

## Звуковое поле в морском волноводе с неоднородной скоростью звука по глубине и трассе

Ю. И. Папкова<sup>a</sup>

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», кафедра «Высшая математика». Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33.

Поступила в редакцию 27.07.2020, после доработки 08.03.2021, принята к публикации 12.04.2021.

При волноводном распространении звука в морской среде одной из основных характеристик — скорость звука. В гидрофизических волноводах скорость звука является главным образом функцией глубины, радиальная координата вносит поправки второго порядка малости. Тем не менее в ряде случаев возможны существенные изменения характеристик волновода по радиальной координате, например в результате влияния антропогенных факторов, течений и др. В представленной работе строится аналитическое представление для звукового поля точечного источника в плоскостойстом морском волноводе, имеющем неоднородную скорость звука по глубине и трассе волновода. Модель волновода имеет радиальную симметрию, при этом источник звука расположен в произвольной точке волновода, что приводит к решению, существенно зависящему от всех трех пространственных координат. Данное решение строится на основе декомпозиции области волновода на цилиндрические области, допускающие построение аналитического решения уравнения Гельмгольца. Показано, что в случае постоянного профиля скорости звука и плотности в каждой из областей декомпозиции волновода решение задачи может быть получено явно. Приводятся результаты численного моделирования, дается анализ влияния неоднородности на характеристики звукового поля.

**Ключевые слова:** трехмерное аналитическое решение, неоднородный гидроакустический волновод, нормальные моды, звуковое поле в морской среде.

УДК: 534.231. PACS: 43.30.-k, 43.30.+m.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование акустических свойств морской среды представляет интерес не только с точки зрения развития методов разведки и прогноза природных ресурсов, геолокации и разработки систем связи, но также и для задач экологического контроля, основанного на информационных технологиях мониторинга прибрежных акваторий. При этом в основе теоретических моделей распространения звука в морской среде лежит, как правило, модель плоскостойстого волновода на жидком (упругом) основании [1–7]. Данная модель доказала свою адекватность в многочисленных экспериментальных исследованиях и позволяет описать основные физические эффекты волноводного распространения звука. Тем не менее даже в случае идеального волновода с плоскопараллельными границами и жестким дном далеко не всегда удается получить точное решение волнового уравнения, исключение составляют некоторые случаи специально подобранного профиля скорости звука [1, 2].

По этой причине для моделирования морских акустических волноводов используются подходы, реализующие как численные алгоритмы [7], так и методы, основанные на некотором аналитическом приближении исходной задачи в зависимости от параметров волновода. В частности, приложение метода конечных разностей для анализа волноводного распространения звука представлено в работах [8, 9], метод граничных элементов в [10], метод конечных элементов [11]. Численные алгоритмы, основанные на лучевом методе (основные положения этого подхода для идеальных волноводов можно найти в класси-

ческих монографиях [1, 5]), развиты в недавних работах [12, 13]. Однако, несмотря на универсальность классических численных методов, они имеют ряд недостатков, связанных с трудоемкостью применения алгоритмов на мелкой сетке, невозможностью описать сингулярности полей и др. Для методов, основанных на лучевой теории, возникают проблемы расчета поля в точках на каустиках, явление «лучевого хаоса» для волноводов с малыми неоднородностями.

Очевидно, что аналитическая форма решения задачи позволяет избежать большинства указанных проблем численных методов. В связи с этим на сегодняшний день продолжают развиваться численно-аналитические подходы для решения задач подводной акустики. В частности, в статьях [14, 15] представлен *multilevel sampling method*, реализующий стыковку точных решений уравнений Гельмгольца посредством системы интегральных уравнений, при этом неоднородность в волноводе моделируется как жидкий параллелепипед с параметрами, отличными от характеристик остального волновода. В работе [16] предлагается свести задачу о распространении звука в волноводе с достаточно гладким неровным жестким дном к системе дифференциальных уравнений относительно локальных нормальных мод. В статье [17] строится трехмерное аналитическое по форме решение для волновода с конической подводной возвышенностью. Заметим, что при описанном в [17] подходе часть условий стыковки частичных областей волновода не выполняется. Для задач глубоководной акустики хорошо себя зарекомендовал метод параболического приближения, которому посвящены сотни публикаций, его развитие для трехмерных моделей представлено в недавних работах [18–22].

<sup>a</sup> E-mail: yulia.papkova@gmail.com

Заметим также, что аналитическая форма решения задачи служит удобной основой для решений обратных задач. В статьях [23, 24] показано применение нейронных сетей для локализации положения источника звука. При решении обратных задач используются методы геоакустической инверсии (восстановления параметров среды) на основе моделей горизонтально-неоднородных гидроакустических волноводов [25, 26], где под параметрами среды выбирают профиль скорости звука в водной толщине, плотность и скорость звука в донных осадках. Применение метода геоакустической инверсии подразумевает прежде всего оценки геоакустических параметров морских отложений, поэтому в качестве первого приближения используются численно-аналитические решения соответствующих прямых задач.

Ниже предлагается численно-аналитический подход, позволяющий исследовать особенности распространения звука в природных морских волноводах при изменении физико-химических свойств части водного бассейна или донного слоя. Заметим, что волноводы подобного типа могут быть использованы в качестве начального приближения для описания звуковых полей в том случае, когда конечная часть морского бассейна имеет характеристики, отличные от остального волновода, например при нагревании части волновода, присутствии загрязнения в воде или наличия газа в донном слое и т.п. Если при этом положение источника звука геометрически не совпадает с центром аномалии, то задача, несмотря на цилиндрическую симметрию, становится трехмерной, так как азимутальная координата становится существенной для описания поля.

## 1. МОДЕЛЬ ВОЛНОВОДА

Рассмотрим плоскостроистую модель акустического волновода с радиальной симметрией (рис. 1). Волновод представляет собой водный слой толщины  $h_0$  и плотности  $\rho_0$ , расположенный на слое жидкого осадочного слоя толщины  $(h - h_0)$  с плотностью  $\rho_1$  и параметром затухания  $\alpha$ . Скорость звука в воде и донном слое предполагается зависящей только от глубины в каждой из областей, обозначим  $c_{0j}(z)$  и  $c_{1j}$  — соответственно скорость звука в воде и донном слое для области  $\Omega_j$ .

