

Метод связанных волновых толщин — универсальный метод синтеза интерференционных антиотражающих покрытий (π -структуры)

А. В. Козарь^a

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Поступила в редакцию 01.10.2020, после доработки 12.10.2020, принята к публикации 13.10.2020.

Предложен метод и на его основе построен универсальный алгоритм, включающий полное множество всех структурных решений при синтезе просветляющих многослойных структур. Получены точные аналитические соотношения, позволяющие синтезировать просветляющие структуры с минимально возможным числом слоев для любых встречающихся на практике значений показателей преломления как согласуемых сред, так и материалов слоев таких структур. Проведен анализ и обобщение их структурных и согласующих свойств. Корректность полученных точных решений и работоспособность метода подтверждены численным экспериментом.

Ключевые слова: многослойные структуры, интерференция.

УДК: 535.4. PACS: 42.25.-p.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической разработке методов анализа и синтеза многослойных периодических структур посвящено большое число монографий в силу актуальности этих вопросов для решения целого ряда задач как прикладной, так и фундаментальной физики [1–6]. Достаточно хорошо развиты и с достаточной полнотой обобщены результаты, относящиеся к периодическим структурам, состоящим из четвертьволновых, полуволновых или близких к ним по оптическим толщинам слоев. Однако развитие современной физики и техники, интенсивное освоение, например, таких областей электромагнитного спектра, как средний и дальний инфракрасный диапазоны, необходимость решения задач диагностики и синтеза слоисто-неоднородных сред с заданной амплитудно-фазовой характеристикой и с различным периодом неоднородности, все это потребовало развития нового подхода при проведении как аналитического, так и численного анализа свойств и особенностей многослойных структур в более общей постановке задачи и, как результат, разработку метода, позволяющего найти в аналитической форме алгоритм синтеза многослойных структур с отличными от классических структурными и амплитудно-фазовыми свойствами.

Решение такой задачи в аналитической форме имеет исключительно большое значение, поскольку аналитическая форма позволяет, не прибегая к использованию специальных численных методов и прикладных программ [7–11], не только синтезировать многослойную структуру с заданными амплитудно-фазовыми характеристиками на всем непрерывном множестве их возможных значений, но и выполнить обобщенный анализ ее структурных и волновых свойств в зависимости от различного рода физических факторов (влияния на ее амплитудно-волновые характеристики разброса толщин слоев, показателей преломления, наличия потерь в слоях структуры, порядка чередования и т. п.). Кроме того, аналитическая форма алгоритма синтеза многослойных

структур позволяет установить общие закономерности ее амплитудно-фазовых характеристик от различных структурных решений и найти оптимальные решения по различным критериям (по количеству слоев, их толщинам, по контрастности периода, спектральным характеристикам и т. п.).

1. МЕТОД СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВЫХ ТОЛЩИН

С целью решения такой задачи в работе [12] было рассмотрено нормальное падение плоской монохроматической волны на систему, состоящую из многослойной структуры с показателями преломления слоев в двухслойном (наиболее распространенном на практике) периоде n_1 и n_2 (слой, прилегающий к среде с показателем преломления n_S), которая, будучи расположена между двумя средами с действительными показателями преломления n_L (среда, из которой распространяется волна) и n_S (просветляемая среда), обеспечивает на заданной длине волны λ коэффициент отражения равный нулю, т. е. одновременное выполнение амплитудного $|r_C| = |r_S|$ и фазового $\varphi_C = \varphi_S + \pi(2k + 1)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) условий согласования (где $|r_C|$, φ_C — модуль и фаза коэффициента отражения волны от структуры при падении волны со стороны слоя с показателем преломления n_2 в отсутствие согласуемой среды; $|r_S|$, φ_S — модуль и фаза коэффициента отражения волны от согласуемой среды в отсутствие согласующей структуры).

Рассмотрение задачи в такой постановке соответствует основной цели исследования, поскольку нахождение структурных решений рассматриваемой системы удовлетворяющих условию нулевого отражения при различных значениях показателя преломления согласуемой среды n_s на всем непрерывном множестве его возможных значений означает, что найден искомым алгоритм синтеза нового класса многослойных структур со структурно-волновыми свойствами, позволяющими реализовать решение поставленной задачи.

