

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Простой способ вычисления нуклонных плотностей атомных ядер на основе микроскопических зарядовых плотностейМ. В. Чушнякова,¹ И. И. Гончар,² О. М. Сухарева^{1, a}¹ Омский государственный технический университет, кафедра «физика».
Россия, 644050, Омск, пр. Мира, д. 11.² Омский государственный университет путей сообщения, кафедра «физика и химия».
Россия, 644046, Омск, пр. Маркса, д. 35.

Поступила в редакцию 28.10.2020, после доработки 25.11.2020, принята к публикации 07.12.2020.

Слияние ядер представляет собой интереснейший пример коллективного ядерного движения и дает нам информацию о взаимодействии ядер и их структуре. Теоретический анализ сечений слияния часто опирается на модель двойной свертки, которая используется для расчета потенциальной энергии взаимодействия сталкивающихся ядер (ядро-ядерного потенциала). Важным ингредиентом этой модели является плотность нуклонов. Расчет этой плотности в рамках микроскопических моделей чрезвычайно трудоемок. В данной работе мы предлагаем упрощенный способ расчета плотности нейтронов и протонов, основанный на микроскопических плотностях шести реперных ядер. Этот способ позволяет получать нуклонные плотности без значительных затрат компьютерного времени и может быть легко использован экспериментаторами.

Ключевые слова: слияние атомных ядер, модель двойной свертки, плотность нуклонов, распределение заряда в ядре.

УДК: 539.143.5. PACS: 21.10.Ft.

ВВЕДЕНИЕ

Коллективное ядерное движение большой амплитуды интересно со многих точек зрения. Популярная сейчас тема — синтез сверхтяжелых ядер [1–3] — это лишь одна сторона вопроса. Другие стороны, например деление [4–6] и квазиделение [7–9], не менее интересны. Слияние ядер [10–12] также представляет собой интереснейший пример коллективного ядерного движения и дает нам информацию о взаимодействии ядер и их структуре. Теоретический анализ сечений слияния осуществляют разными методами. Один из наиболее реалистичных — метод Хартри—Фока с зависимостью от времени [13–15] — требует огромных затрат компьютерных ресурсов и может быть реализован лишь с существенными ограничениями. В литературе часто используется более упрощенный метод связанных каналов [16–18]. Его преимущество состоит в том, что он позволяет выполнять компьютерные расчеты намного быстрее, чем метод Хартри—Фока с зависимостью от времени, и при этом тоже учитывает структуру сталкивающихся ядер. Однако потенциальная энергия (ПЭ) взаимодействия ядра-снаряда с ядром-мишенью в методе связанных каналов обычно просто параметризуется с помощью хорошо известной формулы Вудса—Саксона, параметры которой варьируются с целью подгонки под экспериментальные сечения слияния при энергиях намного выше барьера. В этом смысле более теоретически обоснованным является метод двойной свертки [19–21], в рамках которого ПЭ $U_{DF}(R)$ вычисляется следующим образом:

$$U_{DF}(R) = \int d\mathbf{r}_P \int d\mathbf{r}_T \rho_{AP}(r_P) \times v_{NN}(|\mathbf{R} - \mathbf{r}_T + \mathbf{r}_P|) \rho_{AT}(r_T). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r}_T и \mathbf{r}_P — радиусы-векторы двух взаимодействующих точек (ядро-мишени и ядра-снаряда соответственно), \mathbf{R} — вектор, соединяющий центры масс ядер, $\rho_{AP}(r_P)$ и $\rho_{AT}(r_T)$ — нуклонные плотности ядер, v_{NN} — эффективный нуклон-нуклонный потенциал. В этой работе мы ограничиваемся случаем сферических сталкивающихся ядер.

Важным ингредиентом модели двойной свертки является нуклонная плотность вещества ядра-снаряда $\rho_{AP}(r_P)$ и ядра-мишени $\rho_{AT}(r_T)$. Расчет этих плотностей в рамках микроскопических моделей, таких как релятивистская модель среднего поля [22] или подход Хартри—Фока [23–25], чрезвычайно трудоемок. Более простой метод, в котором плотности протонов $\rho_Z(r)$ и нейтронов $\rho_N(r)$ параметризуются с помощью формулы Ферми—Дирака (или Вудса—Саксона),

$$\rho_{ZFD}(r) = \rho_{ZC} \left[1 + \exp \left\{ (r - r_{Z0} A^{\frac{1}{3}}) / a_Z \right\} \right]^{-1}, \quad (2)$$

$$\rho_{NFD}(r) = \rho_{NC} \left[1 + \exp \left\{ (r - r_{N0} A^{\frac{1}{3}}) / a_N \right\} \right]^{-1}, \quad (3)$$