Таким образом, представленная модель может служить для описания скачка функции скорости звука в направлении радиальной координаты или же для аппроксимации непрерывной зависимости  $c(r, z)$

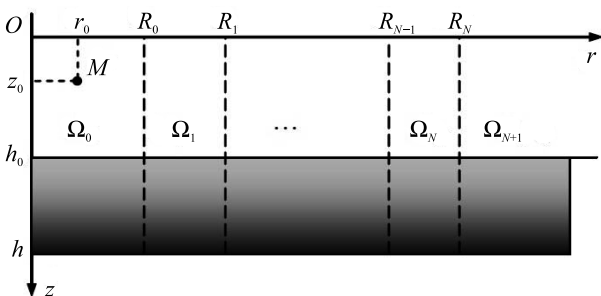


Рис. 1. Гидроакустический волновод с радиальной симметрией

системой профилей скорости звука  $c_{0j}(z)$  в каждой частичной области. Выбор количества областей  $\Omega_j$  определяется в таком случае характером зависимости скорости звука от радиальной координаты и требуемым качеством аппроксимации.

Гармонический источник звука с координатами  $M(r_0, z_0, \varphi_0)$ , излучающий волну круговой частоты  $\omega = 2\pi f$ , расположен в произвольной точке водного слоя внутренней области  $\Omega_0$ .

В рамках представленной модели характеристики звукового поля в волноводе могут быть выражены при помощи амплитуды потенциала скоростей  $\Phi(r, z, \varphi)$ . Как известно [1], данная функция удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца в области волновода  $\Omega_0$ :

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = -\frac{\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}, \quad (1)$$

где  $\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат,  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

В остальных областях  $\Phi(r, z, \varphi)$  — решение однородного уравнения Гельмгольца.

В качестве граничных условий используем условие равенства нулю давления на свободной поверхности

$$\Phi|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

и условие равенства нулю нормальной скорости на границе абсолютно жесткого основания

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h} = 0. \quad (3)$$

Кроме этого, на границе водного и осадочного слоев  $z = h_0$  должны выполняться условия непрерывности звукового поля

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow h_0-0} \rho_0 \Phi &= \lim_{z \rightarrow h_0+0} \rho_1 \Phi, \\ \lim_{z \rightarrow h_0-0} \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \lim_{z \rightarrow h_0+0} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

и условия непрерывности звукового поля на стыке областей  $r = R_j$ , ( $j = 0, 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R_j-0} \Phi &= \lim_{r \rightarrow R_j+0} \Phi, \\ \lim_{r \rightarrow R_j-0} \frac{\partial\Phi}{\partial r} &= \lim_{r \rightarrow R_j+0} \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Используя метод разделения переменных, можно построить [17, 27] общее решение краевой задачи (1)–(3) в каждой  $j$ -й области  $\Omega_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$ ), удовлетворяющее как граничным условиям на горизонтальных стенках волновода и условиям непрерывности (4), так и условиям излучения, в виде суммы нормальных мод с неопределенными коэффициентами  $A_{mn}^j$ ,  $B_{mn}^j$  и  $D_{mn}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_j(r, z, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,n}(z) \left( A_{mn}^j J_m(\xi_{j,n}r) + \right. \\ &\left. + B_{mn}^j H_m^{(1)}(\xi_{j,n}r) \right) \theta_m(\varphi), \quad (j = 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi_{N+1}(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \psi_{N+1,n}(z) \times \\ \times H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} r) \theta_m(\phi), \quad (7)$$

где  $\{\xi_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\psi_{j,n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$  — собственные числа и собственные функции краевых задач:

$$\frac{d^2 \psi_{j,n}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \psi_{j,n} = 0, \\ \psi_{j,n}(0, \xi) = 0, \\ \lim_{z \rightarrow h_0-0} \rho_0 \psi_{j,n}(z, \xi) = \lim_{z \rightarrow h_0+0} \rho_1 \psi_{j,n}(z, \xi), \quad (8) \\ \lim_{z \rightarrow h_0-0} \psi'_{j,n}(z, \xi) = \lim_{z \rightarrow h_0+0} \psi'_{j,n}(z, \xi), \\ \psi'_{j,n}(h, \xi) = 0.$$

$H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iY_m(z)$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $m$ ,  $J_m(z)$  и  $Y_m(z)$  — функции Бесселя первого и второго родов соответственно.

Собственные функции краевых задач (8) ортогональны в пространстве интегрируемых с квадратом функций с весом  $\rho(z)$  (Приложение А).

В области  $\Omega_0$ , внутри которой расположен источник  $M(r_0, z_0, \varphi_0)$ , амплитуда потенциала скоростей  $\Phi_0(r, z, \phi)$  определяется следующим образом:

$$\Phi_0(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{0,n}(z) \times \\ \times \left( A_{mn}^0 + B_{mn}^0 \frac{H_m^{(1)}(\xi_{0,n} r_0)}{J_m(\xi_{0,n} r_0)} \right) J_m(\xi_{0,n} r) \theta_m(\phi), \\ (r \leq r_0), \quad (9)$$

$$\Phi_0(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{0,n}(z) \times \\ \times \left( A_{mn}^0 J_m(\xi_{0,n} r) + B_{mn}^0 H_m^{(1)}(\xi_{0,n} r) \right) \theta_m(\phi), \\ (r > r_0), \quad (10)$$

где коэффициент  $B_{mn}^0$  находится из условия в источнике

$$B_{mn}^0 = \frac{\pi i}{2} \frac{\psi_{0,n}(z_0) \theta_m(\phi_0)}{\gamma_{0,n}} J_m(\xi_{0,n} r_0), \\ \gamma_{jn} = \int_0^h \rho(z) \psi_{j,n}^2(z) dz, \quad (j = 0, 1, \dots, N+1).$$

