СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Оценка кусочно-постоянных сигналов по регистрации их измерений в линейной схеме

Н. Г. Михеев,[a] А. И. Чуличков, В. А. Антонюк

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математического моделирования и информатики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 27.02.2020, после доработки 10.01.2021, принята к публикации 18.01.2021.

В работе предлагается метод и алгоритм восстановления кусочно-постоянных сигналов по результатам регистрации приборами, действие которых описывается линейным оператором размытия и добавлением шума. Вид линейного преобразования и статистические свойства шума известны. Число уровней кусочно-постоянного сигнала также считается заданным. Проведено исследование зависимости точности восстановления кусочно-постоянного сигнала от числа возможных принимаемых значений.

Ключевые слова: восстановление сигналов, оптимальное оценивание, математическая модель измерения, редукция измерения.
УДК: 51-73, 519.25. PACS: 02.60.Gf.

ВВЕДЕНИЕ

В современных экспериментальных исследованиях часто возникает задача, в которой параметры изучаемого объекта не могут измеряться непосредственно, и для оценки этих параметров используются математические методы. Схему таких измерений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi} = A\mathbf{f} + \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — искаженный погрешностью $\boldsymbol{\nu}$ результат измерения выходного сигнала $A\mathbf{f}$ измерительного прибора A, на вход которого подан сигнал $\mathbf{f}$.

Задача состоит в оценивании сигнала $\mathbf{f}$ по данным измерений $\boldsymbol{\xi}$, математической модели измерительного прибора A и модели погрешности $\boldsymbol{\nu}$. В ряде случаев исследователя интересует оценка не самого сигнала $\mathbf{f}$, а некоторой известной функции от $\mathbf{f}$. Такие задачи возникают, например, при томографии [1], в спектроскопии [2] и при восстановлении изображений [3].

Задачи такого типа часто относят к обратным задачам математической физики, для их решения применяют различные методы регуляризации [4–9]. В задачах, где сигнал $\mathbf{f}$ является кусочно-непрерывным или может содержать участки, близкие по своему характеру к разрывам, применяются специальные методы регуляризации [10]. Эти методы предназначены для придания устойчивости оценкам и, как правило, не сопровождаются контролем погрешности решения. В методах теории измерительно-вычислительных систем [11–13] исследуемые параметры оцениваются так, чтобы их точность была максимальна. Кроме того, методы теории измерительно-вычислительных систем позволяют контролировать согласие используемой математической модели измерения с реальными данными, при этом частью модели измерения является и модель измеряемого объекта [14]. Параметр, контролирующий это согласие, называется надежностью модели [15, 16].

Как в первой группе методов, так и во второй важную роль играет дополнительная информация о классе измеряемых сигналов [17–20]. Один из способов учета априорной информации состоит в приближении входного сигнала измерительного прибора кусочно-постоянными функциями [21–24]. Такие подходы перспективны, например, при восстановлении объемной структуры керна, поры которого заполнены несколькими видами жидкостей и газом.

Для того, чтобы учесть априорную информацию о кусочно-постоянной структуре сигнала $\mathbf{f}$, воспользуемся методом максимальной надежности в следующей модификации. Будем считать неизвестным параметром модели измерения (1) именно модель кусочно-постоянного сигнала и согласие модели с результатом измерения контролировать величиной невязки $\|\xi - Af\|^2$.

В настоящей работе развиваются методы, предложенные в работах [23] и [24]. Оценка сигнала $\mathbf{f}$ производится в два этапа: на первом этапе выбирается разбиение поля зрения на области постоянства сигнала $\mathbf{f}$, на втором выбирается оценка значений сигнала $\mathbf{f}$ на этих областях.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ

Все сигналы в (1) будем рассматривать как функции, заданные на равномерной сетке, состоящей из конечного числа узлов $\{x_k, k = 1, \ldots, N\}$. Тем самым все сигналы будут считаться элементами арифметического евклидова пространства R^N, любой элемент $\mathbf{g} \in R^N$ задан своими координатами: $\mathbf{g} = \{g_1, \ldots, g_N\}$, i-я координата g_i вектора $\mathbf{g} \in R^N$ интерпретируется как значение функции $g(\cdot)$ в i-м узле x_i, $g_i = g(x_i)$. Линейные преобразования этих векторов задаются матрицами. Таким образом, в математической модели схемы измерения (1) $\mathbf{f}, \boldsymbol{\xi}, A\mathbf{f}, \boldsymbol{\nu} \in R^N$. Вектор $\mathbf{f} \in R^N$ — неизвестный входной сигнал измерительного прибора A, оценку которого требуется получить; $A : R^N \to R^N$ —

[a] E-mail: ng.mikheev@physics.msu.ru

линейное преобразование, заданное матрицей размера $N \times N$. Погрешность $\boldsymbol{\nu}$ есть гауссов случайный вектор R^N с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ; для простоты будем считать $\Sigma = \sigma^2 I$, I — матрица тождественного преобразования, таким образом, $\boldsymbol{\nu} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 I\right)$.

