О Б З О Р Ы ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Особенности самоорганизации объектов с фрактальной структурой дендритной геометрии

Д. Д. Ружицкая, С.Б. Рыжиков, Ю.В. Рыжикова^а

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Поступила в редакцию 28.05.2021, после доработки 28.06.2021, принята к публикации 01.07.2021.

В работе приводится обзор литературы, посвященный анализу особенностей моделей самоорганизации объектов дендритной формы. На основе теоретических исследований определены особенности скейлинга дендритных структур в световых полях, проявляющиеся в форме устойчивых локальных образований. Рассмотрены общие подходы к решению фундаментальной научной задачи, направленной на установление закономерностей, определяющих количественную связь между особенностями структуры дендритов и их спектральными характеристиками. Нахождение характеристик дендритов может использоваться при разработке новых диагностических средств их исследования.

Ключевые слова: фрактал, дендриты, самоорганизация, L-системы, фрактальная размерность, дифракция.

УДК: 535.015. PACS: 42.25.Fx, 61.43.Hv, 07.05.Tp.

введение

Фракталами (от лат. fractus — дробленый) называют структуры с самоподобными свойствами, т. е. когда часть структуры подобна структуре в целом [1, 2]. В настоящее время активно ведется изучение фрактальных и фракталоподобных (с частичным самоподобием) объектов и процессов [3–5].

Обусловлено это тем, что элементы с фрактальной структурой стали широко использоваться в различных областях науки и техники. В частности они применяются: в биомедицине при диагностике различных заболеваний и разработке новых лекарственных веществ, для интерпретации процессов возникновения жизни на Земле, при исследовании особенностей структурирования нанообъектов в результате процесса самоорганизации [6]. Находят они применение в нейронауке, при создании компактных фрактальных антенн, в нанотехнологиях при проектировке микросхем литографическими методами, а также в других приложениях [5-13]. Из приведенного далеко не полного перечня видно, что изучение фрактальных и фракталоподобных объектов является актуальным, междисциплинарным и требует усилий специалистов самых разных направлений.

Решение проблемы создания природоподобных объектов и систем различного назначения на основе междисциплинарного подхода, опирающегося, в частности, на достижения современных нанотехнологий, во многом определяет направление развития науки в XXI веке [14–17]. Поскольку структурообразование природных систем в процессах их эволюции, как правило, бывает сопряжено с формированием фрактальных признаков при создании их копий и аналогов, возникает необходимость в обеспечении определенных фрактальных характеристик, связанных с присутствием в них самоподобных элементов. В данной работе рассматривается круг вопросов, относящихся к начальным этапам формирования биологических структур на основе процессов самоорганизации. Согласно [6, 7, 9, 11, 18] первичный этап формирования органических систем часто связан с возникновением объектов дендритного типа различной степени сложности. Широкое распространение дендритных структур определило их в качестве объекта исследования во многих научных работах в разных областях знаний [3, 6, 7, 19–24].

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал, характеризующий процесс структурообразования дендритных объектов [20-22, 24]. В ходе экспериментов большое внимание уделялось фрактальной параметризации с целью определения основных тенденций структурной эволюции объектов с использованием ее аппарата.

Фрактальная параметризация зарекомендовала себя в качестве эффективной междисциплинарной технологии, позволяющей решать как фундаментальные, так и прикладные задачи [1, 2, 4, 25-27]. Однако использование ее методов и подходов носит разобщенный характер ввиду отсутствия общей методической и методологической базы. Используемый инструментарий и методики, как правило, не носят специализированного характера и приводят к получению неверифицированных данных. В частности, в литературе часто используются разные подходы к определению фрактальной размерности — основной количественной величины фракталоподобных объектов; как правило, это связано с особенностями самих исследуемых объектов или процессов [1, 2, 6, 21, 28-30].

Целью данной обзорной работы является расширение представлений об особенностях формообразования фрактальных структур дендритов, их оптических свойств и фрактальной параметризации. В представленном обзоре рассматривается проблематика, связанная с использованием фрактальных подхо-

^{*a*} E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru



Рис. 1. Иллюстрация методов определения фрактальной размерности дендритных кластеров: а — клеточный способ, δ — размер ячейки, которыми покрывается дендрит; б — массовый (кластерный) способ, R — размер окружности, внутри которой считаются частицы; в — вид структурной функции (кривая с точками) и ее аппроксимация

дов для выявления особенностей структурирования дендритных объектов, в том числе со спонтанно образующимися центрами роста в процессе их самоорганизации [31].

1. ФРАКТАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДЕНДРИТНЫХ СТРУКТУР

Для дендритных структур количественная оценка самоподобных признаков, проявляющихся как в самих анализируемых объектах, так и в их дифракционных картинах, проводилась на основе определения фрактальной размерности *D* [1, 30, 32, 33]. Согласно литературным данным фрактальную размерность кластеров часто оценивают с позиций клеточного и массового (кластерного) подходов [32–37].

Клеточная размерность *D_b* фрактального объекта определяется в соответствии с формулой [30, 32]

$$D_b = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta},\tag{1}$$

где $N(\delta)$ — количество элементов размера δ , покрывающих объект. Алгоритм расчета клеточной размерности включает следующие этапы.

- Заданный объект покрывается сеткой с размером ячейки δ.
- 2. Подсчитывается число занятых ячеек $N(\delta)$.
- 3. Повторяются этапы 1 и 2 с увеличением размера ячейки δ от минимального до максимального.
- 4. Строится график структурной функции как зависимости в двойном логарифмическом масштабе $\ln(N(\delta))$ от $\ln \delta$.
- 5. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, который представляет собой фрактальную размерность, взятую с обратным знаком. Иллюстрация метода приведена на рис. 1, а.

В общем случае элементы, которыми покрывают анализируемый объект, могут иметь произвольную форму [38], а результат полученного значения фрактальной размерности зависит от минимального размера элемента покрытия и числа сеток, составленных из таких элементов. При расчете фрактальной размерности дифракционных картин клеточный способ представляется неточным. Это связано с тем, что требуется бинаризация анализируемых картин дифракции, т.е. необходим критерий определения

порогового уровня интенсивности (или амплитуды), начиная с которого клетка считается «занятой». Это вносит неоднозначность в вычисление клеточной фрактальной размерности картин дифракции.

Массовая (кластерная) фрактальная размерность оценивается с помощью формулы [30, 32]

$$N = \rho(R/R_0)^D, \quad N \to \infty, \tag{2}$$

где D — размерность кластера, N — число частиц с радиусом R_0 , ρ — коэффициент пропорциональности (учитывает форму кластера), R — радиус наименьшей окружности (или сферы), содержащий кластер. Для упрощения расчетов в (2) было задано $\rho = 1$ [21]. Алгоритм расчета кластерной размерности объектов состоит из следующих этапов.

- Заданный объект (кластер или его картины дифракции) покрывается окружностями, эквидистантно заполняющими всю анализируемую структуру. Задаются радиусы окружностей в виде массива *Ř*.
- 2. Подсчитывается число частиц кластера, попавших в каждую окружность $N_{\tilde{R}}$ (для структуры кластера) или суммарное значение амплитуды (интенсивности) $U_{\tilde{R}}$ внутри каждой окружности \tilde{R} .
- 3. Строится график структурной функции как зависимости в двойном логарифмическом масштабе $\ln(N_{\tilde{R}})$ от $\ln \tilde{R}$ (для структуры) или $\ln(U_{\tilde{R}})$ от $\ln \tilde{R}$ (для картин дифракции).
- Методом наименьших квадратов оценивается наклон графика структурной функции (пункт 3), который представляет собой кластерную фрактальную размерность. Иллюстрация метода приведена на рис. 1, б.

Для количественных оценок фрактальных характеристик дендритных структур и их изображений нами был выбран массовый метод определения фрактальной размерности. Такой способ определения фрактальной размерности дендритной структур и их картин дифракции не требует проведения дополнительной бинаризации для области изображения.

Расчеты показывают, что наиболее устойчивым параметром для оценки самоподобия как фрактальных структур, так и их оптических характеристик является коэффициент скейлинга (масштабной инвариантности) [8, 39, 41], (см. также работу А. М. Зотова и др. в этом журнале за 2019 г.) Изучение скейлинга нашло применение в качестве эффективного инструмента анализа характеристик сложных пространственно-временных структур разной физической природы. В оптических исследованиях оно широко применяется для определения важных закономерностей [8, 39-41]. Большое внимание уделяется определению скейлинговых параметров в лазерных системах при развитии динамического хаоса и распространении излучения в каналах со случайными неоднородностями [16, 29]. Скейлинговые и тесно связанные с ними фрактальные представления успешно используются при решении классических для физической оптики задач дифракции когерентного излучения. Их решение создает физическую основу при разработке новых средств диагностики для анализа апериодических структур с фрактальными свойствами,

в том числе наноструктурированных систем с разным уровнем упорядоченности.