Азимутальные собственные функции  $\{\theta_m(\varphi)\}_{m=0}^{\infty}$  выбираются в виде

$$\theta_m(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m = 0, \\ \frac{\cos m(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{\pi}}, & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В частном случае, когда профиль скорости звука в водном слое для каждой области  $\Omega_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$ ) является постоянной величиной  $c_{0j}(z) = c_{0j}$ , то собственные числа и функции задачи (6) могут быть представлены в виде [5]:

$$\psi_{j,n} = \begin{cases} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\cos(\mu_{jn}^{(1)}(h-h_0))}{\sin(\mu_{jn}^{(0)} h_0) \cos(\mu_{jn}^{(1)} h)} \sin(\mu_{jn}^{(0)} z), & z \leq h_0, \\ \frac{\cos(\mu_{jn}^{(1)}(h-z))}{\cos(\mu_{jn}^{(1)} h)}, & z > h_0; \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\mu_{jn}^{(0)} = \sqrt{\left( \frac{\omega}{c_{0j}} \right)^2 - \xi_{j,n}^2}, \\ \mu_{jn}^{(1)} = \sqrt{\left( \frac{\omega}{c_{1j}} \left( 1 + i \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 - \xi_{j,n}^2},$$

а собственные числа являются корнями дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}(\mu_{jn}^{(0)} h_0) \operatorname{tg}(\mu_{jn}^{(1)}(h-h_0)) = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\mu_{jn}^{(0)}}{\mu_{jn}^{(1)}}.$$

Используя условия непрерывности звукового поля на стыке областей  $r = R_j$ , ( $j = 0, 1, \dots, N$ ):

$$\Phi_j(R_j, z, \phi) = \Phi_{j+1}(R_j, z, \phi), \\ \frac{\partial \Phi_j(R_j, z, \phi)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{j+1}(R_j, z, \phi)}{\partial r}, \quad (12)$$

получим из представлений амплитуды потенциала скоростей (6)–(10) следующие функциональные равенства:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,n}(z) \left( A_{mn}^j J_m(\xi_{j,n} R_j) + B_{mn}^j H_m^{(1)}(\xi_{j,n} R_j) \right) \theta_m(\phi) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j+1,n}(z) \left( A_{mn}^{j+1} J_m(\xi_{j+1,n} R_j) + B_{mn}^{j+1} H_m^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) \theta_m(\phi), \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,n}(z) \left( A_{mn}^j \left( \frac{m J_m(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} J_{m+1}(\xi_{j,n} R_j) \right) + B_{mn}^j \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j,n} R_j) \right) \right) \theta_m(\phi) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{j,n}(z) \left( A_{mn}^{j+1} \left( \frac{m J_m(\xi_{j+1,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,n} J_{m+1}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) + \right. \\ \left. + B_{mn}^{j+1} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) \right) \theta_m(\phi), \quad (j = 0, 1, \dots, N-1),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{N,n}(z) \left( A_{mn}^N J_m(\xi_{N,n} R_N) + B_{mn}^N H_m^{(1)}(\xi_{N,n} R_N) \right) \theta_m(\phi) = \\
= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{N+1,n}(z) \left( D_{mn} H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N) \right) \theta_m(\phi), \\
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{N,n}(z) \left( A_{mn}^N \left( \frac{m J_m(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} J_{m+1}(\xi_{N,n} R_N) \right) + \right. \\
\left. + B_{mn}^N \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N,n} R_N) \right) \right) \theta_m(\phi) = \\
= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{N+1,n}(z) \left( D_{mn} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N+1,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N) \right) \right) \theta_m(\phi).
\end{aligned}$$

Данные равенства распадаются, в свою очередь, в последовательность равенств для каждой азимутальной собственной функции  $\{\theta_m(\varphi)\}_{m=0}^{\infty}$ . Используя далее свойство ортогональности собственных

функций  $\{\psi_{j,n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$  в пространстве  $L_2[0; h]$  с весом  $\rho(z)$  применительно к каждому из уравнений с номером  $j$ , получаем следующие алгебраические уравнения:

$$\gamma_{j,k} \left( A_{mk}^j J_m(\xi_{j,k} R_j) + B_{mk}^j H_m^{(1)}(\xi_{j,k} R_j) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn}^{j+1} J_m(\xi_{j+1,n} R_j) + B_{mn}^{j+1} H_m^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) I_{kn,j}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{j+1,n} \left( A_{mk}^{j+1} \left( \frac{m J_m(\xi_{j+1,k} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,k} J_{m+1}(\xi_{j+1,k} R_j) \right) + \right. \\
\left. + B_{mk}^{j+1} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j+1,k} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,k} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j+1,k} R_j) \right) \right) = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn}^j \left( \frac{m J_m(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} J_{m+1}(\xi_{j,n} R_j) \right) + B_{mn}^j \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j,n} R_j) \right) \right) I_{nk,j}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\gamma_{N,k} \left( A_{mk}^N J_m(\xi_{N,k} R_N) + B_{mk}^N H_m^{(1)}(\xi_{N,k} R_N) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N) I_{kn,N}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{N+1,n} D_{mk} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N+1,k} R_N)}{R_N} - \xi_{N+1,k} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N+1,k} R_N) \right) = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn}^N \left( \frac{m J_m(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} J_{m+1}(\xi_{N,n} R_N) \right) + B_{mn}^N \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N,n} R_N) \right) \right) I_{nk,N}, \\
(k = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, N-1), \quad (16)
\end{aligned}$$

где  $I_{kn,j} = \int_0^h \rho(z) \psi_{j,k}(z) \psi_{j+1,n}(z) dz$ .