был использован в работах [21, 26–28]. Проблема состоит в том, что нуклонную плотность невозможно сравнить с экспериментальными данными. Единственный экспериментальный способ исследовать внутренность ядер состоит в облучении их электронами. Однако в результате получается распределение электрического заряда, а не центров масс нуклонов [29–31]. Это распределение является единственным пересечением теории и эксперимента, и именно его мы намерены использовать для получения упрощенного способа расчета плотности нейтронов и протонов, который может быть легко применен экспериментаторами и при этом является довольно реалистичным. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

^a E-mail: suhareva_om@mail.ru

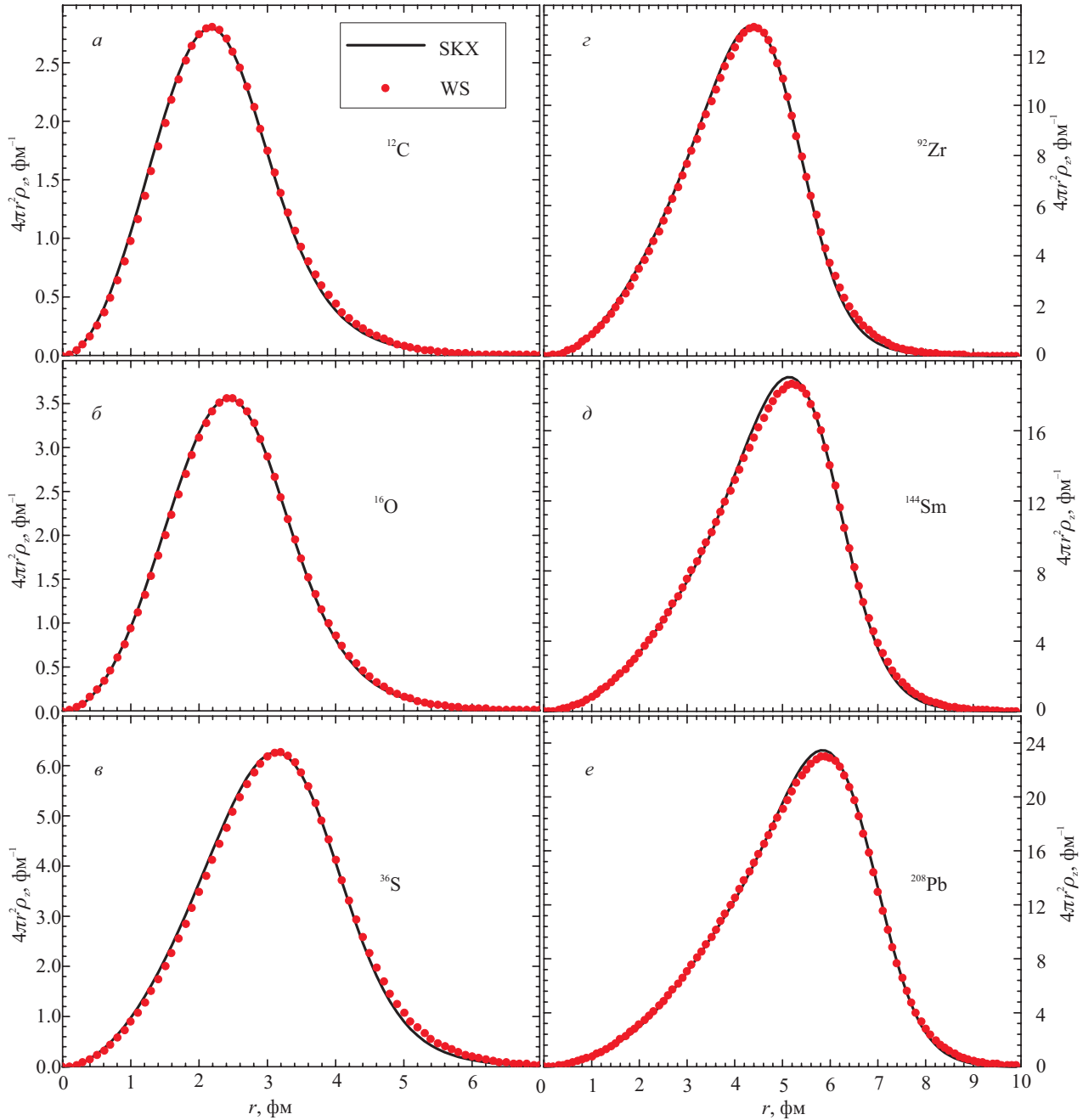


Рис. 1. Зависимость протонных плотностей $4\pi r^2 \rho_Z(r)$ для шести реперных ядер: ^{12}C , ^{16}O , ^{36}S , ^{92}Zr , ^{144}Sm , ^{208}Pb . Черные сплошные линии — плотности, полученные методом Хартри—Фока (SKX), красные круги — результат аппроксимации формулой Вудса—Саксона (WS)