При решении исходных уравнений волновые толщины слоев в периоде структуры считались не фиксированными, а лежащими во всей непрерывной области физически допустимых значений. Точное

^a E-mail: avk@phys.msu.ru

решение рассматриваемой задачи в виде трех связанных уравнений имеет вид [12]:

$$n_s = \left| \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_2 + n_2 T_1} \right| \frac{n_1 n_2}{n_L}, \quad (1)$$

$N = 2K$:

$$1 - \frac{P}{A} T_1 T_2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + T_1^2)(1 + T_2^2)}, \quad (2)$$

$N = 2K + 1$:

$$1 - \frac{B}{A} T_1 T_2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + T_1^2)(1 + T_2^2)}, \quad (3)$$

где N — число слоев в структуре, K — число периодов,

$$P = \frac{(n_2^2 - n_L n_s)(n_L n_1^2 - n_s n_2^2)}{n_2^2(n_L - n_s)(n_L n_s - n_1^2)}, \quad (4)$$

$$B = \frac{n_2^4 - n_L n_s n_1^2}{n_2^2(n_L n_s - n_1^2)}, \quad (5)$$

$$A = \frac{n_1(n_2^2 - n_L n_s)}{n_2(n_L n_s - n_1^2)}, \quad (6)$$

$U_{K-1}(x), U_{K-2}(x)$ — полиномы Чебышева второго рода, где:

$$U_K(x) = 2^K \left[x^K - \frac{K-1}{1!2^2} x^{K-2} + \frac{(K-2)(K-3)}{2!2^4} x^{K-4} - \frac{(K-3)(K-4)(K-5)}{3!2^6} x^{K-6} + \dots \right],$$

$$x = (1 - p T_1 T_2) / \sqrt{(1 + T_1^2)(1 + T_2^2)}, \quad p = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2},$$

$$T_i \equiv \operatorname{tg}(2\pi n_i d_i / \lambda), \quad (i = 1, 2)$$

$d_{1,2}$ — физическая толщина слоев.

1.1. Условие связи волновых толщин

Для получения условия связи волновых толщин перепишем уравнение (1) в виде

$$T_1 = A T_2, \quad (7)$$

тогда из соотношения (7) получим

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} A \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} D_2 + \pi k \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $D_2 = \frac{\lambda}{2\pi} (\operatorname{arctg} T_2 + \pi k)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), $D_1 = n_1 d_1$, $D_2 = n_2 d_2$ — волновые (оптические) толщины слоев в периоде многослойной структуры.

Таким образом, уравнение (1) представляет собой условие связи волновых толщин слоев в периоде

структуры, причем, как видно из (6), коэффициент связи A инвариантен относительно числа слоев в структуре. Поскольку условие связи (8) было получено при условии равенства нулю коэффициента отражения от рассматриваемой системы, то независимость коэффициента связи A от числа слоев в структуре позволяет сделать вывод о наличии у такого класса многослойных структур с двухслойным периодом фундаментального свойства, которое можно сформулировать следующим образом: у всех многослойных структур такого класса с двухслойным периодом, реализующих режим полного согласования двух сред с действительными показателями преломления n_L и n_S , волновые толщины слоев в периоде структуры всегда связаны в соответствии с соотношением (8). То есть выполнение условия связи (8) и его инвариантность от числа слоев означает, что у любых структур, волновые толщины слоев в периоде которых связаны соотношением (8), выполнено фазовое условие согласования. Кроме того, из соотношения (6) следует, что для любых действительных значений $n_S \geq n_L$ и произвольных значениях показателей преломления слоев структуры и порядке их чередования всегда существует такое значение A , при котором выполняется фазовое условие согласования вне зависимости от числа слоев в структуре и выполнения амплитудного условия согласования.

1.2. Основные уравнения со связанными волновыми толщинами

Окончательно, учитывая условие связи (7), систему исходных уравнений (2), (3) можно переписать в виде [12]:

$N = 2K$:

$$1 - P T_2^2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + T_2^2)(1 + A^2 T_2^2)}, \quad (9)$$

$N = 2K + 1$:

$$1 - B T_2^2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + T_2^2)(1 + A^2 T_2^2)}, \quad (10)$$

Таким образом, считая изначально заданными значения n_1 , n_2 и n_L решением задачи является нахождение численных значений физических толщин d_2 при заданном значении n_S в зависимости от числа периодов структуры K . Численные значения d_1 определяются из условия связи оптических толщин (8).

Уравнения (9), (10) относительно T_2 представляют собой сумму членов сходящихся знакпеременных степенных рядов вида:

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K a_K T_2^{2K} = -1, \quad (11)$$

где a_K — коэффициенты, зависящие от n_1, n_2, n_L, n_S и K , причем, в уравнении (11) коэффициент $a_1 = K(\Psi + Q(K-1))$, где $\Psi = P$ при $N = 2K$ и $\Psi = B$ при $N = 2K + 1$.

2. ТОНКОСЛОЙНЫЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ (ТИС)

В работе [12] ставилось целью и была решена задача нахождения из всего множества решений системы уравнений (9), (10) таких решений, при которых реализуются минимально возможные толщины слоев в периоде многослойной структуры. Поскольку в этом случае аргументы функций T_i малы, то, пренебрегая членами с показателями степени выше второй у функций T_i , из уравнений (9), (10) было получено:

$$N = 2K,$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi n_2} \arctg \left(K(P + Q(K - 1)) \right)^{-1/2}, \quad (12)$$

$$N = 2K + 1,$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi n_2} \arctg \left(K(B + Q(K - 1)) \right)^{-1/2}, \quad (13)$$

где

$$Q = \frac{n_L n_S (n_2^2 - n_1^2)^2}{2n_2^2 (n_L n_S - n_1^2)^2}, \quad (14)$$

причем при $K = 1$ соотношения (12), (13) являются точными, а при $K > 1$ сделанное приближение вполне оправдано, поскольку в силу обратно пропорциональной зависимости толщины слоев от их количества их толщина может быть в десятки раз меньше четвертьволновой, более того, суммарная волновая толщина многослойной структуры оказывается меньше четвертьволновой [12].

К настоящему времени проведен достаточно подробный аналитический, численный и экспериментальный анализ фундаментальных структурных и спектральных свойств таких тонкослойных структур [12–21], который показал, что они сохраняются для такого класса структур с двух-, трех- и многослойным периодом, а также для аperiodических тонкослойных структур, в случае наличия малых потерь в слоях структуры и согласуемой среде, наклонного падения волны, при малых вариациях оптических и геометрических параметров слоев и при отличии фронта падающей волны от плоского.

Наличие, например, таких свойств тонкослойных структур, как инвариантность согласующей способности (величины показателя преломления просветляемой среды n_S) от числа периодов структуры и, в то же время обратно пропорциональная зависимость от него толщин ее слоев, позволяет варьировать в широких пределах толщины слоев структуры (не меняя при этом суммарной оптической толщины всей структуры), удовлетворяя тем самым различного рода физическим и технологическим требованиям к толщинам слоев при практической реализации.

Анализ и обобщение результатов исследования характеристик таких структур показал, что они обладают целым рядом уникальных, присущих только им структурных и волновых свойств, что позволило выделить такие структуры в отдельный класс — тонкослойные интерференционные структуры (ТИС).

Однако в работе [12] было показано, что все тонкослойные решения (толщины обоих слоев в периоде

структуры меньше четвертьволновых) по предложенному алгоритму реализуются при коэффициенте связи $A \geq 0$, то есть при значениях показателей преломления просветляемых сред n_S лежащих в интервале значений:

$$n_i^2 \leq n_S n_L \leq n_h^2, \quad (15)$$

где n_l, n_h — низкий и высокий показатели преломления слоев в периоде структуры соответственно. Это обстоятельство ограничивало возможность применения предложенного метода для согласования сред с показателями преломления, лежащими вне этого интервала значений.

3. π -СТРУКТУРЫ

В настоящей работе рассмотрим возможность синтеза просветляющих структур по предложенному методу и алгоритму (9), (10) за пределами интервала (15). В этом случае рассматриваемые интервалы значений n_S вне интервала (15) имеют вид

$$n_L \leq n_S < n_l^2/n_L \quad \text{и} \quad n_S > n_h^2/n_L.$$

Из выражения (6) видно, что на любом из этих интервалов коэффициент связи $A < 0$ и, как следует из (7), выполняется условие: либо $T_1 < 0$, а $T_2 > 0$, либо наоборот. Отрицательное значение функции T_1 , например, означает, что оптические толщины слоев такой структуры лежат в интервалах значений $\lambda/4 < n_1 d_1 < \lambda/2$ и $0 < n_2 d_2 < \lambda/4$ ($T_1 < 0, T_2 > 0$), причем изменение волновых толщин слоев при изменении выбора знаков функций T ($T_1 > 0; T_2 < 0$) осуществляется простым вычитанием из π соответствующих аргументов, то есть $\pi - 2\pi n_i d_i / \lambda$ и $\pi - 2\pi n_2 d_2 / \lambda$, или в выражениях для толщин:

$$d'_1 = \lambda/2n_1 - d_1 \quad \text{и} \quad d'_2 = \lambda/2n_2 - d_2.$$

Такая структурная особенность обусловлена предложенным методом и полученным на его основе алгоритмом в виде специального условия связи волновых толщин и потому образует отдельный класс просветляющих структур, который для его идентификации в дальнейшем назовем « π -структуры».