### 3. ВОЛНОВОД НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ И СО СКАЧКОМ СКОРОСТИ ЗВУКА ПО ГОРИЗОНТАЛИ

В качестве предельного случая рассмотренной выше модели волновода рассмотрим волновод при отсутствии осадочного слоя  $h = h_0$ , то есть на жестком основании. В случае скалистого грунта, в случае искусственного дна подобная модель дает достаточно правдоподобную картину распространения звука под водой [1, 16]. Математически этот случай интересен прежде всего тем, что при постоянном профиле звука  $c(z) = c_{0j}$  в каждой из частичных областей  $\Omega_j$ ,

при различных волновых числах

$$\xi_{j,n} = \sqrt{\left( \frac{\omega}{c_{0j}} \right)^2 - \left( \frac{\pi(n+1/2)}{h} \right)^2}$$

получаем одинаковые вертикальные функции в каждой из областей:

$$\psi_{j,n}(z) = \sin \frac{\pi(n+1/2)z}{h}. \quad (17)$$

В силу чего равенства непрерывности звукового поля по горизонтали (12) расщепляются на равенства для каждой отдельной нормальной моды  $\theta_m(\phi) \psi_{j,n}(z)$ :

$$A_{mn}^0 J_m(\xi_{0,n} R_0) - A_{mn}^1 J_m(\xi_{1,n} R_0) - B_{mn}^1 H_m^{(1)}(\xi_{1,n} R_0) = -\frac{\pi i}{h} \psi_{0,n}(z_0) \theta_m(\phi_0) J_m(\xi_{0,n} r_0) H_m^{(1)}(\xi_{0,n} R_0),$$

$$\begin{aligned} A_{mn}^0 \left( \frac{m J_m(\xi_{0,n} R_0)}{R_0} - \xi_{0,n} J_{m+1}(\xi_{0,n} R_0) \right) - A_{mn}^1 \left( \frac{m J_m(\xi_{1,n} R_0)}{R_0} - \xi_{1,n} J_{m+1}(\xi_{1,n} R_0) \right) - \\ - B_{mn}^1 \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{1,n} R_0)}{R_0} - \xi_{1,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{1,n} R_0) \right) = \\ = -\frac{\pi i}{h} \psi_{0,n}(z_0) \theta_m(\phi_0) J_m(\xi_{0,n} r_0) \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{0,n} R_0)}{R_0} - \xi_{0,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{0,n} R_0) \right), \end{aligned}$$

$$A_{mn}^j J_m(\xi_{j,n} R_j) + B_{mn}^j H_m^{(1)}(\xi_{j,n} R_j) - A_{mn}^{j+1} J_m(\xi_{j+1,n} R_j) - B_{mn}^{j+1} H_m^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$\begin{aligned} A_{mn}^j \left( \frac{m J_m(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} J_{m+1}(\xi_{j,n} R_j) \right) + B_{mn}^j \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j,n} R_j) \right) - \\ - A_{mn}^{j+1} \left( \frac{m J_m(\xi_{j+1,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,n} J_{m+1}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) - B_{mn}^{j+1} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j)}{R_j} - \xi_{j+1,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{j+1,n} R_j) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$A_{mn}^N J_m(\xi_{N,n} R_N) + B_{mn}^N H_m^{(1)}(\xi_{N,n} R_N) - D_{mn} H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N) = 0,$$

$$\begin{aligned} A_{mn}^N \left( \frac{m J_m(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} J_{m+1}(\xi_{N,n} R_N) \right) + B_{mn}^N \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N,n} R_N) \right) - \\ - D_{mn} \left( \frac{m H_m^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N)}{R_N} - \xi_{N+1,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{N+1,n} R_N) \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (13)–(16) получаем для каждой пары  $(m, n)$  систему линейных алгебраических уравнений порядка  $(2N+2)$  относительно коэффициентов  $A_{mn}^0, A_{mn}^1, B_{mn}^1, \dots, A_{mn}^N, B_{mn}^N, D_{mn}$ . Из структуры данной системы можно заметить, что матрица системы является четырехдиагональной, то есть допускает эффективное решение методом прогонки.

#### 4. МОДЕЛЬ ВОЛНОВОДА С ГАЗОНАСЫЩЕННЫМ ГРУНТОМ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ

Как известно [28–30], наличие газа в донном слое может существенно менять значение скорости звука. Рассмотрим волновод, состоящий из двух цилиндрических областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  (рис. 2), полагая, что внутренняя область лежит на газонасыщенном грунте.

В частном случае, когда профиль скорости звука в водном слое для каждой области  $\Omega_j$  ( $j = 0, 1$ ) является постоянной величиной  $c_{0j}$ , собственные функции областей  $\Omega_j$  определяются выражением (11). Бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов при нормальных модах  $A_{mk}^0, B_{mk}^0$  и  $D_{mk}$  может быть записана в этом случае более компактно:

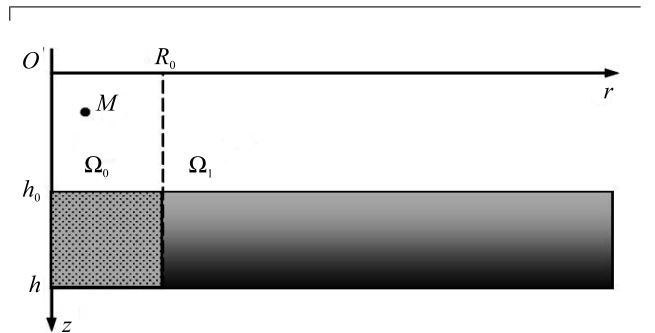


Рис. 2. Гидроакустический волновод с газонасыщенным грунтом

$$\begin{cases} \gamma_{0k} X_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{kn} Z_n^{(m)} - H_m^{(1)}(\xi_{0,k} R_0) B_{mk}^0; \\ \gamma_{1k} \left( \frac{m}{R_0} - \xi_{1,k} \frac{H_{m+1}^{(1)}(\xi_{1,k} R_0)}{H_m^{(1)}(\xi_{1,k} R_0)} \right) Z_k^{(m)} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(m)} \left[ \frac{m}{R_0} - \xi_{0,n} \frac{J_{m+1}(\xi_{0,n} R_0)}{J_m(\xi_{0,n} R_0)} \right] I_{nk} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^0 \left[ \frac{m}{R_0} H_m^{(1)}(\xi_{0,n} R_0) - \xi_{0,n} H_{m+1}^{(1)}(\xi_{0,n} R_0) \right] I_{nk}; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $X_k^{(m)} = A_{mk}^0 J_m(\xi_{0k} R_0)$ ,  $Z_k^{(m)} = D_{mk} H_m^{(1)}(\xi_{1k} R_0)$ ,