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА В ЯДРАХ

Распределение заряда в сферическом ядре $\rho_q(r)$ как функцию расстояния от центра ядра r можно вычислить, используя метод конволюции [32]:

$$\rho_q(r) = \int d\mathbf{r}_p \rho_Z(r_p) f_p(s_p) + \int d\mathbf{r}_n \rho_N(r_n) f_n(s_n). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{r}_p (\mathbf{r}_n) означает радиус-вектор центра масс протона (нейтрона); $\rho_Z(r_p)$ ($\rho_N(r_n)$) — плотность протонов (нейтронов), $f_p(s_p)$ ($f_n(s_n)$) — распределение заряда внутри протона (нейтрона), $s_p = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$, $s_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|$. Для зарядового распределения внутри

протона мы используем экспоненциальное распределение [33]

$$f_p(s_p) = \frac{1}{(\pi\sigma_p^3)} \exp\left(-\frac{2s_p}{\sigma_p}\right). \quad (5)$$

В формуле (5) $\sigma_p = \frac{R_{qp}}{\sqrt{3}}$, а R_{qp} — экспериментальное значение среднеквадратичного зарядового радиуса протона, $R_{qp} = 0.8791$ фм [30].

Зависимость распределения заряда в нейтроне от расстояния до его центра приведена на рис. 4.15 в [34]. Это распределение хорошо описывается формулой

$$f_n(s_n) = \frac{\langle R_n^2 \rangle}{192\pi\sigma_n^6} (s_n - 3\sigma_n) \exp\left(-\frac{s_n}{\sigma_n}\right). \quad (6)$$