Примеры дендритных структур

В литературе часто рассматриваются 2D-системы дендритов [6, 7, 9, 18, 34, 35, 37, 42]. В настоящей работе особое внимание было обращено на эволюцию 2D дендритных систем с увеличивающимся во времени числом образующих частиц. Исследования такого рода процессов самоорганизации имеют большое значение для описания структурного развития объектов по принципу «снизу вверх» [17, 31]. Этот принцип является основополагающим для конструирования и внедрения в те или иные технологические схемы природоподобных элементов. Кроме того, обнаруженное в ходе исследования дендритов существование предельных размерных и скейлинговых параметров указывает на определенную вероятность образования в ходе дальнейшей эволюции более сложных дендритных и полимерных кластеров. Это дает возможность использовать фрактальный механизм взаимодействия частиц для описания первичных этапов формирования живой материи из неживой.

Особенности динамических характеристик дендритов во многом обусловлены фактом наличия ограничений на изменение фрактальной размерности при увеличении числа образующих частиц. Несмотря на определенный разброс предельных значений фрактальной размерности, наиболее характерным оказывается значение, близкое к величине D = 1.71. Такое критическое значение фрактальной размерности свойственно как искусственно построенным по технологии «ограниченная диффузией агрегация» дендритам неживого происхождения, так и дендритам, формирующим определенные биологические структуры и объекты. Некоторые примеры дендритных объектов, имеющих разную физическую природу, приведены на рис. 2. Так, на рис. 2, а показана дендритная форма расположения кровеносных сосудов в сетчатке человеческого глаза [42, 43]. Для визуализации кровеносных капилляров использовалась флуоресцентная методика. После оцифровки полученного изображения определялась кластерная фрактальная размерность, которая составила для артериальной системы $D = 1.63 \pm 0.05$ (сплошная линия на рис. 2, а), а для венозной системы — $D = 1.71 \pm 0.07$ (пунктирная линия на рис. 2, а). Фрактальный анализ кровеносной системы сетчатки глаза применяется для диагностики ряда заболеваний [44].

Другим примером биологических систем с фрактальными признаками являются колонии бактерий (рис. 2, б). Анализ их разнообразных характеристик получил широкое распространение [18, 45–49]. Традиционно колонии бактерий выращивают на субстратах с высоким уровнем питательных веществ и концентрацией промежуточного слоя агара [18, 45]. Такие «дружественные» условия дают возможность описывать колонии в виде простых дендритных моделей роста отдельных кластеров, которые соответствуют современным представлениям о колониях независимых одноклеточных организмов. Однако бактериальные колонии в природе должны регулярно





Рис. 2. Примеры дендритных структур: *а* — дендритная форма расположения кровеносных сосудов в сетчатке человеческого глаза; фрактальная размерность артериальной системы *D* = 1.63 ± 0.05 (сплошная линия) и венозной системы *D* = 1.71 ± 0.07 (пунктир) [42]; *б* — колония бактерий на поверхности агара [18]; *в* — тезиограмма молока [19], *г* — медузы; *д* — нейроны верхней височной коры человека (звездчатый нейрон *D* = 1.66, пирамидный нейрон *D* = 1.67) [52]; *е* — дендриты диоксида марганца в тонкой трещине [9]

справляться с враждебными условиями окружающей среды. Часто враждебные условия создаются в чашке Петри, путем создания низкого уровня питательных веществ. При этом полученные «кластеры» бактерий могут иметь различную структуру в зависимости от начальных условий формирования и обладать отличающимися фрактальными свойствами.

На основе фрактальной параметризации предлагаются попытки классификации колоний бактерий в зависимости от среды их роста. Так, в работе [47] предлагается метод, основанный на определении масштабных параметров кластеров (колоний), который позволяет определять концентрацию питательных веществ в среде, где росла колония, и классифицировать колонии по этому признаку. Существует гипотеза, что если оказывать влияние на динамику фрактальных свойств колонии бактерий в процессе ее роста, то будет возможно получить колонию с заданными свойствами и желаемой фрактальной размерностью [38, 48].