$$I_{kn} = \frac{\rho_1}{2 \cos \mu_{0k}^{(1)} h \cos \mu_{1n}^{(1)} h} \times$$

$$\times \left( \frac{\rho_1 \cos \mu_{0k}^{(1)} (h - h_0) \cos \mu_{1n}^{(1)} (h - h_0)}{\rho_0 \sin \mu_{0k}^{(1)} h_0 \sin \mu_{1n}^{(1)} h_0} \times \right.$$

$$\times \left( \frac{\sin(\mu_{0k}^{(1)} - \mu_{1n}^{(1)}) h_0}{\mu_{0k}^{(1)} - \mu_{1n}^{(1)}} - \frac{\sin(\mu_{0k}^{(1)} + \mu_{1n}^{(1)}) h_0}{\mu_{0k}^{(1)} + \mu_{1n}^{(1)}} \right) +$$

$$\left. + \frac{\sin(\mu_{0k}^{(1)} - \mu_{1n}^{(1)}) (h - h_0)}{\mu_{0k}^{(1)} - \mu_{1n}^{(1)}} + \frac{\sin(\mu_{0k}^{(1)} + \mu_{1n}^{(1)}) (h - h_0)}{\mu_{0k}^{(1)} + \mu_{1n}^{(1)}} \right).$$

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численной реализации предложенного подхода использовался пакет Mathematica. Вначале рассматривался волновод на жестком основании со скачками скорости звука по радиальной координате. Изменение амплитуды поля в волноводе характеризуется величиной потерь при распространении (интенсивность):

$$TL = -20 \lg \left| \frac{\Phi}{\tilde{\Phi}} \right|,$$

где  $\tilde{\Phi} = \frac{Q e^{ikr}}{4\pi r}$  — амплитуда потенциала скоростей, создаваемая точечным источником звука на расстоянии  $r = 1$  м в безграничной среде,  $Q$  — объемная колебательная скорость.

На рис. 3, 4 показано изменение  $TL$  для волновода со следующими параметрами  $c_{00} = 1550$  м/с,  $c_{01} = 1450$  м/с,  $\rho_0 = 1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $z_0 = 50$  м,  $r_0 = 50$  м,  $h = 100$  м,  $R_0 = 2h$  (сплошная линия) в сравнении с однородным волноводом с теми же параметрами

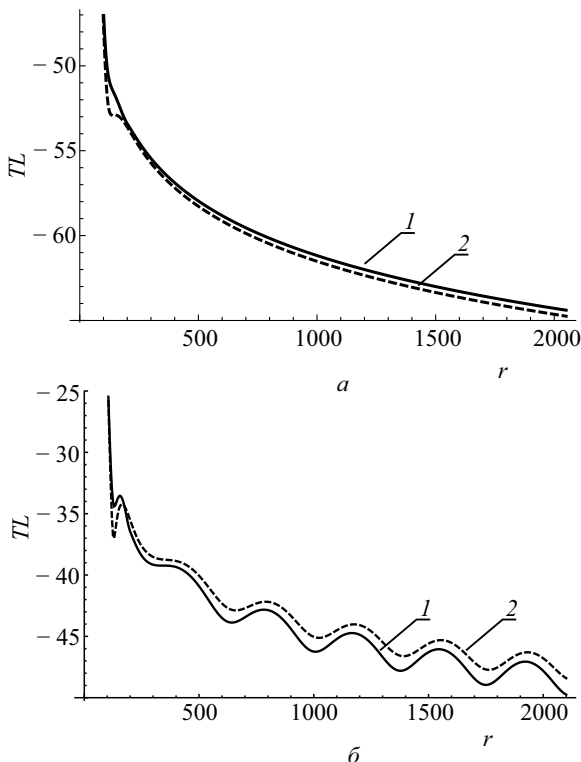


Рис. 3. Изменение  $TL(r, z_0, 0)$  на расстоянии  $r$  для волновода на жестком основании: а —  $\omega = 40$  с<sup>-1</sup>, б —  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>; 1 — составной волновод; 2 — однородный волновод

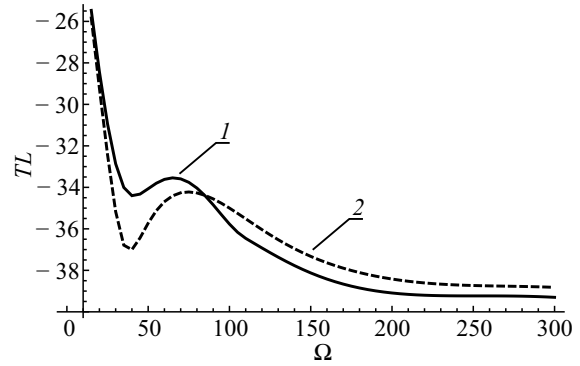


Рис. 4. Изменение  $TL(2R_0, z_0, 0)$  от частоты  $\omega$  для волновода на жестком основании: 1 — составной волновод; 2 — однородный волновод

и постоянной скоростью звука  $c_0 = 1450$  м/с (штриховая линия). На рис. 3 представлено изменение  $TL(r, z_0, 0)$  на расстоянии  $r$  от 50 м до 2000 м на частоте колебаний  $\omega = 40$  с<sup>-1</sup> и  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>. Очевидно, что поведение звукового давления определяется распространяющимися модами в волноводе, причем и у однородного волновода, и у составного волновода они достаточно схожи (на частоте 40 с<sup>-1</sup> имеется по одной распространяющейся моде у обоих волнопроводов, на частоте 100 с<sup>-1</sup> — по две). При этом величина потерь в составном волноводе оказывается несколько выше на 100 с<sup>-1</sup> и ниже на 40 с<sup>-1</sup>, что объясняется достаточно сложной зависимостью интерференции отраженных волн от частоты и параметров составного волновода. При удалении от источника звука влияние неоднородности почти не сказывается.