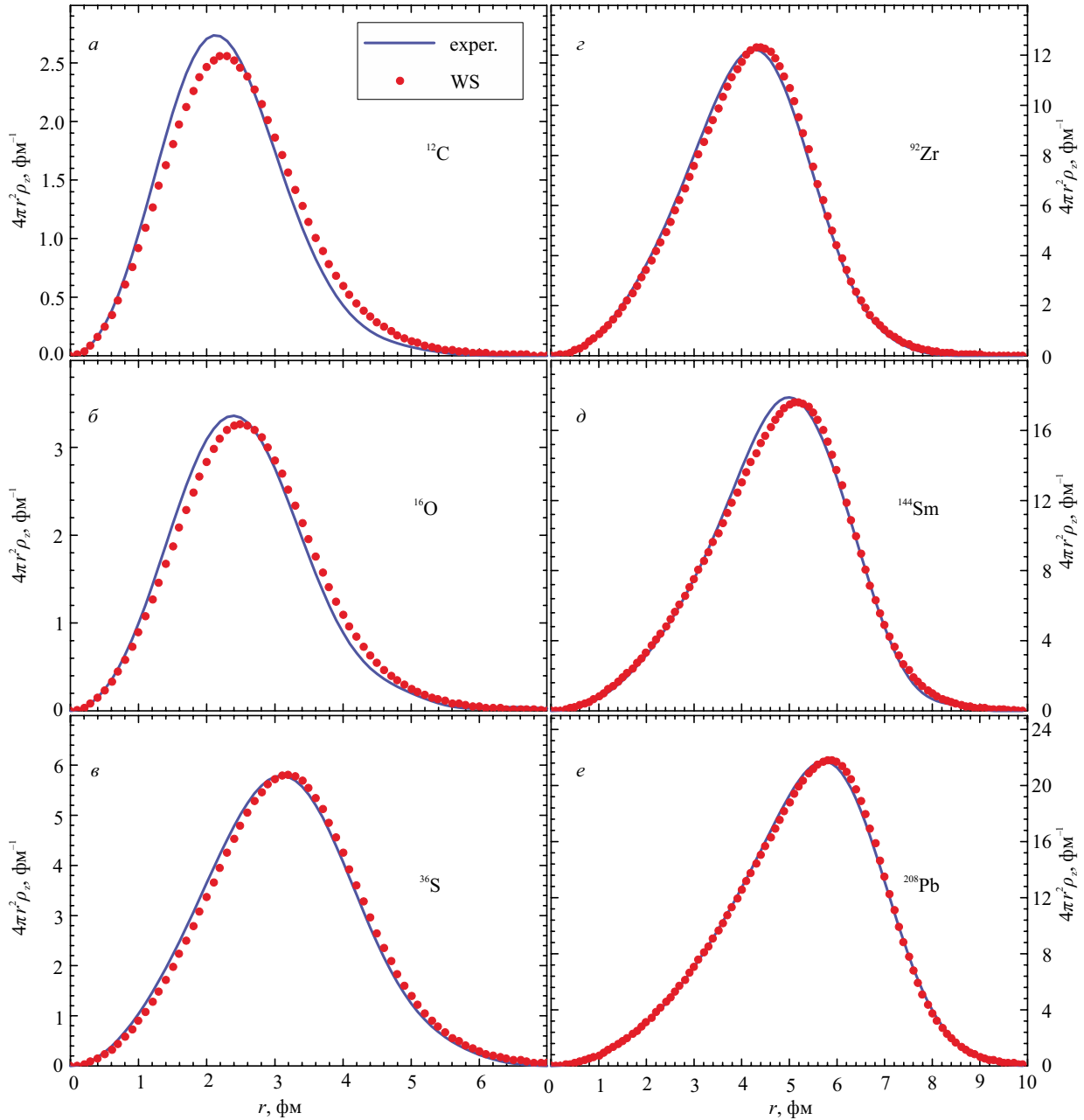


Рис. 2. Зависимость зарядовых плотностей $4\pi r^2 \rho_q(r)$ для шести реперных ядер: ^{12}C , ^{16}O , ^{36}S , ^{92}Zr , ^{144}Sm , ^{208}Pb . Синие сплошные линии — экспериментальные данные (exper.), красные круги — результат аппроксимации формулой Вудса—Саксона (WS)

В формуле (6) $\langle R_n^2 \rangle = -0.1149 \text{ фм}^2$ — экспериментальный средний квадрат зарядового радиуса нейтрона [30], а $\sigma_n = 0.22 \text{ фм}$.

Для плотностей нейтронов и протонов мы используем результаты [24], полученные с помощью модели Хартри—Фока с набором параметров SKX [35] (HF SKX) для следующих строго сферических ядер: ^{16}O ($Z = 8$, $N = 8$), ^{36}S ($N = 20$), ^{92}Zr ($N = 50$), ^{144}Sm ($N = 82$), ^{208}Pb ($Z = 82$, $N = 126$) (в скобках указаны заполненные оболочки, благодаря которым ядра приобретают сферическую форму). К этому набору мы добавили ядро ^{12}C , для которого в обзоре [29] и работе [20] приведены экспериментальные зависимости $\rho_q(r)$, что указывает на его сферическую форму. В пользу его сферичности также говорит спектр низколежащих состояний [36, 37].

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ПРОФИЛЕМ ВУДСА—САКСОНА (WS)

На первом этапе мы ставим своей целью аппроксимировать плотности, полученные в [24] с помощью HF SKX, профилем Вудса—Саксона (2), (3), варьируя параметры ρ_{ZC} (ρ_{NC}), r_{Z0} (r_{N0}), a_Z (a_N). Алгоритм нахождения этих параметров следующий. В массиве значений протонной плотности, вычисленной с помощью HF SKX, мы находим максимальное значение $\rho_{Z \max}$. Оно служит заправкой для итерационного процесса нахождения $\rho_{ZC \text{ WS}}$. Для начального значения параметра $R_{Z \text{ WS}} = r_{Z0 \text{ WS}} A^{1/3}$ мы используем значение r , при котором $\rho_Z \approx \rho_{Z \max}/2$; обозначим его r_d . Затем мы находим численно производную $d\rho_Z/dr$ при r_d . Легко показать, что

$$\frac{d\rho_{Z \text{ WS}}}{dr}(r_d) \approx -\frac{\rho_{ZC \text{ WS}}}{4a_Z \text{ WS}}. \quad (7)$$