3.1. Аналитические решения уравнений со связанными волновыми толщинами

Поскольку получить точное аналитическое решение уравнений (9), (10) в общем и удобном для анализа виде (для любого K) не представляется возможным, рассмотрим точные решения уравнений (9), (10) при различных значениях числа слоев структуры N . Из анализа полученных решений определим диапазон значений показателей преломления согласуемых сред n_S , в котором при данном числе слоев реализуется режим полного согласования. Считая n_1, n_2 и n_L априори заданными и известными величинами, основными искомыми параметрами такого просветляющего N -слойного покрытия в этом случае являются толщины слоев в периоде структуры при различных значениях показателей преломления согласуемых сред n_S .

Решениями уравнений (9), (10) являются действительные значения функции T_2 , зная которые из соотношения (8) находятся соответствующие этим решениям толщины слоев в периоде структуры d_1 и d_2 .

3.1.1 Рассмотрим случай, когда $N = 2$.

Решение уравнения (9) при $N = 2$, ($K = 1$), учитывая, что $U_0(x) = 0$, имеет вид:

$$T_2 = \pm 1/\sqrt{P}. \quad (16)$$

Отрицательный знак у функции T_2 означает, что ее аргумент в этом случае равен $\arg(-T_2) = \pi - \arg(T_2)$.

На интервале низких значений показателей преломления просветляемых сред $n_L \leq n_S < n_h^2/n_L$, учитывая, что действительные значения толщин слоев структуры имеют место при $P > 0$, из анализа соотношения (4) получим, что действительные значения толщин слоев имеют место при $n_2 < n_1$ ($n_1 = n_h$; $n_2 = n_l$) и при выполнении условия

$$n_h > n_l^2/n_L. \quad (17)$$

В случаях когда просветляемые среды имеют высокий показатель преломления такой, что $n_S > n_h^2/n_L$, из анализа соотношения (4) следует, что ни при каких значениях и порядке чередования показателей преломления слоев n_1 и n_2 действительных решений уравнения (16) нет.

В частности, если удастся подобрать материалы с показателем преломления n , удовлетворяющим условию $n^2 = n_l^2 = n_S n_L$ или $n^2 = n_h^2 = n_S n_L$, то решением уравнения (16) в этих случаях будет классический четвертьволновый слой, а при значениях показателей преломления согласующей структуры, удовлетворяющих условию $(n_h/n_l)^2 n_L = n_S$, структура становится двухслойной с четвертьволновыми волновыми толщинами слоев.

Таким образом, двухслойная структура при выполнении условия (17) может обеспечить режим полного согласования со средами, показатели преломления которых лежат в интервале значений:

$$n_L \leq n_S \leq n_h^2/n_L.$$

3.1.2 В случае когда $N = 3$ ($K = 1$) решение уравнения (10) имеет вид

$$T_2 = \pm 1/\sqrt{B}. \quad (18)$$

На интервале $n_L \leq n_S < n_h^2/n_L$ при любых действительных значениях n_1, n_2 , при условии, что $n_2 < n_1$ ($n_2 = n_l$; $n_1 = n_h$), $B > 0$ и уравнение (18) имеет два действительных решения.

На интервале $n_S > n_h^2/n_L$ два действительных решения уравнения (18) имеют место при $n_1 < n_2$ и $n_S < n_h^4/n_l^2 n_L$.

В частности, если показатели преломления слоев структуры таковы, что выполняется условие $n_S = n_h^4/n_l^2 n_L$, то согласующая структура становится трехслойной с четвертьволновыми волновыми толщинами слоями.

Таким образом, трехслойная структура обеспечивает режим полного согласования со средами,

показатели преломления которых лежат в интервале значений

$$n_L \leq n_S \leq n_h^4/n_l^2 n_L,$$

а волновые толщины слоев при этом принимают значения от нулевых ($n_S = n_L$) до четвертьволновых ($n_S = n_h^4/n_l^2 n_L$).

3.1.3 В случае когда $N = 4$ ($K = 2$), из уравнения (9), при $N = 4$ ($U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$) получим

$$a_2 T_2^4 - a_1 T_2^2 + 1 = 0, \quad (19)$$

где $a_2 = A(2Pp - A)$, $a_1 = 2(P + Q)$, и решение уравнения (19) имеет вид

$$T_2 = \pm \left(\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

На интервале значений показателей преломления n_S просветляемых сред $n_L \leq n_S < n_h^4/n_l^2 n_L$ уравнение (19) имеет 4 решения при произвольных значениях n_1 и n_2 , а при значениях $(n_h/n_l)^4 n_L < n_S \leq \frac{n_h^3}{n_l n_L}$ при любых действительных значениях показателей преломления слоев в периоде структуры и оптимальном их порядке чередования ($n_1 < n_2$) уравнение (19) имеет 2 действительных решения.

