k}\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}. \qquad (72)$$

Продемонстрируем общий характер распределения (68) в зависимости от параметров ε и k. Для определенности выберем $C = 1$ и $\beta = 0.01$. Соответствующие графики представлены на рис. 1 и 2.

Как можно видеть, характерной особенностью распределения Реньи, отличающей его от степенного распределения, служит наличие так называемого плато, наблюдаемого в области $x \ll 1$. При этом от параметра гамильтониана k зависит, насколько плавным или резким будет переход от константы к степенной зависимости.

Как оказалось, экспериментальное исследование систем, которым обычно приписывают степенной закон распределения, зачастую приводит к статистике, соответствующей рассматриваемому частному случаю распределения Реньи. Массу примеров подобного рода зависимостей можно найти в работах [5, 32], где собрана и проанализирована статистика большого числа систем различной природы — от землетрясений и лесных пожаров до численности населения городов и частоты цитирования статей. Наиболее схожие по форме с зависимостью (68) графики из [32] приведены на рис. 3.

Также в качестве примера появления полученного распределения (68) отметим результаты изучения статистики схождения рисовых лавин в эксперименте, которому посвящены статьи [33–35]. Кроме того, данный опыт рассмотрен в книге [7]. Другим удивительным примером является статистика вихревых лавин (лавин магнитного потока) в высокотемпературных сверхпроводниках [36]. Все это наталкивает на мысль о применимости распределения Реньи к широкому кругу разнообразных систем и явлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые доказана теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы классических статистических систем в случае распределения Реньи, получаемого путем максимизации одноименного функционала энтропии. Тем самым нам удалось расширить область применимости данной теоремы, охватив класс статистических моделей, описываемых распределением Реньи, которое обобщает каноническое распределение Гиббса. Доказанная теорема является мощным инструментом, дающим возможность весьма быстро получать величину средней энергии для большого числа статистических моделей, что позволяет избежать трудоемкой задачи прямого расчета данной характеристики систем.

В ходе изучения свойств распределения Реньи получены некоторые полезные соотношения, среди которых необходимо выделить так называемую q-формулу, сыгравшую центральную роль в доказательстве вышеупомянутой теоремы. Также выведено равенство между логарифмом статистической суммы распределения Реньи и энтропией Реньи, что дало возможность установить связь производных энтропии и средней энергии по температуре.

Установлена связь между статистической энтропией Реньи и функцией термодинамической энтропии Клаузиуса, в результате чего раскрыт физический смысл множителя Лагранжа β, фигурирующего в распределении Реньи.

На примере системы с модельным гамильтонианом $H = Cx^k$ продемонстрирован прямой способ расчета величины средней энергии, который позволил получить ограничение на параметр распределения q, а также привел к результату, подтверждающему теорему о равнораспределении.

В рамках рассматриваемой модели изучено поведение распределения при q, близком к $q_{\min}$. Характерной и важной особенностью исследуемого случая является наличие горизонтального участка — плато в области малых значений x.

На рис. 3 продемонстрировано, что многие эмпирические данные хорошо аппроксимируются степенным распределением только лишь при достаточно больших значениях случайной величины. В области малых значений, в свою очередь, наблюдается явное отклонение от него. Данный феномен деформации степенного распределения свидетельствует о применимости статистики Реньи к широкому кругу явлений, соответствующих различным областям науки.

Следует отметить, что q-статистика является перспективным направлением исследований, связанных с изучением сложных и самоорганизующихся систем. Это подтверждается успехами в применении обобщенной статистики к анализу самых актуальных проблем, например, эпидемии COVID-19, чему посвящена работа [37].