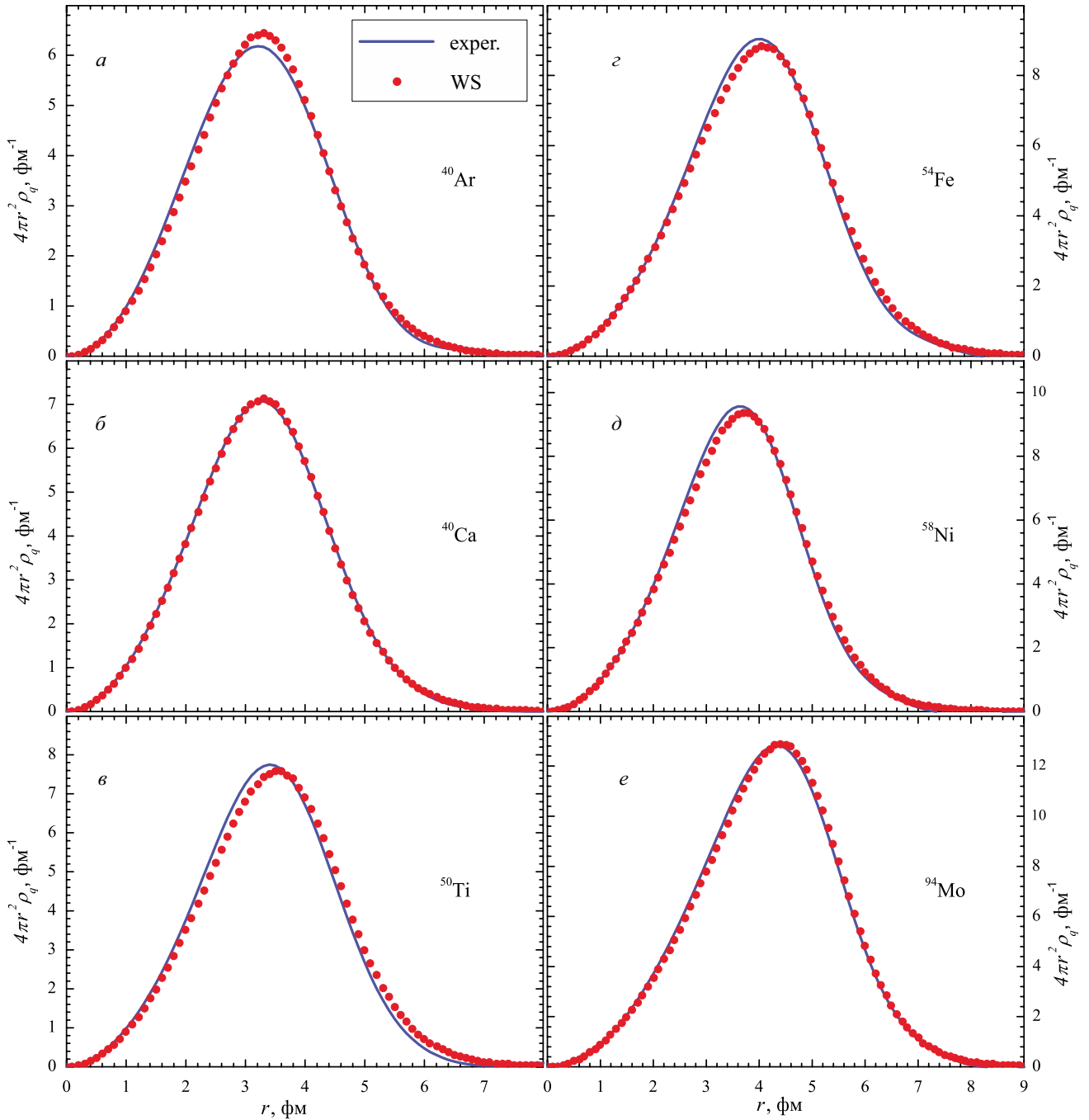


Рис. 3. Зависимость интерполированных зарядовых плотностей $4\pi r^2 \rho_q(r)$ для шести сферических незловых ядер: ^{40}Ar , ^{40}Ca , ^{50}Ti , ^{54}Fe , ^{58}Ni , ^{94}Mo . Синие сплошные линии — экспериментальные данные (exper.), красные круги — результат аппроксимации формулой Вудса—Саксона (WS) с интерполированными параметрами

В формуле (7) знак приближенного равенства обусловлен тем, что плотности, полученные с помощью HF SKX, вычислены на сетке.

Далее мы выполняем итерации, постепенно уменьшая значение $\rho_{Z\text{WS}}$ на 0.1% на каждом шаге и проверяя нормировку $\rho_{Z\text{WS}}(r_p)$

$$Z = \int dr_p \rho_{Z\text{WS}}(r). \quad (8)$$

Окончательные значения $\rho_{Z\text{WS}}$, $r_{Z0\text{WS}}$ и $a_{Z\text{WS}}$ соответствуют минимальной разности между правой и левой частями формулы (8). Такая же процедура применяется для нахождения параметров плотности нейтронов (3).