На рис. 4 представлена зависимость  $TL(2R_0, z_0, 0)$  от частоты  $\omega$ . Из рис. 4 следует, что для низких частот наблюдается осцилляция с локальными максимумами и минимумами, величина потерь в выбранной точке для двух волнопроводов имеет иной количественный характер. С увеличением частоты колебаний величина потерь для составного волновода в выбранной точке оказывается опять выше, чем для однородного волновода.

На рис. 5, 6 показано изменение  $TL(r, z_0, \varphi)$  в плоскости координат  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  для волновода с газонасыщенным грунтом с параметрами  $c_{00} = c_{01} = 1450$  м/с, (рис. 5) —  $c_{10} = 1200$  м/с; (рис. 6) —  $c_{10} = 600$  м/с,  $c_{11} = 1600$  м/с,  $\rho_0 = 1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0$ ,  $h_0 = 100$  м,  $h = 200$  м,  $R_0 = h$ ,  $z_0 = 10$  м,  $r_0 = 100$  м,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup> (более светлые тона соответствуют большим значениям амплитуды). Из рис. 5, 6 можно увидеть, что, несмотря на радиальную симметрию волновода, расположенный вне линии симметрии источник приводит к несимметричной картине поля, которая несколько напоминает звуковое поле для задач классической акустики о дифракции звуковой волны на препятствии. Действительно, неоднородная внутренняя область  $\Omega_0$  может рассматриваться как несимметричное препятствие для источника звука, расположенного в точке  $M$ . При этом на обоих рисунках имеется зона максимальной амплитуды около источника и пять максимумов в левой части от центра (белый цвет на рисунке), расположенных

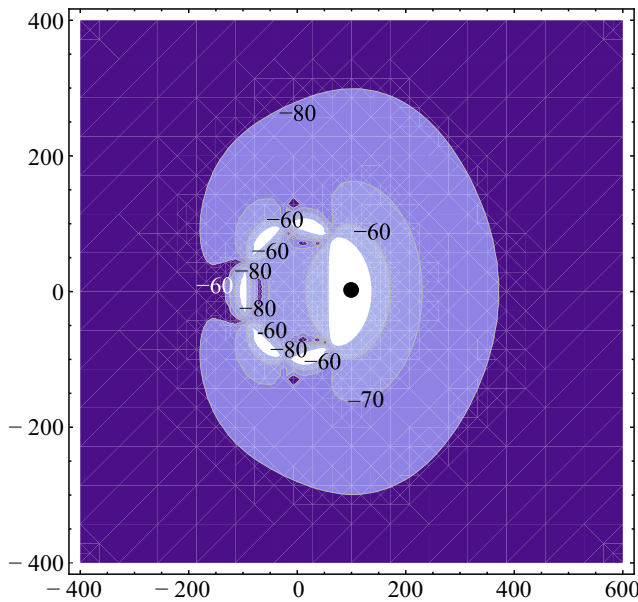


Рис. 5. Изменение  $TL(r, z_0, \varphi)$  для волновода с газонасыщенным грунтом  $c_{10} = 1200$  м/с

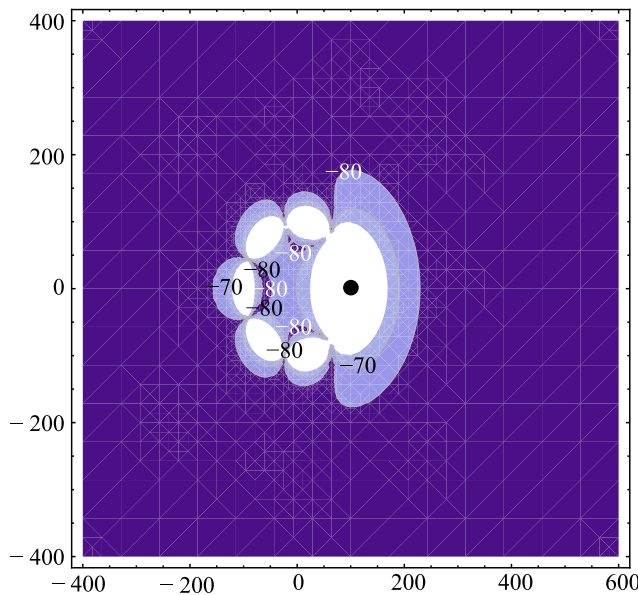


Рис. 6. Изменение  $TL(r, z_0, \varphi)$  для волновода с газонасыщенным грунтом  $c_{10} = 600$  м/с

по кругу вокруг оси симметрии. Несмотря на эту схожесть, на рисунках можно найти и качественные отличия в изменении интенсивности низкочастотных акустических волн; так, для случая рис. 6 спадание интенсивности оказывается больше, чем в случае рис. 5, что, очевидно, связано с наличием газовой фракции в грунте и большим скачком в скорости звука в составном волноводе.

Рис. 7 демонстрирует, как меняется интенсивность в водном слое, у дна и в середине слоя жидкого грунта с расстоянием  $r$  для волновода с газонасыщенным грунтом. Здесь волновод имеет параметры  $c_{00} = c_{01} = 1450$  м/с,  $c_{10} = 600$  м/с,  $c_{11} = 1600$  м/с,  $\rho_0 = 1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0$ ,  $h_0 = 100$  м,  $h = 200$  м,  $R_0 = h$ ,  $z_0 = 10$  м,  $r_0 = 100$  м,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup>. Из рисунка видно, что изменения в поведении звукового давления наиболее заметны в водном слое и жидком грунте при небольших расстояниях от источника.