Кроме того, отметим известный факт формирования ансамблей клеток двустворчатых моллюсков, морских звезд, морских ежей, медуз, нейронов, фрактальная размерность которых варьируется в пределах 1.6–1.8 [50, 51].

На основе проведенного анализа результатов научных исследований геометрических критических явлений в дендритных биосистемах [6, 7, 18, 34, 38, 45–52] подтверждается эффективность и универсальность фрактальных методов анализа, являющихся важной составляющей интеграционных процессов в современной науке.

2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ДЕНДРИТНЫХ СТРУКТУР

Удобным инструментом моделирования роста дендритов могут служить программы определения пространственных распределений частиц с использованием свойств агрегационных моделей частица кластер.

Для описания дендритных систем распространение получили модели баллистической агрегации (БА) [53, 54] и диффузия, ограниченная агрегацией (ДОА, называемая моделью Виттена—Сандера) [55, 56]. В своем классическом представлении модели БА и ДОА описывают широкий класс растущих кластеров различного происхождения. Модель ДОА может быть расширена для различных размерностей пространств [57] или модифицирована для описания роста конкретного кластера (например, дендритного роста при электроосаждении металла [3, 58]).

Модель ДОА имеет существенный недостаток: построение кластера происходит на решетке, а значит, частица имеет ограничения на перемещения (рис. 3). Поэтому актуальны модификации модели ДОА на основе координатных представлений, которые позволяют частице свободно двигаться в пространстве роста [59, 60], см. также работу авторов в этом журнале за 2018 г.,а также иные альтернативные



Рис. 3. a — Классическая модель Виттена—Сандера: S — затравочная частица. Окружность, отмеченная сплошной линией — $R_{\rm gen}$, окружность генерации частиц. Пунктирная окружность — $R_{\rm ret}$, окружность возврата частиц. θ — начало движения, 3 — присоединенная частица, светлым показаны частицы, образующие дендрит; δ — предложенная модификация 1 — частица движется с большим шагом, 2 — переключение на малый шаг движения. Стрелками показаны возможные направления движения. Точечная линия — возврат частицы при пересечении окружности возврата, R_z — расстояние, на котором происходит смена шага



Рис. 4. Примеры моделирования дендритных структур со стохастически образующимися центрами [31]: а — модификация модели «ограниченная диффузией агрегация», б — модель «первичного бульона»

модели роста кластеров, например, на основе Lсистем [33, 61]. Такие системы позволяют строить кластеры, состоящие из множества частиц, простым способом, не требующим значительных затрат на расчет траектории движения частиц.

В работе Д. Д. Ружицкой и др. в этом журнале за 2018 г. построение дендритных структур осуществляется с учетом свойств ассоциации наночастиц в двумерном пространстве с использованием агрегационных моделей частица-кластер на основе модификации модели Виттена–Сандера. Иллюстрация модели приведена на рис. 3, б. В отличие от алгоритма построения дендрита, предложенного Виттеном—Сандером [55, 56], в котором пространство покрывается равномерной сеткой (рис. 2,*a*), в предложенной в этой работе модификации сетка отсутствует. На начальном этапе, когда частица находится на значительном удалении от затравки (окружность генерации частиц R_{gen} , показана зеленым), частица дискретно перемещается (рис. 3, 6, позиция 1). При приближении к затравке или уже соединившимся частицам на расстояние $R_z = 4R_{moll}$ (R_{moll} — радиус одной частицы) молекула начинает свое перемещение с мелким шагом (рис. 4, 6, позиция 2). В случае если частица, двигаясь по случайной траектории, переходит границу, отмеченную синей окружностью $R_{\rm ret}$, она возвращается на исходную окружность в исходную точку (пунктирная линия на рис. 3, б). В алгоритме Виттена—Сандера такая частица уничтожалась и выпускалась новая. В процессе роста дендрита окружности $R_{\rm gen}$ и $R_{\rm ret}$ увеличиваются в размере. Ограничивающим рост дендрита фактором в модификации, предложенной в работе Д. Д. Ружицкой и др., является число частиц, которые будет содержать выращенный кластер.