Результаты применения этой процедуры иллюстрируются рис. 1, на котором протонные плотности, полученные при аппроксимации, сравниваются с HF SKX-плотностями. Мы выбрали именно такое представление $(4\pi r^2 \rho_Z(r))$, так как именно такая комбинация фактически входит в интегралы (1), (4), а поведение плотностей в центре ядра играет малую роль. Отличие же плотностей при больших расстояниях в таком представлении оказывается усиленным, что отвечает важной роли «хвостов» плотностей в формуле (1). Рис. 1 показывает, что для всех шести реперных ядер согласие аппроксимирующих плотностей (WS) с микроскопическими (HF SKX) плотностями очень хорошее. Аналогичный вид имеют нейтронные плотности. Параметры плот-

Таблица. WS-параметры плотностей протонов (нейтронов) для шести реперных ядер. Количество значащих цифр соответствует 0.1%-й вариации $\rho_{ZC WS}$ и $\rho_{NC WS}$

Ядро	^{12}C	^{16}O	^{36}S	^{92}Zr	^{144}Sm	^{208}Pb
$\rho_{ZC WS}, \text{фм}^{-3}$	0.0814	0.0752	0.0706	0.0680	0.0659	0.0611
$r_{Z0 WS} A^{1/3}, \text{фм}$	2.31	2.68	3.56	5.02	5.93	6.70
$a_{Z WS}, \text{фм}$	0.469	0.468	0.482	0.489	0.474	0.475
$\rho_{NC WS}, \text{фм}^{-3}$	0.0827	0.0763	0.0830	0.0852	0.0837	0.0878
$r_{N0 WS} A^{1/3}, \text{фм}$	2.30	2.67	3.63	5.08	6.00	6.84
$a_{N WS}, \text{фм}$	0.465	0.463	0.496	0.501	0.493	0.517

ностей (2), (3), при которых достигается наилучшее согласие с HF SKX-плотностями, приведены в таблице.

Сравним теперь зарядовые плотности, полученные с WS-параметрами, с экспериментальными данными. Последние описываются формулой (так называемый анализ Фурье—Бесселя) [29]

$$\rho_{q FB}(r) = \begin{cases} \sum_k b_k j_0 \left(\frac{k\pi r}{r_{cut}} \right), & r < r_{cut}, \\ 0, & r \geq r_{cut}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь r_{cut} — параметр обрезания, $j_0(x)$ — сферическая функция Бесселя нулевого порядка, коэффициенты b_k представлены в [29]. Сравнение зарядовых WS-плотностей с экспериментальными на рис. 2 также свидетельствует о хорошем качестве описания.

Метод, который мы предлагаем для нахождения нуклонных плотностей произвольных сферических ядер, состоит в линейной интерполяции параметров r_{Z0} , r_{N0} , a_Z , a_N как функций зарядового числа ядра по узловым значениям, приведенным в таблице. После того как диффузности и параметры радиусов найдены, значения параметров ρ_{ZC} и ρ_{NC} определяются из условий нормировки.

В литературе часто формулой Вудса—Саксона аппроксимируют не протонную и нейтронную плотности по отдельности, а суммарную плотность нуклонов, так как только она и нужна для расчета ядерной части ядро-ядерного потенциала [26, 28, 38]. Сравнение значений параметров $\rho_{Z WS}(r_p)$ и $\rho_{N WS}(r_n)$ из таблицы показывает, что различие может достигать 8% (для свинца), так что к такой «суммарной» аппроксимации следует относиться с осторожностью.

Сравним теперь зарядовые плотности $\rho_{q WS}(r)$ неузловых ядер ^{40}Ar , ^{40}Ca , ^{50}Ti , ^{54}Fe , ^{58}Ni , ^{94}Mo , полученные с помощью интерполяции и конволюции (4), с экспериментальными зарядовыми плотностями из [29], рассчитанными по формуле (9). Это сравнение представлено на рис. 3. Согласие WS-плотностей с экспериментальными представляется нам удовлетворительным во всех случаях.

Основной количественной характеристикой плотности заряда является среднеквадратичный зарядовый радиус ядра r_q . Для некоторых сферических ядер эта величина, полученная с помощью нашей WS-процедуры $r_{q WS}$, сравнивается с экспериментальными значениями из [30] $r_{q exp}$ на рис 4, а.