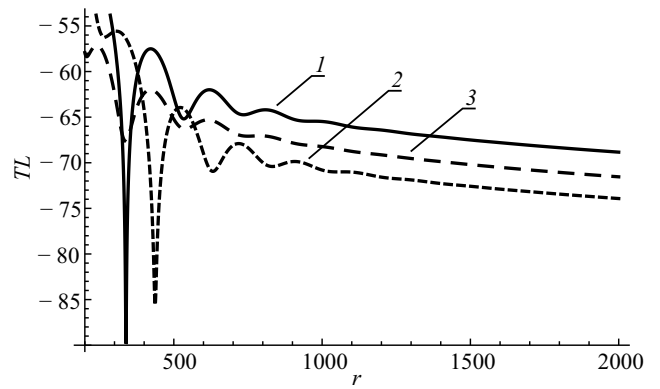


Рис. 7. Изменение  $TL(r, z_0, 0)$  на расстоянии  $r$  для волновода с газонасыщенным грунтом: 1 —  $0.5h_0$ , 2 —  $0.99h_0$ , 3 —  $1.5h_0$

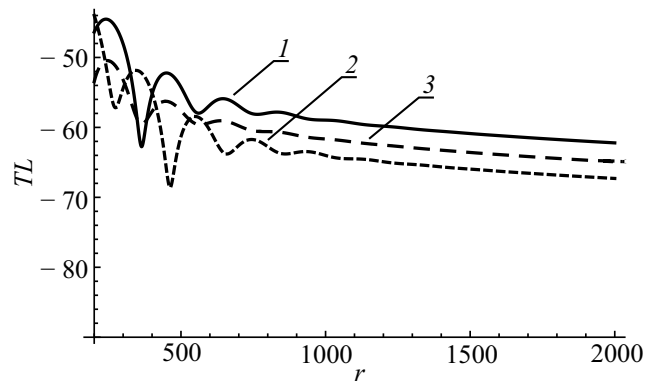


Рис. 8. Изменение  $TL(r, z_0, 0)$  на расстоянии  $r$  для однородного двухслойного волновода: 1 —  $0.5h_0$ , 2 —  $0.99h_0$ , 3 —  $1.5h_0$

Для сравнения с данными рис. 7 на рис. 8 представлено изменение  $TL(r, z_0, 0)$  для однородного волновода с параметрами  $c_{00} = c_{01} = 1450$  м/с,  $c_{10} = c_{11} = 1600$  м/с,  $\rho_0 = 1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0$ ,  $h_0 = 100$  м,  $h = 200$  м,  $R_0 = h$ ,  $z_0 = 10$  м,  $r_0 = 100$  м,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup>. Можно заметить, что наличие газонасыщенной области имеет значительное влияние на величину звукового давления на небольших расстояниях от источника, изменяется как положение минимумов и максимумов  $TL$ , так и их амплитуда.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен аналитико-численный подход к построению решения для морского волновода с горизонтальной неоднородностью скорости звука. Используя представление решения в виде суммы нормальных мод, удается свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов при модах. Показано, что в случае жесткого основания волновода бесконечная система расщепляется в последовательность конечных линейных систем порядка  $(2N + 2)$  с диагональной матрицей, допускающих эффективное решение методом прогонки. Таким образом, построен эффективный алгоритм учета неоднородности скорости звука в направлении радиальной координаты, позволяющий получить аналитическое представление решения при ступенчатой аппроксимации скорости звука.

Предложенный подход может найти свое применение в качестве аналитического приближения при исследовании волноводов с неоднородностью скорости звука, а также при тестировании программ численного моделирования. В частности, представленная модель может служить для определения интенсивности газовыделений для волновода с газонасыщенным морским грунтом. Действительно, представленное в статье аналитическое решение для указанного волновода дает возможность для решения обратной задачи, когда по результатам акустических измерений можно оценить значение аномалии скорости звука  $\Delta c$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и г. Севастополя в рамках научного проекта № 18-42-920001; при поддержке внутреннего гранта СевГУ 41/06-31 «Разработка теоретических моделей и физических методов исследований шельфа Черного моря».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г. Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997.
3. Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В. // Акуст. журн. 2017. **63**, № 4. С. 389.
4. Григорьев В.А., Петников В.Г., Росляков А.Г., Терехина Я.Е. // Акуст. журн. 2018. **64**, № 3. С. 342.
5. Толстой И., Клей К.С. Акустика океана. М.: Мир, 1969.
6. Buckingham M.J. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2020. **148**. P. 962.
7. Jensen F.B., Porter M.B., Kuperman W.A., Schmidt H. Computational Ocean Acoustic. N.Y.: Springer—Verlag, 2011.
8. Jensen F.B., Ferla C.M. // The Journal of the Acoustical Society of America. 1990. **87**, N 4. P. 1499.
9. Chapman C., Hobro J., Robertsson J. Elastic corrections to acoustic finite difference simulations // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010. Society of Exploration Geophysicists. 2010. P. 3013.
10. Grili S., Pedersen T., Stephanisen P. // Engineering analysis with boundary elements. 1998. **21**. P. 131.
11. Vendhan C.P., Diwan G.C., Bhattacharyya S.K. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2010. **127**, N 4. 3319.
12. Ballard M.S., Sagers J.D. Measurements and modeling of acoustic propagation in a scale model canyon // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. **146**, N 3. P. 1858.
13. Sagers J.D., Lenhart R.D., Ballard M.S. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. **146**, N 3. P. 1903.
14. Liu K., Xu Y., Zou J. // J. Comput. and Appl. Math. 2017. **309**. P. 95.
15. Liu K., Xu Y., Zou J. // Inverse Prob. Sci. Eng, 2013. **21**. P. 197.
16. Belibassakis K.A., Athanassoulis G.A. // Journal of fluid mechanics. 2005. **531**. P. 221.
17. Luo W., Schmidt H. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2009. № 1. P. 52.
18. Lin Y.-T., Duda T.F., Newhall A.E. // Journal of Computational Acoustics. 2013. **21**, N 01. 1250018.
19. Sturm F. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2016. **139**, N 1. P. 263.
20. Lee K., Seong W., Na Y. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. **146**, N 3. P. 2041.
21. De Courcy B.J., Lin Y.-T., Siegmann W.L. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2016. **140**, N 1. P. EL20
22. Dossot G.A., Smith K.B., Badiely M. et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. **146**, N 3. P. 1875.
23. Yangzhou J., Ma Z. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2019. **146**. P. 4802.
24. Huang Z., Xu J., Gong Z. et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2018. **143**. P. 2922.
25. Duan R., Chapman N.R., Yang K., Ma Y. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2016. **139**. P. 70.
26. Bonnel J., Lin Y. T., Eleftherakis D. et al. // The Journal of the Acoustical Society of America. 2018. **143**, N 5. EL405.
27. Папкова Ю.И. // Акуст. журн. 2017. **63**, № 1. С. 50.
28. Гончаренко Б.И., Веденев А.И., Шуруп А.С. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2019. № 5. С. 73. (Goncharenko B.I., Vedenev A.I., Shurup A.S. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2019. **74**, N 5. P. 502.)
29. Будников А.А., Малахова Т.В., Иванова И.Н., Линченко Е.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2019. № 6. С. 107. (Budnikov A.A., Malakhova T.V., Ivanova I.N., Linchenko E.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2019. **74**, N 6. P. 690.)
30. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя дифференциальное уравнение (8), преобразуем интеграл дважды интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \rho(z) \psi_{j,n}(z) \psi_{j,m}(z) dz = \\ & = -\frac{1}{\mu_{j,n}^2} (\rho_0 \psi'_{j,n}(h_0) \psi_{j,m}(h_0) - \rho_0 \psi_{j,n}(h_0) \psi'_{j,m}(h_0) - \\ & \quad - \rho_0 \psi'_{j,n}(0) \psi_{j,m}(0) + \rho_0 \psi_{j,n}(0) \psi'_{j,m}(0) + \\ & \quad + \rho_1 \psi'_{j,n}(h) \psi_{j,m}(h) - \rho_1 \psi_{j,n}(h) \psi'_{j,m}(h) - \\ & \quad - \rho_1 \psi'_{j,n}(h_0) \psi_{j,m}(h_0) + \rho_1 \psi_{j,n}(h_0) \psi'_{j,m}(h_0)) + \\ & \quad + \frac{\mu_{j,m}^2}{\mu_{j,n}^2} \int_0^h \rho(z) \psi_{j,n}(z) \psi_{j,m}(z) dz. \end{aligned}$$