Движение составляющих частиц дендрита, формирующихся в рамках модели ДОА в предложенном алгоритме, рассчитывается в виде последовательных перемещений на расстояния Δr , которое изменяется при приближении частицы к формирующемуся дендриту, за каждый шаг цикла:

$$x_{k+1,j} = x_{k,j} + \Delta r \cos \varphi, y_{k+1,j} = y_{k,j} + \Delta r \sin \varphi.$$
(3)

Здесь угол φ характеризует отклонение частиц от движения к центру дендрита: $\varphi = 2\pi \cdot \text{rand}$, где rand — генератор случайных чисел от 0 до 0.999..., x, y — координаты частиц кластера, индекс j номер частицы, индекс k — номер шага. Кластер формируется из частицы-затравки, расположенной в центре области его формирования. В алгоритме Виттена—Сандера частица перемещалась в соседнюю ячейку случайным образом, ее путь выбирался методом Монте-Карло [55, 56].

Модель в работах [30, 40] И работе Д. Д. Ружицкой и др. (2018 г.) может быть расширена для получения дендритных кластеров. характеризующихся более плотным пространственным распределением частин. а именно модели БА. Для этого необходимо задать упорядоченное прямолинейное движение по направлению к затравочной частице.

Сформированные таким образом дендриты имеют более приближенную к природным объектам форму, чем аналогичные, построенные с применением решетчатой модели. Приведенная модель может быть модифицирована изменением вероятности присоединения новой частицы к формирующемуся кластеру, а также дополнена или расширена различными факторами взаимодействия между частицами [59, 62], например учетом дипольного взаимодействия, как в [58, 63]. Добавление такого взаимодействия ведет к изменению структурных признаков, а оценка фрактальных свойств позволяет оценить начальные условия роста кластера [58, 64, 65].

Существуют модели, применимые к частным видам дендритных систем. Так, модель, предложенная Эденом, осуществляет рост дендрита без перемещения частиц по какой-либо траектории [66]. Эта модель используется для описания роста опухолей и некоторых видов колоний бактерий. В модели Эдена используется сетка роста, в центр которой помещается частица-затравка. На следующем этапе определяются возможные участки роста. На данном этапе этими участками являются соседние с затравкой ячейки. Затем с заданной вероятностью кластер начинает свой рост с добавлением новых частиц к нему. Сформированные в этой модели кластеры не имеют разветвленной структуры, как в модели ДОА, и имеют более плотное заполнение, чем кластеры БА.

Кроме координатных моделей, для описания роста колоний бактерий используют модификации уравнения Фишера-Колмогорова [67], включающие в себя коэффициент диффузии, а также сведения об отдельных особях бактерий в колонии или среде, в которой осуществляется рост системы [47, 68-70]. Такой метод моделирования позволяет получить информацию о том, в каких условиях рос и развивался реальный кластер. Кроме того, исследование в [71] показало, что по определенным параметрам (масштабным экспонентам) можно выявить больные особи. Кластеры, полученные на основе модификаций уравнения Фишера-Колмогорова, могут иметь различную форму: от плотно заполненных, как в модели Эдена, до сильно разветвленных, как в модели ДОА (рис. 2, *б*).

Еще одним способом моделирования дендритных систем является применение L-систем [69-71]. L-системы представляют собой параллельную повторяющуюся процедуру. Так, в этом способе задается начальная ветвь будущего дендрита, а затем эта ветвь начинает «делиться» по правилу «движения черепахи» (движение вперед, движение назад, поворот налево, поворот направо) [71]. Базовые L-системы не учитывают информацию об окружающей среде, однако могут быть расширены для учета внешней среды (так называемые открытые L-системы) [72, 73]. Главный недостаток L-систем состоит в сложности разработки правил замены, а также не всегда очевидна взаимосвязь между правилами построения и результирующими структурами.

Предложенная в [31] новая расчетная схема формирования дендритных образований со спонтанно образующимися центрами роста является ценной альтернативой агрегационным моделям частица-кластер («ограниченная диффузией агрегация (ДОА)», «баллистическая агрегация (БА)»). В новой модели [31] учтено взаимодействие между составляющими дендрит частицами при одновременном движении нескольких частиц. Схема расчета включает задание оригинального количественного критерия образования центров роста кластера. В качестве количественного параметра вводится число частиц в одной ячейке рабочей сетки, при достижении которого частицы внутри данной ячейки заменяются новым центром роста дендрита. Расчетная схема позволяет создавать простым заданием входных параметров фрактальные дендритные кластеры с разной геометрией и разной степенью разреженности.