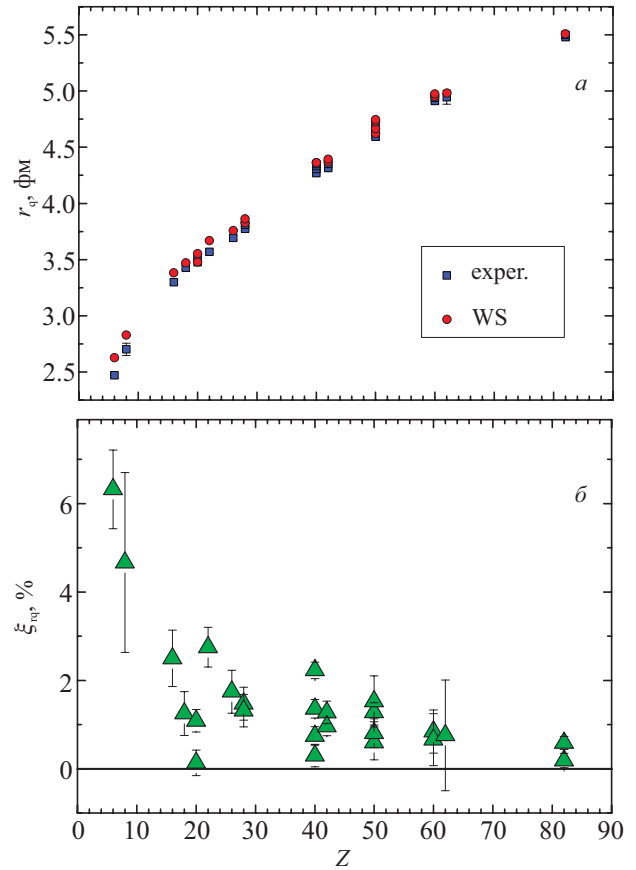


Рис. 4. Среднеквадратичный зарядовый радиус ядра r_q для некоторых сферических ядер в зависимости от зарядового числа Z . *a* — абсолютные значения (красные круги — значения, полученные с помощью WS-процедуры, синие квадраты — экспериментальные значения [30]), *б* — относительная разность, вычисленная по формуле (10)

Количественно это сравнение удобно проиллюстрировать с помощью относительной разности

$$\xi_{r_q} = \frac{r_{q WS}}{r_{q exp}} - 1, \quad (10)$$

значения которой показаны на рис 4, б. В целом согласие с экспериментом неплохое: только для двух ядер (^{12}C и ^{16}O) относительная разность превышает 4%. То обстоятельство, что всюду $\xi_{r_q} > 0$ (а в большинстве случаев и больше 1%), указывает на возможность улучшения нашей параметризации в будущем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Зависимость плотности нуклонов в сферических ядрах от расстояния до центра ядра требуется для вычисления различных характеристик самих ядер и их взаимодействия. Расчет этих плотностей в микроскопических подходах весьма трудоемок. В литературе часто эти плотности аппроксимируют профилем Вудса—Саксона. Однако при этом остается значительный произвол в параметрах этого профиля (радиус половинной плотности $r_0 A^{1/3}$ и диффузность a).

В настоящей работе мы аппроксимировали результаты расчетов нейтронных и протонных плотностей в микроскопическом подходе Хартри—Фока с SKX-параметрами формулой Вудса—Саксона для шести