Собственные функции  $\psi_{j,n}(z)$  удовлетворяют как граничным условиям (2), (3), так и условиям непрерывности звукового поля на границах слоев (4), поэтому выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \rho_0 \psi'_{j,n}(h_0) \psi_{j,m}(h_0) - \rho_0 \psi_{j,n}(h_0) \psi'_{j,m}(h_0) - \\ & \quad - \rho_0 \psi'_{j,n}(0) \psi_{j,m}(0) + \rho_0 \psi_{j,n}(0) \psi'_{j,m}(0) + \\ & \quad + \rho_1 \psi'_{j,n}(h) \psi_{j,m}(h) - \rho_1 \psi_{j,n}(h) \psi'_{j,m}(h) - \\ & \quad - \rho_1 \psi'_{j,n}(h_0) \psi_{j,m}(h_0) + \rho_1 \psi_{j,n}(h_0) \psi'_{j,m}(h_0) = \\ & = \psi'_{j,n}(h_0) (\rho_0 \psi_{j,m}(h_0 - 0) - \rho_1 \psi_{j,m}(h_0 + 0)) - \\ & \quad - \psi'_{j,m}(h_0) (\rho_0 \psi_{j,n}(h_0 - 0) - \rho_1 \psi_{j,n}(h_0 + 0)) = 0. \end{aligned}$$

Из последнего тождества следует соотношение ортогональности для собственных функций  $\psi_{j,n}(z)$  в  $L_2[0; h]$  с весом  $\rho(z)$ :

$$\left(1 - \frac{\mu_{j,m}^2}{\mu_{j,n}^2}\right) \int_0^h \rho(z) \psi_{j,n}(z) \psi_{j,m}(z) dz = 0.$$



## Sound Fields in Marine Waveguides with a Heterogeneous Speed of Sound Along the Depth and Path

Yu. I. Papkova

*Department of Mathematics, Sevastopol State University. Sevastopol 299053, Russia.*

*E-mail: [yulia.papkova@gmail.com](mailto:yulia.papkova@gmail.com).*

During waveguide sound propagation in the marine environment, one of the main characteristics is the speed of sound. In hydrophysical waveguides, the speed of sound is mainly a function of depth; the radial coordinate introduces second-order corrections of smallness. Nevertheless, in some cases, significant changes in the characteristics of the waveguide along the radial coordinate are possible, for example, as a result of the influence of anthropogenic factors, sea currents, etc. In the present paper, an analytical representation is constructed for the sound field of a point source in a plane-layered sea waveguide that has an inhomogeneous speed of sound in depth and waveguide path. The waveguide model has radial symmetry, while the sound source is located at an arbitrary point on the waveguide, which leads to a solution that substantially depends on all three spatial coordinates. This solution is based on the decomposition of the waveguide region into cylindrical regions, allowing the construction of an analytical solution of the Helmholtz equation. It is shown that in the case of a constant profile of sound velocity and density in each of the waveguide decomposition regions, the solution of the problem can be obtained explicitly. The results of numerical modeling are presented, the influence of heterogeneity on the characteristics of the sound field is analyzed.

*Keywords:* three-dimensional analytical solution, inhomogeneous hydroacoustic waveguide, normal modes, sound field in the marine environment.

*PACS:* 43.30.-k, 43.30.+m.

*Received 27 July 2020.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2021. 76, No. 3. Pp. 157–166.*

### Сведения об авторе

Папкива Юлия Игоревна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: [yulia.papkova@gmail.com](mailto:yulia.papkova@gmail.com).