В случае если показатели преломления слоев структуры удовлетворяют условию $(n_h/n_l)^4 n_L = n_S$, волновые толщины слоев становятся четвертьволновыми.

Таким образом, четырехслойная структура может реализовать режим полного согласования со средами, показатели преломления которых лежат в интервале значений:

$$n_L \leq n_S \leq n_h^3/n_l n_L.$$

3.1.4 Рассмотрим пятислойную структуру: $N = 5$ ($K = 2$).

В этом случае из уравнения (10) получим:

$$b_2 T_2^4 - b_1 T_2^2 + 1 = 0, \quad (21)$$

где $b_2 = A(2Bp - A)$, $b_1 = 2(B + Q)$, и решение уравнения (21) имеет вид

$$T_2 = \pm \left(\frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2b_2} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Анализ соотношения (22) на наличие действительных значений функции T_2 показывает, что при $n_2 > n_1$ и $n_L \leq n_S < n_h^4/n_l^2 n_L$ уравнение (21) имеет четыре действительных решения, а при $n_h^4/n_l^2 n_L \leq n_S < n_h^6/n_l^4 n_L$ — только два решения.

При выборе материалов слоев согласующей структуры с показателями преломления удовлетворяющих условию $n_S = n_h^6/n_l^4 n_L$ все волновые толщины слоев становятся четвертьволновыми.

Интервал возможных значений показателей преломления согласуемых сред в случае пятислойной структуры имеет вид

$$n_L \leq n_S \leq n_h^6/n_l^4 n_L.$$

Нахождение точных решений уравнений (9), (10) при $N > 5$ возможно, но с точки зрения решения практических задач является избыточным, поскольку для всего диапазона материалов, используемых для синтеза многослойных интерференционных структур как в оптическом, так и микроволновом диапазонах, структуры, синтезированные на основе предложенного алгоритма, с количеством слоев $N \leq 5$ могут обеспечить отсутствие отраженного сигнала практически от любых реально используемых на практике материалов с действительными показателями преломления. Так, например, для часто используемых при синтезе многослойных интерференционных покрытий в среднем ИК-диапазоне материалов BaF_2 ($n_l = 1.45$) и ZnSe ($n_h = 2.55$) созданные на их основе структуры при распространении волны в свободном пространстве ($n_L = 1$) имеют следующие интервалы значений показателей преломления согласуемых сред: ($N = 2$) $1 \leq n_S \leq 6.50$; ($N = 3$) $1 \leq n_S \leq 20.11$; ($N = 4$) $1 \leq n_S \leq 11.43$; ($N = 5$) $1 \leq n_S \leq 62.20$.

3.2. Согласующая способность π -структур

Учитывая результаты, представленные в п. 3.1, и проведенный дополнительный численный анализ зависимости согласующей способности π -структур от числа слоев показал, что максимальное значение показателя преломления согласуемой среды $n_{S \max}$ от числа слоев π -структуры при оптимальном порядке их чередования может быть определено из соотношений:

$$N = 2K, \quad n_{S \max} = \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^K \frac{n_h n_l}{n_L}, \quad (23)$$

$$N = 2K + 1, \quad n_{S \max} = \left(\frac{n_h}{n_l}\right)^{2K} \frac{n_h^2}{n_L}, \quad (24)$$

причем дискретное множество значений $n_{S \max}(K)$ имеет в качестве структурного решения четвертьволновые оптические толщины слоев.

Из соотношений (23) и (24) можно определить минимальное число слоев π -структуры, необходимое для получения нулевого отражения от сред с показателями преломления, лежащих на интервале значений $n_L \leq n_S \leq n_{S \max}$:

$$N = 2K,$$

$$K_{\min} = \left\lceil \left| \ln \left(\frac{n_S n_L}{n_h n_l} \right) / \ln \left(\frac{n_h}{n_l} \right) \right| \right\rceil + 1, \quad (25)$$

$$N = 2K + 1,$$

$$K_{\min} = \left\lceil \left| \ln \left(\frac{n_S n_L}{n_h^2} \right) / 2 \ln \left(\frac{n_h}{n_l} \right) \right| \right\rceil + 1, \quad (26)$$

причем, как видно из сравнения соотношений (25) и (26), π -структуры с нечетным числом слоев реализуют режим согласования при одном и том же

значении n_S меньшим количеством слоев и являются более эффективными с точки зрения этого критерия оптимизации.