Стохастическая модель агрегации [31] дает новые возможности целенаправленного влияния на рост дендритов со спонтанно образующимися центрами роста, что может использоваться в качестве имитации морфогенеза различных биологических систем. На рис. 4 приведены примеры моделирования дендритных структур со случайным образованием центров роста. На рис. 4, а показан вариант модели, близкой к классическим вариантам центрально– симметричных дендритных образований [36, 37]. Число частиц, составляющих дендритное образова ние, N = 12000. На рис. 4, б показана сформированная дендритная структура в рамках реализованной модели «первичного бульона», предложенной в свое время академиком А.И. Опариным для описания возникновения жизни на Земле. В процессе образования кластеров формируется разветвленная и расходящаяся по всей расчетной области дендритная система полимерного типа. Такие структуры используется в материаловедении для синтеза и анализа новых свойств полимерных дендритов [74].

3. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕНДРИТНЫХ КЛАСТЕРОВ

Анализ оптических характеристик рассматриваемых структур дендритного типа (распределения амплитуды поля и интенсивности дифрагированных волн) проводится на основе использования формулы Рэлея—Зоммерфельда [75].

Полученное пространственное распределение частиц, заданное формулой (3), можно рассматривать как совокупность рассеивающих центров с бинарной функцией пропускания F^0 :

$$F^{0}(x,y) = \begin{cases} 1, & x_{k,j}, y_{k,j} \in C\\ 0 & x_{k,j}, y_{k,j} \notin C, \end{cases}$$
(4)

где C представляет собой функцию пространственного распределения рассеивающих центров. Формула (3) анализируемых структур упрощает расчет их дифракционных картин.

Поле дифракции в дальней зоне характеризуется амплитудой A_q :

$$A_q = \sum_{m=1}^{J} F_m^0 \exp\{\pm 2\pi i m \sin \delta\} \omega_J^{(m-1)(q-1)}, \qquad (5)$$

где $\omega_J = \exp\{-2\pi i s/J\}, q$ — нормированная пространственная частота, $i = \sqrt{-1}, J$ — число элементов, s — масштабирующий множитель, δ — угол падения светового луча, F_m^o — бинарная функция пропускания фрактального объекта.

Отметим, что фурье-спектры (5) классических фрактальных объектов наиболее отчетливо передают их самоподобные свойства [76-78]. Однако пространственный спектр дендрита не имеет выраженных самоподобных признаков, что видно из рис. 5. Качественный анализ рис. 5 показывает, что в ближней зоне (рис. 5, б) сохраняется некоторое соответствие распределения поля дифрагирующей волны и исходной структуры (рис. 5, а). Следовательно, предполагается, что в этой зоне также будут сохраняться самоподобные свойства дендрита. В дальней зоне картины пространственных фурьеспектров образующих частиц дендрита представляют собой по форме совокупность концентрических колец разной интенсивности (рис. 5, в), радиусы которых определяются параметрами задачи агрегации (размеры дендрита, размеры составляющих дендрит частиц). Поэтому для анализа самоподобных свойств в картинах дифракции дендритов целесообразно установить границу, в пределах которой фрактальные признаки остаются различимы.



Рис. 5. Результаты моделирования структур и дифракционных картин в рамках модели ДОА: a — сформированный дендрит, состоящий из 10000 частиц. Различные оттенки соответствуют изменению частиц на 2100; δ — картина дифракции в ближней зоне, $z = 10R_{\rm mol}$, z — расстояние до экрана наблюдения, $R_{\rm mol}$ — радиус одной молекулы, образующей дендрит; в — картина дифракции в дальней зоне (фурье-преобразование)



Рис. 6. а — Зависимость кластерных размерностей D_{mass} структуры дендрита (1) и его дифракционных картин (2-3) от числа частиц N: 2 — соответствует условиям z = 10d, λ = d, где d — расстояние между соседними частицами дендрита; 3 — соответствует фурье-преобразованию. Пунктирной линией отмечена зона неустойчивости, которая соответствует N = 2100; б — эволюция дендрита в процессе увеличения числа частиц N