Информацию о том, что сигнал $\mathbf{f}$ в (1) является кусочно-постоянным, учтем следующим образом. Пусть известно, что координаты вектора $\mathbf{f}$ принимают не более чем m значений $\{c_1, \ldots, c_m\}$, $m \ll N$; c_j, $j = 1, \ldots, m$, могут быть любыми и какие координаты вектора $\mathbf{f}$ принимают значения c_j, априори неизвестно. Формально это можно записать в виде

$$\mathbf{f} = X\mathbf{c}, \tag{2}$$

считая, что вектор $\mathbf{c} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ есть элемент m-мерного арифметического пространства R^m. Здесь X — матрица размера $N \times m$, задающая линейное преобразование пространства R^m в R^N. В каждой строке такой матрицы ровно один элемент принимает значение 1, остальные матричные элементы строки равны 0. Класс таких матриц обозначим $\mathcal{X}$.

Областью постоянства значений сигнала $\mathbf{f}$ будем считать максимальный по включению набор $\{k_1, \ldots, k_n\}$ идущих подряд номеров координат, для которых $f_{k_1} = \cdots = f_{k_n}$, или, в соответствии с принятой интерпретацией координат, набор узлов $\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\}$ равномерной сетки, для которых $f(x_{k_1}) = \cdots = f(x_{k_n})$, номера k_1 и k_n назовем границами, а число номеров в наборе — длиной области постоянства. В частности, если $f_{i-1} \neq f_i \neq f_{i+1}$, то соответствующая область постоянства значений сигнала $\mathbf{f}$ состоит из единственного номера $\{i\}$.

Будем считать, что выходной сигнал $A\mathbf{f}$ связан с входным $\mathbf{f}$ сверткой с известной аппаратной функцией $a(\cdot) : R^1 \to R^1$, так что для дискретного представления сигналов справедливо

$$\xi_i = \sum_{k=-K}^{K} a_k f_{i-k} + \nu_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

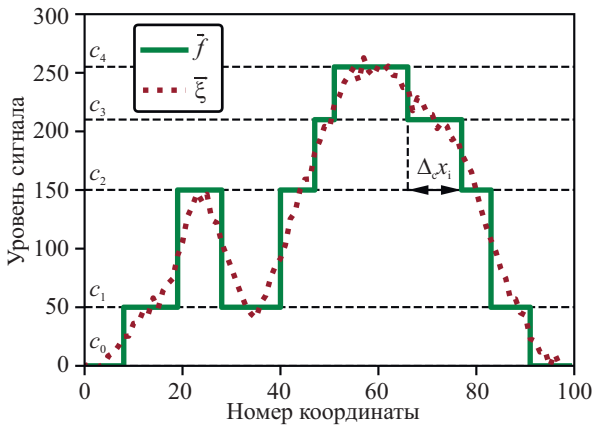

Рис. 1. Исходный кусочно-постоянный сигнал $\mathbf{f}$ и сигнал $\boldsymbol{\xi}$, полученный в результате измерения сигнала $\mathbf{f}$ прибором с гауссовой аппаратной функцией при наличии шума $\boldsymbol{\nu}$; c_i — уровни, которые может принимать исходный сигнал $\mathbf{f}$; $\Delta_c x_i$ — отрезок постоянства уровня сигнала $\mathbf{f}$

здесь $a_k = a(x_k)$, $k = 1, \ldots, K$, $2K + 1 \leqslant N$, $a(x_0) = a(0)$, $a(x_k) = a(-x_k)$ при $k = -K, \ldots, -1$, а f_i в (3) и далее равны нулю при $i \leqslant 0$ и при $i > N$. С учетом класса возможных сигналов $\mathbf{f}$, заданных в (2), соотношение (3) запишем в виде

$$\boldsymbol{\xi} = AX\mathbf{c} + \boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

матричные элементы матрицы A определены соотношением (3):

$$A_{ij} = \begin{cases} a_{i-j}, & |i-j| \leqslant K, \\ 0, & |i-j| > K. \end{cases}$$

Матрица преобразования AX имеет размер $N \times m$. Пример кусочно-постоянного сигнала $\mathbf{f} = X\mathbf{c}$ и результат измерения $\boldsymbol{\xi}$, полученного по формуле (4), изображены на рис. 1 в виде зависимости значения координат векторов от их номеров.

2. ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ВХОДНОГО СИГНАЛА

В теории измерительно-вычислительных систем надежностью модели измерения (1) при $\boldsymbol{\nu} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ является монотонно убывающая функция квадрата нормы $\|\boldsymbol{\xi} - A\mathbf{f}\|^2$; с учетом (4) $\|\boldsymbol{\xi} - A\mathbf{f}\|^2 = \|\boldsymbol{\xi} - AX\mathbf{c}\|^2$ [12]. Поэтому оценку максимальной надежности $\hat{f} = \hat{X}\hat{c}$ сигнала $\mathbf{f}$ определим как решение задачи

$$(\hat{X}, \hat{\mathbf{c}}) = \arg \inf_{X \in \mathcal{X}, \mathbf{c} \in R^m} \|\boldsymbol{\xi} - AX\mathbf{c}\|^2. \tag{5}$$

Вектор $\mathbf{q} = \boldsymbol{\xi} - AX\mathbf{c}$ можно представить в виде суммы двух ортогональных слагаемых, одно из них является проекцией $\mathbf{q}$ на пространство $R(AX)$ значений матрицы AX, а второе — проекцией на ортогональное дополнение к $R(AX)$. Эти проекции можно записать через матрицу $(AX)^- : R^N \to R^m$, псевдообратную матрице AX: ортогональная проекция любого вектора $\mathbf{z} \in R^N$ на $R(AX)$ есть $AX(AX)^-\mathbf{z}$. Обозначив $\Pi_X = AX(AX)^-$ ортогональный проектор на $R(AX)$ и учтя, что $AX(AX)^-AX = AX$ и $(I - \Pi_X)AX\mathbf{c} = 0$ для любого $\mathbf{c}$, получим $\mathbf{q} = \Pi_X(\boldsymbol{\xi} - AX\mathbf{c}) + (I - \Pi_X)\boldsymbol{\xi}$. Здесь второе слагаемое справа зависит только от неизвестного X, а первое — от X и $\mathbf{c}$.

Теперь задачу (5) можно переписать в виде

$$(\hat{X}, \hat{\mathbf{c}}) = \arg \inf_{X \in \mathcal{X}, \mathbf{c} \in R^m} \|\Pi_X(\boldsymbol{\xi} - AX\mathbf{c})\|^2 + \\ + \|(I - \Pi_X)\boldsymbol{\xi}\|^2.$$

Ее приближенное решение предлагается получить в два этапа.

На первом этапе строится оценка $X \in \mathcal{X}$ как решение задачи на минимум:

$$\hat{X} = \arg \inf_{X \in \mathcal{X}} \|(I - \Pi_X)\boldsymbol{\xi}\|^2. \tag{6}$$

С геометрической точки зрения эта задача состоит в выборе такого преобразования $\hat{X} \in \mathcal{X}$, при котором пространство значений матрицы AX наиболее близко к вектору $\boldsymbol{\xi}$.

На втором этапе при заданном $X = \hat{X}$ строится оценка $\hat{\mathbf{c}}$ вектора $\mathbf{c}$ как решение задачи

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \inf_{\mathbf{c} \in R^m} \|\Pi_{\hat{X}}(\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}\mathbf{c})\|^2. \qquad (7)$$

Заметим, что

$$\|\Pi_{\hat{X}}(\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}\mathbf{c})\|^2 = \|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}\mathbf{c}\|^2 - \|(I - \Pi_{\hat{X}})\boldsymbol{\xi}\|^2,$$

и, поскольку второе слагаемое справа не зависит от $\mathbf{c}$, задача (7) имеет то же решение, что и задача на минимум:

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \inf_{\mathbf{c} \in R^m} \|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}\mathbf{c}\|^2,$$

которая в силу теоремы Гаусса—Маркова эквивалентна задаче построения наилучшей в среднем квадратичном (с. к.) линейной оценки вектора $\mathbf{c}$ при заданном $A\hat{X}$. Решением этой задачи является $\hat{\mathbf{c}} = (A\hat{X})^{-}\boldsymbol{\xi}$, при этом с. к. погрешность этой оценки равна $M\|\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}\|^2 = \sigma^2 \operatorname{tr}((A\hat{X})^T(A\hat{X}))^{-}$, здесь M — знак математического ожидания, $(\cdot)^T$ — знак транспонирования, $\operatorname{tr} Q$ — след матрицы Q.