В случае когда выполнено только фазовое условие согласования, например когда $K < K_{\min}$, на заданной длине волны наблюдается локальный экстремум зависимости коэффициента отражения от длины волны от рассматриваемой системы, что может быть использовано как способ синтеза π -структур, обеспечивающих заданный коэффициент отражения $0 \leq |r| < 1$ от среды с показателем преломления n_S .

3.3. Структурные свойства

Увеличение числа слоев структуры $K > K_{\min}$ при выполнении условия связи (8) и фиксированном n_S не нарушает режим полного согласования, а приводит лишь к увеличению числа решений и изменению толщин слоев в периоде структуры так, что оптическая толщина одного из слоев π -структуры (в зависимости от выбранного знака функции T_2) при $K \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а вторая — к $\lambda/2$, например при ($T_2 > 0$) $n_2 d_2 \rightarrow 0$, а $n_1 d_1 \rightarrow \lambda/2$. Кроме того, увеличение числа слоев структуры в рассматриваемом случае приводит к снятию требования определенного порядка чередования слоев в периоде структуры. Так, например, для получения действительных значений толщин слоев в периоде π -структуры на интервале значений показателей преломления согласуемых сред $n_L \leq n_S < n_h^2/n_L$ при неоптимальном порядке чередования слоев в периоде необходимо синтезировать структуру с числом слоев $K > K_{\min}$, определяемым из соотношений:

$$N = 2K(n_1 < n_2), \quad K > \lceil |P|/Q \rceil + 1,$$

$$N = 2K + 1(n_1 < n_2), \quad K > \lceil |B|/Q \rceil + 1.$$

При аналитическом и численном анализе уравнений (9), (10) на асимптотические значения n_S было установлено, что при предельных значениях показателя преломления согласуемой среды $n_S \rightarrow n_L$ или $n_S \rightarrow \infty$, в первом случае $T_2 \rightarrow +0, T_1 \rightarrow -0$ и оптические толщины слоев равны либо нулю, либо $\lambda/2$, что естественно, поскольку в этом случае согласование не требуется. Во втором случае из анализа решений уравнений (9), (10) следует, что $T_2 \rightarrow +\infty$, а $T_1 \rightarrow -\infty$, то есть оптические толщины слоев структуры стремятся к четвертьволновым значениям, что также является очевидным.

Таким образом, из результатов, изложенных в п.п. 3.1–3.3, можно сделать общий вывод, что для любых произвольных действительных значений n_L, n_1, n_2 и n_S в рассматриваемой системе «среда — согласующая структура — согласуемая среда», при выполнении условия связи волновых толщин слоев структуры в соответствии с соотношением (8), всегда существует такое минимальное число слоев N согласующей периодической структуры, начиная с которого коэффициент отражения волны от системы становится равным нулю.

Кроме того, следует отметить универсальный характер предложенного метода и найденного на его основе алгоритма синтеза просветляющих периодических структур с двухслойным периодом, поскольку

система уравнений (9), (10) содержит полное множество всех структурных решений рассматриваемой задачи (полуволновые, четвертьволновые, тонкослойные и π -структуры).

С практической точки зрения предложенный метод и полученный на его основе алгоритм позволяют решить две основные проблемы: во-первых, отказаться от необходимости подбора величин показателей преломления материалов слоев согласующей структуры в зависимости от величины показателя преломления согласуемой среды, а во-вторых, при любых изначально выбранных материалах слоев структуры реализовать режим полного согласования для любых действительных значений показателей преломления согласуемых сред на всем непрерывном множестве их значений.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Многослойные интерференционные структуры широко используются для решения различного рода, как прикладных задач, так и при проведении фундаментальных исследований от ультрафиолетового до СВЧ диапазона. Поскольку полученные результаты справедливы для любого из этих диапазонов электромагнитного спектра, то выбор конкретного диапазона для проведения численного эксперимента определяет лишь требования к материалам слоев согласующей структуры, удовлетворяющих технологическим и физическим требованиям в выбранном спектральном диапазоне (прочности, гигроскопичности, свойствам адгезии, малому поглощению, пространственной однородности, температурной стабильности параметров и т. п.).

При выполнении численного эксперимента и синтезе согласующих структур был принят следующий алгоритм: при выбранных значениях показателей преломления слоев согласующей структуры n_h и n_l , известного показателя преломления среды, из которой распространяется волна n_L , и заданного показателя преломления согласуемой среды n_S , из соотношений (25), (26) определяется минимальное число слоев структуры N_{\min} , затем, рассчитав из соотношения (6) величину параметра связи A , из точного аналитического соотношения для полученного значения N_{\min} определяются все возможные значения величин d_2 , а из соотношения (8) — соответствующие им величины d_1 .