реперных ядер (WS-аппроксимация). Оказалось, что зарядовые плотности реперных ядер, полученные конволюцией (4) на основе WS-аппроксимации, хорошо согласуются с экспериментальными. Параметры такого профиля для протонов $r_{Z0}A^{1/3}$, a_Z и нейтронов $r_{N0}A^{1/3}$, a_N для любых сферических ядер находятся теперь с помощью линейной интерполяции. Мы показали, что для многих сферических ядер такой подход приводит к среднеквадратичному зарядовому радиусу, который превышает экспериментальный примерно на 2%. Исключение составляют ядра ^{12}C и ^{16}O , для которых это превышение около 5%. Нам представляется, что наш алгоритм может быть полезен другим исследователям для быстрых и довольно точных расчетов, так как он устраняет неопределенности в параметрах профиля Вудса—Саксона для плотностей нуклонов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Oganesian Y. T., Utyonkov V. K. // *Reports Prog. Phys.* 2015. **78**. P. 36301.
- Back B. B., Esbensen H., Jiang C. L., Rehm K. E. // *Rev. Mod. Phys.* 2014. **86**. P. 317.
- Jacquet D., Morjean M. // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2009. **63**. P. 155.
- Fröbrich P., Gontchar I. I. // *Phys. Rep.* 1998. **292**. P. 131.
- Schunck N., Robledo L. M. // *Reports Prog. Phys.* 2016. **79**. P. 116301.
- Andreyev A. N., Nishio K., Schmidt K.-H. // *Reports Prog. Phys.* 2018. **81**.
- Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W. // *Phys. Rev. C* 2003. **68**. P. 034601.
- Schmitt C., Mazurek K., Nadtochy P. N. // *Phys. Rev. C* 2019. **100**. P. 64606.
- Hammerton K., Morrissey D. J., Kohley Z. et al. // *Phys. Rev. C* 2019. **99**. P. 54621.
- Dasgupta M., Hinde D. J., Rowley N., Stefanini A. M. // *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1998. **48**. P. 401.
- Hudan S., deSouza R. T., Umar A. S. et al. // *Phys. Rev. C* 2020. **101**. P. 61601.
- Montagnoli G., Stefanini A. M., Jiang C. L. et al. // *Phys. Rev. C* 2020. **101**. P. 44608.
- Yilmaz B., Ayik S., Lacroix D., Yilmaz O. // *Phys. Rev. C* 2014. **90**. P. 24613.
- Maruhn J. A., Reinhard P.-G., Stevenson P. D., Strayer M. R. // *Phys. Rev. C* 2006. **74**. P. 27601.
- Benrabia K., Medjadi D. E., Imadalou M., Quentin P. // *Phys. Rev. C* 2017. **96**. P. 34320.
- Hagino K., Rowley N., Kruppa A. T. // *Comput. Phys. Commun.* 1999. **123**. P. 143.
- Загребав В. И., Самарин В. В. // *Ядерная физика*. 2004. **67**. С. 1.
- Jacobs P. M., Smilansky U. // *Phys. Lett. B* 1983. **127**. P. 313.
- Satchler G. R., Love W. G. // *Phys. Rep.* 1979. **55**. P. 183.
- Khoa D. T. // *Phys. Rev. C* 2001. **63**. P. 034007.
- Загребав В. И., Карнов А. В., Арутомо Я. и др. // *ЭЧАЯ*. 2007. **38**. С. 893.
- Negele J. W. // *Rev. Mod. Phys.* 1982. **54**. P. 913.
- Gontchar I. I., Bhattacharya R., Chushnyakova M. V. // *Phys. Rev. C* 2014. **89**. P. 034601.
- Chushnyakova M. V., Bhattacharya R., Gontchar I. I. // *Phys. Rev. C* 2014. **90**. P. 017603.
- Bhattacharya R. // *Nucl. Phys. A* 2013. **913**. P. 1.
- Chushnyakova M. V., Gontchar I. I. // *Phys. Rev. C* 2013. **87**. P. 014614.
- Gontchar I. I., Hinde D. J., Dasgupta M. et al. // *Phys. Rev. C* 2006. **73**. P. 034610.
- Adamian G. G., Antonenko N. V., Jolos R. V. et al. // *Int. J. Mod. Phys. E* 1996. **5**. P. 191.
- De Vries H., De Jager C. W., De Vries C. // *At. Data Nucl. Data Tables*. 1987. **36**. P. 495.
- Angeli I. // *At. Data Nucl. Data Tables*. 2004. **87**. P. 185.
- Cooper T., Bertozzi W., Heisemberg J. et al. // *Phys. Rev. C* 1976. **13**. P. 1083.
- Lojewski Z., Nerlo-Pomorska B., Pomorski K., Dudek J. // *Phys. Rev. C* 1995. **51**. P. 601.
- Hofstadter R., Bumiller F., Yearian M. R. // *Rev. Mod. Phys.* 1958. **30**. P. 482.
- Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П. *Частицы и атомные ядра*. М.: Издательство ЛКИ, 2007.
- Brown B. A. // *Phys. Rev. C* 1998. **58**. P. 220.
- <http://nrv.jinr.ru/nrv/webnrv/map/>
- <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
- Sargsyan V. V., Grigoryev S. Y., Adamian G. G., Antonenko N. V. // *Comput. Phys. Commun.* 2018. **233**. P. 145.

A Simple Method for Evaluating the Nucleon Densities of Atomic Nuclei Based on Microscopic Charge Densities

M. V. Chushnyakova¹, I. I. Gontchar², O. M. Sukhareva^{1,a}

¹Department of Physics, Omsk State Technical University. Omsk 644050, Russia.

²Department of Physics and Chemistry, Omsk State Transport University. Omsk 644046, Russia.

E-mail: ^asuhareva_om@mail.ru.

Nuclear fusion is an interesting example of collective nuclear motion; this process provides information on the interaction of nuclei and their structure. Theoretical analysis of fusion cross sections is often based on the double folding model, which is used for calculation of the potential energy of the interaction between colliding nuclei (nucleus—nucleus potential). The nucleon density is an important ingredient of this model. Calculation of this density in the framework of microscopic models is extremely cumbersome. In this paper, we propose a simplified method for calculating the neutron and proton densities based on microscopic densities of six reference nuclei. This method allows one to obtain nucleon densities with minimal computer resources and can be easily used by experimenters.

Keywords: fusion of atomic nuclei, double folding model, nucleon density, charge distribution in a nucleus.

PACS: 21.10.Ft.

Received 28 October 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 1. Pp. 9–14.

Сведения об авторах

- Чушнякова Мария Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (3812) 65-22-92, e-mail: maria.chushnyakova@gmail.com.
- Гончар Игорь Иванович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (3812) 31-53-68, e-mail: vigichar@hotmail.com.
- Сухарева Ольга Михайловна — ст. преподаватель; тел.: (3812) 65-22-92, e-mail: suhareva_om@mail.ru.