С формальной точки зрения задача (6) может иметь не единственное решение, тогда необходим выбор решения исходя из дополнительных априорных соображений, о которых речь пойдет ниже. Задача (7) имеет единственное решение при любом $A\hat{X}$ [12].

Заметим, что $(I - \Pi_{\hat{X}})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} - A\hat{X}\hat{\mathbf{c}}$, поэтому приближенное решение задачи (6) можно получить в итерационной процедуре, в которой задается нулевое приближение $\hat{\mathbf{c}}^{(0)}$ для вектора $\hat{\mathbf{c}}$ и $\hat{X}^{(0)} \in \mathcal{X}$ матрицы $\hat{X}$, далее происходит уточнение значений $\hat{\mathbf{c}}$ решением задачи

$$\hat{\mathbf{c}}^{(k)} = \arg \inf_{\hat{\mathbf{c}} \in R^m} \|\xi - A\hat{X}^{(k-1)}\hat{\mathbf{c}}\|^2 \qquad (8)$$

и уточнение значений $\hat{X}$ решением задачи

$$\hat{X}^{(k)} = \arg \inf_{\hat{X} \in \mathcal{X}} \|\xi - A\hat{X}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}\|^2, \qquad (9)$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Эта итерационная процедура является сходящейся, т. к. на каждом шаге не возрастает минимизируемый функционал, ограниченный снизу.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

В этом разделе статьи описан метод выбора областей постоянства сигнала f и оценки значений сигнала в этих областях. Для удобства выбора начального приближения использовалась модель, в которой оператор A осуществляет «размытие» сигнала f.

Поиск оптимальной пары оценок $(\hat{X}, \hat{\mathbf{c}})$ начинается с построения начального приближения $(\hat{X}^{(0)}, \hat{\mathbf{c}}^{(0)})$. Далее итерационным методом производится уточнение оценок. Каждая итерация состоит из двух шагов. На первом шаге производится уточнение оценки $\hat{\mathbf{c}}^{(k)}$ при фиксированной оценке $\hat{X}^{(k)}$, на втором — уточнение $\hat{X}^{(k)}$ при фиксированной оценке $\hat{\mathbf{c}}^{(k)}$.

3.1. Начальное приближение

В качестве начального приближения $\hat{\mathbf{c}}^{(0)}$ вектора уровней $\mathbf{c}$ можно взять равномерное разбиение области значений координат вектора $\boldsymbol{\xi}$ на m равных областей и использовать центры полученных областей в качестве начальных уровней c_j:

$$I_{\max} = \max_{i \in \{1,\ldots,N\}} \xi_i,$$
$$I_{\min} = \min_{i \in \{1,\ldots,N\}} \xi_i,$$
$$\hat{c}_j^{(0)} = I_{\min} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{m}\left(j - \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Начальное приближение $\hat{X}^{(0)}$ матрицы X строится таким образом, чтобы значения сигнала $\hat{\mathbf{f}}$ в точках x_i, т.е. $\hat{\mathbf{f}}_i^{(0)} = \left(\hat{X}^{(0)}\hat{\mathbf{c}}^{(0)}\right)_i$, были максимально близки к соответствующим измеренным точкам ξ_i:

$$\hat{X}_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & j = \operatorname{argmin}_{j' \in \{1,\ldots,m\}} \left|\xi_i - \hat{c}_{j'}^{(0)}\right|, \\ 0, & j \neq \operatorname{argmin}_{j' \in \{1,\ldots,m\}} \left|\xi_i - \hat{c}_{j'}^{(0)}\right|, \end{cases}$$
$$i = 1, \ldots, N. \qquad (10)$$

Если при некотором i минимум в задаче $\min_{j' \in \{1,\ldots,m\}} \left|\xi_i - \hat{c}_{j'}^{(0)}\right|$ достигается при двух соседних значениях j' и $j' + 1$, то в первой строчке формулы (10) будем выбирать значение $\hat{X}_{ij'}^{(0)} = 1$, $\hat{X}_{i(j'+1)}^{(0)} = 0$.