Основной целью численного эксперимента являлась иллюстрация возможности синтеза по предложенному алгоритму просветляющих покрытий с двухслойным периодом при фиксированных значениях n_h, n_l для широкого диапазона значений показателей преломления n_S просветляемых сред.

В связи с этим, по аналогии с работой [12], было рассмотрено распространение волны в свободном пространстве ($n_L = 1$), в качестве рабочей длины волны $\lambda = 10$ мкм, а в качестве материалов слоев структуры — часто используемые в этом спектральном диапазоне материалы ВаF₂ ($n_l = 1.45$) и ZnSe ($n_h = 2.55$). При расчете толщин слоев использовались точные решения уравнений (9), (10), приведенные в п. п. 3.1, при условии минимального отражения от согласуемых сред с заданными показателями преломления n_S .

Во всех рассмотренных ниже случаях коэффициент отражения, рассчитанный численно по точным формулам, был равен нулю («машинный ноль»).

Величины показателей преломления согласуемых сред менялась от $n_S = 1.1$ до $n_S = 60$ с переменным шагом Δn_S :

$$\begin{aligned} n_S \in 1.1 - 2.1, & \quad \Delta n_S = 0.1; \\ n_S \in 2.2 - 6.5, & \quad \Delta n_S = 0.5; \\ n_S \in 7.0 - 20, & \quad \Delta n_S = 1.5; \\ n_S \in 21 - 60, & \quad \Delta n_S = 5. \end{aligned}$$

На интервале значений $1.1 \leq n_S \leq 2.1$ согласующая структура состояла из двух слоев ($n_1 = 2.55; n_2 = 1.45$); на интервале $2.2 \leq n_S \leq 6.5$ также $N = 2$ ($n_1 = 1.45; n_2 = 2.55$); на интервале $7.0 \leq n_S \leq 20$, $N = 3$ ($n_1 = 1.45; n_2 = 2.55$); на интервале $21 \leq n_S \leq 60$, $N = 5$ ($n_1 = 1.45; n_2 = 2.55$).

С целью экономии места приведем численные значения толщин слоев согласующей структуры (округленные до третьего знака после запятой) по одному произвольному значению n_S для каждого из рассмотренных выше интервалов:

$$\begin{aligned} n_S = 1.5 (N = 2), & \quad d_{11} = 1.755 \text{ мкм}, \\ d_{21} = 1.115 \text{ мкм}; & \quad d_{12} = 0.257 \text{ мкм}, d_{22} = 2.333 \text{ мкм}; \\ n_S = 4.0 (N = 2), & \quad d_{11} = 0.585 \text{ мкм}, \\ d_{21} = 0.416 \text{ мкм}; & \quad d_{12} = 2.863 \text{ мкм}, d_{22} = 1.545 \text{ мкм}; \\ n_S = 20 (N = 3), & \quad d_{11} = 1.838 \text{ мкм}, \\ d_{21} = 0.952 \text{ мкм}; & \quad d_{12} = 1.610 \text{ мкм}, d_{22} = 1.008 \text{ мкм}; \\ n_S = 60 (N = 5), & \quad d_{11} = 1.909 \text{ мкм}, \\ d_{21} = 0.925 \text{ мкм}; & \quad d_{12} = 1.539 \text{ мкм}, d_{22} = 1.036 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

Во всех рассмотренных выше случаях уравнения (16), (18) и (21) имеют по два решения относительно толщин слоев в периоде: $\{d_{11}, d_{21}\}$ и $\{d_{12}, d_{22}\}$, где первый индекс — номер слоя, а второй — номер решения.

В случае когда показатель преломления согласуемой среды $n_S = 4.0$, имеет место структура класса ТИС (d_{11}, d_{21}).

На рисунке в качестве иллюстрации приведена зависимость энергетического коэффициента отражения $R = |r|^2$ от длины волны λ для рассмотренного выше случая при значениях толщин слоев, соответствующих $\{d_{11}, d_{21}\}$.

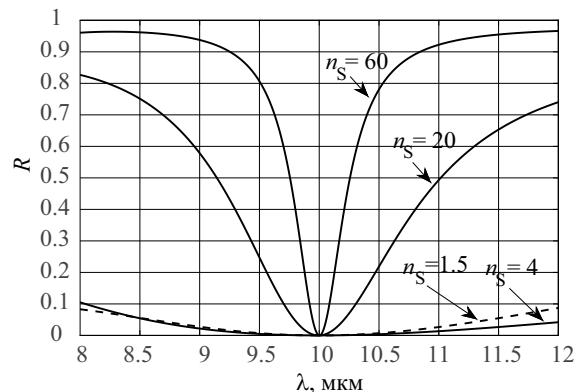


Рисунок. Зависимость коэффициента отражения R от длины волны λ от системы согласующая структура — согласуемая среда