Авторы выражают благодарность доценту Г. В. Ковалю и доценту В. А. Грибову за ценные замечания при написании данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Renyi A.* et al. // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. 1961. **1**. P. 547.
2. *Renyi A.* // Probability theory. North-Holland, 1970.
3. *Shannon C. E.* // Bell Syst. Techn. J. 1948. **27**. P. 379. P. 623.
4. *Bashkirov A. G.* // Physica A. 2004. **340**. P. 153.
5. *Newman M. E. J.* // Contemp. Phys. 2005. **46**, N 5. P. 323.
6. *Zipf G. K.* // Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology. Addison-Wesley Press, 1949.
7. *Bak P.* // How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. Springer, 1996.
8. *Bashkirov A. G., Vityazev A. V.* // Planet. Space Sci. 1996. **44**, N 9. P. 909.
9. *Rybczyski M., Wlodarczyk Z., Wilk G.* // Nucl. Phys. B — Proc. Suppl. 2001. **97**. P. 81.
10. *Gabaix X.* // Annu. Rev. Econ. 2009. **1**, N 1. P. 255.
11. *Qian J., Luscombe N. M., Gerstein M.* // J. Mol. Biol. 2001. **313**, N 4. P. 673.
12. *Goh K. I., Oh E., Jeong H.* et al. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2002. **99**, N 20. P. 12583.
13. *Naranan S., Balasubrahmanyan V. K.* // Journal of Quantitative Linguistics. 1998. **5**, N 1, 2. P. 35.
14. *Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P.* et al. // Phys. Rev. A. 1986. **33**, N 2. P. 1141.
15. *Arimitsu T., Arimitsu N.* // Physica A. 2002. **305**, N 1, 2. P. 218.
16. *Zander C., Plastino A. R., Casas M., Plastino A.* // Eur. Phys. J. D. 2012. **66**, N 1. P. 14.
17. *Geilikman M. B., Golubeva T. V., Pisarenko V. F.* // Earth Planet. Sci. Lett. 1990. **99**, N 1, 2. P. 127.
18. *Essex C., Schulzky C., Franz A., Hoffmann K. H.* // Physica A. 2000. **284**. P. 299.
19. *Башкиров А. Г.* // ТМФ. 2006. **149**, № 2. С. 299.
20. *Tsallis C.* // Journal of statistical physics. 1988. **52**, N 1, 2. P. 479.

21. *Tsallis C.* // Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world. Springer Science & Business Media, 2009.
22. *Abe S., Okamoto Y.* (ed.). // Nonextensive statistical mechanics and its applications. Springer Science & Business Media, 2001.
23. http://tsallis.cat.cbrf.br/biblio.htm
24. *Shore J. E., Johnson R. W.* // IEEE Trans. Inf. Theory. 1980. **26**, N 1. P. 26.
25. *Johnson R. W., Shore J. E.* // IEEE Trans. Inf. Theory. 1983. **29**, N 3. P. 942.
26. *Uffink J.* // Stud. Hist. Philos. Sci. B. 1995. **26**, N 3. P. 223.
27. *Jaynes E. T.* // Phys. Rev. 1957. **106**, N 4. P. 620.
28. *Jaynes E. T.* // Phys. Rev. 1957. **108**, N 2. P. 171.
29. *Квасников И. А.* // Статистическая физика. Теория равновесных систем. Т. 2. М.: УРСС, 2002.
30. *Bashkirov A. G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. **93**, N 13. P. 130601.
31. *Gradstein I. S., Ryzhik I. M.* // Tables of Integrals, Sums, Series and Productions, 5th ed. Academic Press, 1994.
32. *Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J.* // SIAM review. 2009. **51**, N 4. P. 661.
33. *Frette V., Christensen K., Feder J.* et al. // Nature. 1996. **379**, N 6560. P. 49.
34. *Christensen K., Corral A., Frette V.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1996. **77**, N 1. P. 107.
35. *Bengrine M., Benyoussef A., Mhirech F., Zhang S. D.* // Physica A. 1999. **272**, N 1-2. P. 1.
36. *Qviller A. J., Qureishy T., Xu Y.* et al. // Sci. Rep. 2020. **10**, N 1. P. 1.
37. *Tsallis C., Tirnakli U.* // Frontiers in Physics. 2020. **8**. P. 217.

Certain Relations in Statistical Physics Based on Rényi Entropy

T. N. Bakiev[1], **D. V. Nakashidze**[2], **A. M. Savchenko**[2,a]

[1]*Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics. Moscow 119048, Russia.*
[2]*Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a]*a.m.savchenko@gmail.com*.

The statistical theory based on the parametric family of Rényi entropy functionals is a generalization of Gibbs statistics. Depending on the value of the involved parameter, the corresponding Rényi distribution can take both an exponential form and a power-law form, which is typical for a wide range of statistical models. In this paper, we prove the energy equipartition theorem in the case of Rényi statistics, which makes it possible to solve the problem of obtaining the average energy for a large number of classical statistical models. The proposed approach for calculating the average energy is compared with the procedure for directly calculating this quantity for a system described by the simplest power-low Hamiltonian. New relations are presented that simplify the calculations in the considered theory. A special case of the Rényi distribution, which represents a generalization of a power-low distribution and thus allows us to approximate some empirical data more precisely, has been studied.

Keywords: Rényi entropy, Rényi distribution, equipartition theorem, average energy, power-law distribution.
PACS: 05.20.-y, 05.90.+m.
Received 12 September 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 6. Pp. 559–569.

Сведения об авторах

1. Бакиев Тимур Наилевич — студент; e-mail: tnbakiev@edu.hse.ru.
2. Накашидзе Дмитрий Викторович — студент; e-mail: nakashidze.dv16@physics.msu.ru.
3. Савченко Александр Максимович — доктор физ.-мат. наук, профессор, доцент; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.