3.2. Вычисление оценки вектора уровней $\hat{\mathbf{c}}^{(k)}$

Если заданы значения $\hat{\mathbf{c}}^{(k-1)}$ и $\hat{X}^{(k-1)}$, то на первом шаге k-й итерации происходит уточнение значений уровней сигнала $\hat{\mathbf{f}}$ решением задачи (8):

$$\hat{\mathbf{c}}^{(k)} = \left(A\hat{X}^{(k-1)}\right)^{-}\boldsymbol{\xi}.$$

3.3. Коррекция оценки матрицы распределения уровней $\hat{X}^{(k)}$

На втором шаге k-й итерации происходит уточнение оценки областей постоянного значения сигнала $\hat{\mathbf{f}}$ путем коррекции матрицы $\hat{X}^{(k)}$. Коррекция проводится так, чтобы значение функционала, минимизируемого в (9), не возрастало при замене $\hat{X}^{(k-1)}$ на $\hat{X}^{(k)} = \hat{X}^{(k-1)} + \delta\hat{X}^{(k-1)}$:

$$\left\|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}^{(k)}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}\right\|^2 \leqslant \left\|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}^{(k-1)}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}\right\|^2, \quad \hat{X}^{(k)} \in \mathcal{X}. \qquad (11)$$

Здесь $\delta\hat{X}$ — изменение оценки матрицы $\hat{X}$ на k-й итерации, далее называемое вариацией. В настоящей работе выбор вариаций $\delta\hat{X}^{(k-1)}$ производится из некоторого набора базовых вариаций, специально подобранных из дополнительных предположений о возможной форме областей постоянного значения сигнала $\mathbf{f}$. Эти предположения состоят в следующем.

1. Значение сигнала $\mathbf{f}$ в каждом узле сетки x_i при вариации может быть заменено на ближайшее

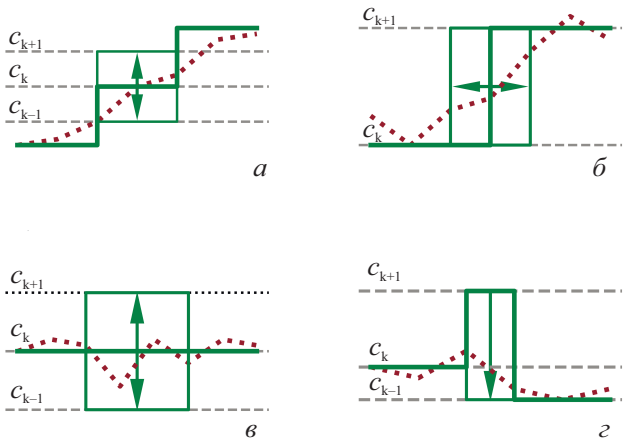

Рис. 2. Шаги оптимизации матрицы распределения уровней $\hat{X}$: *а* — коррекция положений уровней; *б* — коррекция положений переходов между уровнями; *в* — введение новых уровней; *г* — устранение всплесков

сверху или ближайшее снизу либо может остаться неизменным. Формально это означает, что каждый матричный элемент строки матрицы X, равный единице, за одну итерацию не может сдвинуться более чем на одну позицию вправо или влево (см. рис. 2, *а*).

2. Области постоянства значений координат оценки $\mathbf{f}$ могут меняться так, что их границы сдвигаются не более чем на одну точку влево или вправо. Формально это означает, что в каждом столбце матрицы X множество стоящих подряд единиц может быть расширено или сужено на один элемент сверху и (или) снизу (см. рис. 2, *б*).
3. Каждая область постоянства значений координат оценки $\mathbf{f}$, длина которой превышает заданный порог $\Delta_{\max}$, может быть разбита на три подмножества одинаковой длины, и значение координат вектора $\mathbf{f}$ среднего подмножества может изменяться в соответствии с правилом, сформулированным в п. 1 (см. рис. 2, *в*).
4. Каждая область постоянства координат оценки $\mathbf{f}$, длина которой не больше заданного порога $\Delta_{\min}$, объединяется со следующей за ней областью постоянства, и значение сигнала на этом объединении полагается равным значению сигнала на следующей за ней области (см. рис. 2, *г*).

Правила 1 и 2 обеспечивают малость вариации $\delta\hat{X}^{(k-1)}$, измеряемой суммой квадратов ее матричных элементов. Правило 3 позволяет усложнить структуру сигнала $\mathbf{f}$ путем добавления новых областей постоянства значения его координат, правило 4 обеспечивает «гладкость» оценки, не позволяя ей осциллировать с высокой частотой.