В качестве примера, иллюстрирующего возможность выбора оптимальной толщины слоев структуры за счет синтеза структуры с количеством слоев $N > N_{\min}$ и, соответственно, большим числом решений, рассмотрим аналогичную предыдущей задаче, но при этом для согласования среды с показателем преломления $n_S = 4$ ($N_{\min} = 2$) синтезируем пяти-слойную структуру, которая в соответствии п. 3.1.4 имеет в этом случае четыре решения по толщинам слоев:

$$d_1, d_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0.280 \text{ мкм}, 0.209 \text{ мкм (ТИС)} \\ 0.889 \text{ мкм}, 0.593 \text{ мкм (ТИС)} \\ 2.559 \text{ мкм}, 1.368 \text{ мкм} \\ 3.168 \text{ мкм}, 1.752 \text{ мкм} \end{array} \right\},$$

причем, поскольку функция T_i периодическая, то каждая из всех рассчитанных выше толщин может быть увеличена на величину $(\lambda/2n_i)k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение можно отметить еще одно возможное применение предложенного метода. При численном решении задач синтеза просветляющих структур со специальными спектральными характеристиками предельный алгоритм может быть использован в качестве начального приближения, поскольку найденные на его основе решения соответствуют глобальному минимуму коэффициента отражения на заданной длине волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. MacLeod A.H. Thin-Film Optical Filters, 4 ed. CRC Press, 2010.
2. Кард П. Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. Таллин: Валгус, 1971.
3. Розенберг Т.В. Оптика тонкослойных покрытий. М.: Наука, 1958.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1980.

5. Бреховских Л.В. Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1973.
6. Хасс Г. Физика тонких пленок. М.: Наука, 1967.
7. Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В. // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1974. **14**, № 1. С. 135.
8. Tikhonravov A.V., Zhupanov V.G., Fedoseev V.N., Trubetskov M.K. // Opt. Express. 2014. **22**, N 26. P. 32174.
9. Домбровская Ж.О. // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. **23**, № 5. С5. С. 539.
10. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K. // Appl. optics. 2012. **51**, N 30. P. 7319.
11. Tikhonravov A., Trubetskov M., Amotchkina T. Optical Thin Films and Coatings / Ed. By Piegari A., Flory F. Cambridge, 2013.
12. Козарь А.В. // Оптика и Спектроскопия. 1985. **59**, № 5. С. 1132.
13. Козарь А.В. // Оптика и Спектроскопия. 1988. **64**, № 5. С. 1130.
14. Козарь А.В., Козлов А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. № 3. С. 43. (Kozar A.V., Kozlov A.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1989. N 3. P. 46.)
15. Козарь А.В., Рязанова Е.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. № 5. С. 52. (Kozar A.V., Ryzanova E.L. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1990. **45**, N 5. P. 50.)
16. Козарь А.В., Путрина Е.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 5. С. 31. (Kozar A.V., Putrina E.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1992. **47**, N 5. P. 28.)
17. Козарь А.В., Путрина Е.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 6. С. 57. (Kozar A.V., Putrina E.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1992. **47**, N 6. P. 53.)
18. Козарь А.В., Путрина Е.В., Фионова О.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 3. С. 39. (Kozar A.V., Putrina E.V., Fionova O.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 1995. N 3. P. 36.)
19. Козарь А.В. // Препринт № 8/2003, физический факультет МГУ, 2003. С. 1–10.
20. Козарь А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 54. (Kozar A.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. **64**, N 3. P. 291.)
21. Козарь А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 6. С. 61. (Kozar A.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. **73**, N 6. P. 638.)

The Coupled Wave Thickness Method as a Universal Method for Synthesizing Interference Antireflection Coatings (π -Structures)

A. V. Kozar

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.

E-mail: avk@phys.msu.ru.

A method is proposed and a universal algorithm is constructed on its basis. The algorithm includes a complete set of all structural solutions encountered in the synthesis of antireflection multilayer structures. Exact analytical relations are obtained that make it possible to synthesize antireflection structures with the minimum possible number of layers for any real values of the refractive indices of both matched media and materials of layers of such structures. Their structural and matching properties are analyzed and generalized. The correctness of the obtained exact solutions and the efficiency of the method are confirmed by a numerical experiment.

Keywords: multilayer structures, interference.

PACS: 42.25.-p.

Received 01 October 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2020. **75**, No. 6. Pp. 623–630.

Сведения об авторе

Козарь Анатолий Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: avk@phys.msu.ru.