В настоящей работе вариации $\delta\hat{X}^{(k-1)}$ матрицы $\hat{X}^{(k-1)}$ вычислялись последовательно, в четыре этапа. На первом строился набор вариаций, удовлетворяющих первому правилу, модифицированному следующим образом: рассматривались вариации, для которых области постоянного значения сигнала $\mathbf{f}$ не менялись, а значения сигнала на этих областях изменялись в соответствии с правилом 1. Из этих вариаций выбирались такие, для которых выполнялось неравенство (11), и происходила первая коррекция матрицы $\hat{X}^{(k-1)}$. Результат этого этапа коррекции считался новой оценкой, полученной на первом этапе второго шага k-й итерации.

Второй и третий этапы проводились аналогично первому, выбор вариаций при этом удовлетворял правилам 2 и 3 соответственно. Результатом каждого из этих этапов являлась очередная коррекция оценки матрицы X.

Четвертый этап состоял в удалении участков постоянных значений оцениваемого сигнала, длительность которых меньше порога $\Delta_{\min}$ в соответствии с правилом 4.

Если в результате k-й итерации минимизируемый в (9) функционал менялся незначительно, так что

$$\left| \|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}^{(k)}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}\|^2 - \|\boldsymbol{\xi} - A\hat{X}^{(k-1)}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}\|^2 \right| < \varepsilon,$$

где ε — выбранный порог, итерационная процедура останавливалась и $\hat{\mathbf{f}} = \hat{X}^{(k)}\hat{\mathbf{c}}^{(k)}$ считалась оценкой искомого кусочно-постоянного сигнала.

Отметим, что введение более узкого (по сравнению с описанным в пп. 1, 2 настоящей статьи) класса кусочно-постоянных сигналов, задаваемого правилами 1–4, не гарантирует сходимости предложенного алгоритма, так как применение правила 4 может увеличить значение минимизируемого функцинала при удалении участков постоянства сигналов малой длительности, однако вычислительные эксперименты показали, что результаты применения такого набора правил приводят к меньшей погрешности оценки. Остановку алгоритма в случае зацикливания можно предусмотреть ограничением числа итераций.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

С целью осуществления проверки предложенного выше метода была разработана библиотека на языке программирования Python. Проверка производилась на искусственно сгенерированных сигналах, содержащих 1000 точек и имеющих различное количество уровней ($m = 4, 8, 16, 32$).

Истинный сигнал $\mathbf{f}$ генерировался случайным образом, но с соблюдением следующих ограничений:

- сигнал может принимать только значения из фиксированного набора уровней;
- уровни могут принимать значения в диапазоне от 0 до 255;
- длина каждой из областей постоянства сигнала $\mathbf{f}$ находится в диапазоне $[l_a/4;\ 4l_a]$, где l_a — характерный размер аппаратной функции (в данном случае в качестве характерного размера использовалась ширина $l_a = 2\sigma_a$ аппаратной функции $a(\cdot)$, в качестве которой выбиралась функция Гаусса $a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}\exp\{-x^2/(2\sigma_a^2)\}$, $\sigma_a = 3h_x$, $h_x = 1$ — шаг сетки по координате x).

Результат измерения $\boldsymbol{\xi}$ генерировался по формуле (3). Добавляемый шум имел гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma_\nu = 3$.

Поскольку вычислительный эксперимент проводился для сигналов, генерируемых компьютером, то для оценки эффективности восстановления сигнала использовалась норма разности восстановленного

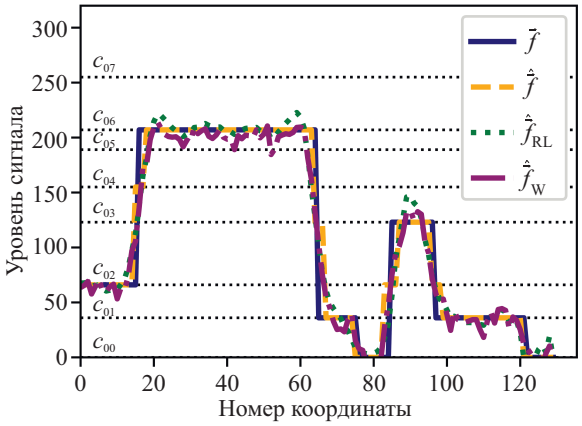

Рис. 3. Фрагмент исходного сигнала $\mathbf{f}$, содержащего 8 уровней, и восстановленных сигналов: $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{f}}_W$ (восстановление с помощью фильтра Винера) и $\hat{\mathbf{f}}_{RL}$ (восстановление методом Ричардсона—Люси)

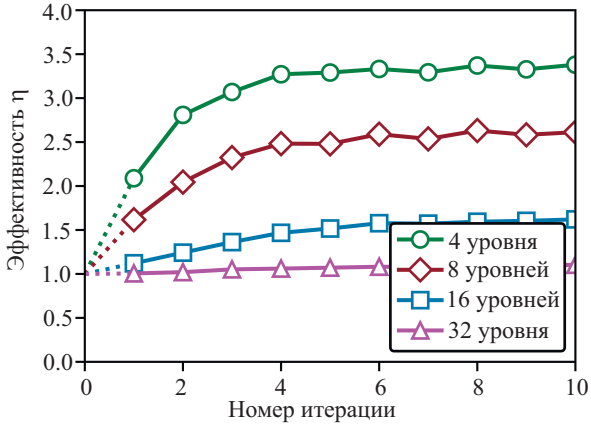

Рис. 4. График зависимости эффективности восстановления сигнала η (13) от количества итераций для сигналов с различным количеством уровней

сигнала $\hat{\mathbf{f}}$ от истинного $\mathbf{f}$:

$$\varepsilon_f(\hat{\mathbf{f}}) = \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|. \tag{12}$$

Заметим, что функционал (12) контролирует реальную точность восстановления и может быть определен лишь в модельном эксперименте, в котором известен истинный входной сигнал $\mathbf{f}$.

Эффективность алгоритма для задачи устранения размытия кусочно-постоянного сигнала вычислялась как отношение нормы разности $\|\mathbf{f} - \boldsymbol{\xi}\|$ зарегистрированного сигнала $\boldsymbol{\xi}$ и истинного $\mathbf{f}$ к норме разности полученного решения $\hat{\mathbf{f}}$ и истинного сигнала:

$$\eta = \frac{\varepsilon_f(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon_f(\hat{\mathbf{f}})}. \tag{13}$$

Чем лучше алгоритм, тем меньше ошибка решения $\varepsilon_f(\hat{\mathbf{f}})$ и тем выше будет эффективность алгоритма η.

Результаты восстановления сигнала методами, описанными в данной статье, сравнивались с результатами, полученными с использованием фильтра Винера [5] и алгоритма Ричардсона—Люси [6]. Параметры последних двух методов подбирались таким образом, чтобы обеспечить наибольшую точность восстановления для используемого сигнала. Фрагмент исходного сигнала и его оценки, полученные перечисленными методами, изображены на рис. 3. Результаты измерения эффективности восстановления сигналов с различным количеством уровней приведены в таблице.

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что для сигналов с небольшим количеством уровней (4 и 8) предложенный метод позволяет в несколько раз увеличить эффективность (13) предложенного алгоритма. Для сигналов с большим количеством уровней качество восстановления падает. Методы Ричардсона—Люси и Винера не позволяют получить значительного сокращения ошибки на рассматриваемом классе сигналов. Зависимости качества восстановления от количества уровней сигнала для последних двух методов выявлено не было.

Таблица. Экспериментально измеренные значения эффективности восстановления сигнала с помощью основного алгоритма (η), фильтра Винера (η_W) и алгоритма Ричардсона—Люси (η_{RL}) от количества уровней m кусочно-постоянного сигнала

m	η	η_W	η_{RL}
4	3.7 ± 1.0	1.09 ± 0.16	1.17 ± 0.20
8	2.5 ± 0.5	1.09 ± 0.11	1.16 ± 0.12
16	1.6 ± 0.3	1.07 ± 0.14	1.18 ± 0.14
32	1.15 ± 0.17	1.06 ± 0.10	1.17 ± 0.12

Также была произведена оценка сходимости предложенного метода. В большинстве случаев уже на пятой итерации изменение эффективности η за итерацию не превышает 5%. Типичные графики зависимости эффективности восстановления сигнала $\mathbf{f}$ от номера итерации изображены на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описан метод восстановления кусочно-постоянных одномерных сигналов по результатам их измерения при наличии шумов в измерительной системе. Для восстановления сигнала требуется знание аппаратной функции измерительного прибора и количества уровней исходного сигнала. Главное отличие предложенного метода от большинства существующих заключается в учете кусочно-постоянной структуры сигнала при его восстановлении.

Использовался итерационный метод, каждая итерация которого состоит из двух шагов: уточнение значений уровней кусочно-постоянного сигнала и уточнение положений отрезков постоянного значения.

В ходе вычислительного эксперимента было показано, что для регистрации сигналов с небольшим количеством уровней (менее 10), размытых гауссовой аппаратной функцией и искаженных аддитивным шумом, предложенный метод позволяет в несколько раз повысить эффективность восстановления, понимаемую как отношение нормы разности размытого и истинного сигналов к норме разности восстановленного и истинного сигналов. При этом другие методы, используемые для восстановления свертки (метод Ричардсона—Люси и фильтр Винера), на рассматриваемом классе сигналов оказываются менее

эффективными. Также было показано, что рассмотренный метод обладает достаточно быстрой сходимостью. В большинстве случаев значение ошибки стабилизируется за 5 итераций.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 19-29-09044 (части 2 и 3) и № 19-01-00790 (часть 4)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prun V.E., Buzmakov A.V., Nikolaev D.P.* et al. // Automation and Remote Control. 2013. **74**, N 10. P. 1670.
2. *Чуличков А.И., Юань Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2014. № 3. С. 15. (*Chulichkov A.I., Yuan B.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 2014. **69**. N 3. P. 218.)
3. *Krylov A.S., Nasonov A.V., Ushmaev O.S.* // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 2009. **19**. N 3. P. 497.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. Изд. 2-е. 1979.
5. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. J. Wiley. N.Y. 1950.
6. *Lucy L.B.* // Astronomical Journal. 1974. **79** (6). P. 745.
7. *Richardson W.H.* // Journal of the Optical Society of America. 1972. **62**. I.
8. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: КУРС. 2017.
9. *Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Springer Science+Business Media Dordrecht. 2013.
10. *Leonov A.S., Wang Y., Yagola A.G.* Piecewise uniform regularization for the inverse problem of microtomography with a-posteriori error estimate / Inverse Problems in Science and Engineering. 2018.
11. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. Изд. 3-е. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012.
12. *Pyt'ev Yu.P.* // Automation and Remote Control. 2010. **71**. N 2. P. 308.
13. *Пытьев Ю.П.* // Мир измерений. 2013. **6**. С. 3.
14. *Pyt'ev Yu. P., Chulichkov A.I.* // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. 1991. **1**, N 2. P. 212.
15. *Пытьев Ю.П., Сердобольская М.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. № 5. С. 18. (*Pyt'ev Yu.P., Serdobol'skaya M.L.* // Moscow Univ. Phys. Bull. 1988. N 5. P. 19.)
16. *Пытьев Ю.П., Сухорукова Г.В., Чуличков А.И.* // Матем. моделирование. 1994. **6**. № 11. С. 113.
17. *Чжан Е., Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г.* // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2013. **14**. С. 468.
18. *Королев Ю.М., Ягола А.Г.* // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2012. **13**. С. 14.
19. *Балакин Д.А., Пытьев Ю.П.* // Математическое моделирование. 2018. **30**. № 12. С. 84.
20. *Балакин Д.А., Пытьев Ю.П.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2018. № 5. 1850301.
21. *Сергеев В.В., Денисова А.Ю.* // Компьютерная оптика. 2013. **37**. № 2. С. 239.
22. *Грузман И.С., Курилин И.В.* // Автометрия. 2002. № 2. С. 15.
23. *Борисов С.С., Грачёв Е.А., Устинин Д.М.* и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 3. С. 32. (*Borisov S.S., Grachev E.A., Ustinin D.M.* et al. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2002. **57**, N 3. P. 48.)
24. *Богданов И.В., Устинин Д.М., Чуличков А.И.* // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2005. **9**. № 1–4. С. 301.
25. *Penrose R.* // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1956. **52**. P. 17.

Piecewise Constant Signal Estimation by the Recording of Signal Measurements in a Linear Scheme

N. G. Mikheev[a], A. I. Chulichkov, V. A. Antonyuk

Department of Mathematical Modeling and Computer Science, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]ng.mikheev@physics.msu.ru.

This paper proposes a method and an algorithm for the reconstruction of piecewise constant signals using the registration results obtained by devices whose operation can be described by a linear fuzzifier and additive noise. The type of the linear transformation and the statistical properties of the noise are known. The number of levels of a piecewise constant signal is also assumed to be given. The dependence of the accuracy of the piecewise-constant signal reconstruction on the number of possible signal values has been studied.

Keywords: signal recovery, optimal estimation, mathematical model of signal registration, reduction in signal registration.
PACS: 02.60.Gf.
Received 27 February 2020.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 2. Pp. 73–79.

Сведения об авторах

1. Михеев Никита Глебович — аспирант; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: ng.mikheev@physics.msu.ru.
2. Чуличков Алексей Иванович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: achulichkov@physics.msu.ru.
3. Антонюк Валерий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-41-78, e-mail: antonyuk@physics.msu.ru.