Для дендритных структур количественная оценка самоподобных свойств, проявляющихся как в самих анализируемых объектах, так и в их дифракционных картинах, проводилась на основе определения «массовой» (кластерной) фрактальной размерности D_{mass} [30, 32]. Для примера на рис. 6, а приведены зависимости средней кластерной фрактальной размерности от числа составляющих частиц кластера *N*. Усреднение проводилось по 10 реализациям фрактального роста дендрита. На рис. 6, б показана эволюция дендрита в процессе увеличения числа составляющих частиц. Кривая 1 показывает зависимость кластерной фрактальной размерности дендрита D_{mass} от числа составляющих его частиц N. Так, при изменении N от 2100 до 15000 средняя фрактальная размерность кластера D_{mass} (рис. 5, *a*) изменялась в интервале от 1.65 до 1.72. Кривые 2-3 на рис. 6, а характеризуют изменение D_{mass} в картинах дифракции при разных начальных условиях. Приведенное значение кластерной размерности согласуется с данными в [32, 36, 37, 45, 50, 64].

Полученные результаты указывают на то, что массовые фрактальные размерности $D_{\rm mass}$ структуры дендрита и картины его дифракции имеют близкие значения. Причем наибольшее соответствие значений $D_{\rm mass}$ достигается в ближней зоне (рис. 6, *a*, кривая 2) при следующих условиях: z = 10d, $\lambda = d$, где d — расстояние между соседними частицами дендрита. Приведенной зависимости (рис. 6, *a*, кривая 2) свойствен слабый осциллирующий характер и близость значений $D_{\rm mass}$ к соответствующим значениям кластерной фрактальной размерности формирующегося дендрита.

При числе частиц дендрита N < 2100 наблюдается неустойчивая область изменения значений кластерной фрактальной размерности $D_{\rm mass}$ (отмечена пунктиром на рис. 7, *a*) и согласуется с [64]. Ее наличие указывает на значительное влияние случайных факторов при формировании таких структур и невыраженность самоподобных свойств при малом числе образующих частиц N.

Из рис. 6, а установлено определенное соответствие фрактальных признаков рассеивающих центров первоначальных структур и распределения их дифракционных максимумов. Результаты полученных фрактальных свойств [40, 79, 80] (см. также работу авторов в этом журнале за 2018 г.) в характеристиках рассматриваемых дендритов указывают на дополнительные диагностические возможности фрактальных методов для широкого класса стохастических структур дендритного типа.

Результаты исследований [40, 79] указывают на мультискейлинговую особенность анализируемых дендритных структур. Для определения коэффициентов скейлинга использовались границы полученных зон неустойчивости: 2100 частиц для модели ДОА и 1500 частиц для модели БА. Иллюстрация определения коэффициентов скейлинга приведена на рис. 7. В модели ДОА (рис. 7, а) область ОА содержит 2100 частиц, зона ОВ – 4200 частиц, ОС - 6300 частиц и т.д. Для расчета модели БА аналогичные области содержали 1500, 3000 и 4500 частиц соответственно (рис. 7, б). Детальное описание расчета приведено в [79]. Для структур дендритов модели БА и ДОА вычисленные параметры скейлинга принимают значения: $\zeta_1 = 1.3 \pm 0.1;$ $\zeta_2 = 1.6 \pm 0.1; \ \zeta_3 = 1.85 \pm 0.1; \ \zeta_4 = 2.1 \pm 0.1$ и $\zeta_{11} = 1.4 \pm 0.1; \ \zeta_{22} = 1.8 \pm 0.1; \ \zeta_{33} = 2.1 \pm 0.1;$ $\zeta_{44} = 2.4 \pm 0.1$ соответственно. Усреднение проводилось по 30 реализациям дендритов.

Приведенные коэффициенты скейлинга, характеризующие масштабную инвариантность, в сочетании с определением кластерной фрактальной размерности и областью скейлинга могут использоваться для идентификации фрактальных свойств дендритных систем. В [79] показано наличие широкой обла-



Рис. 7. Определение коэффициентов скейлинга для модели ДОА (а) и модели БА (б). Цветовая палитра соответствует изменению N дендрита на 1500 (БА) и 2100 (ДОА) частиц. Буквенные обозначения соответствуют выделенным границам областей скейлинга

сти скейлинга и множественность коэффициентов скейлинга систем дендритной геометрии. Причем массовые фрактальные размерности D структуры дендрита и картины его дифракции в ближней зоне имеют близкие значения. Результаты работы могут использоваться для улучшения и разработки новых методов диагностики фракталоподобных систем дендритных образований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение закономерностей, определяющих корреляцию между фрактальными свойствами дендритов и их картинами дифракции, находится в русле решения фундаментальной проблемы фрактальной оптики, направленной на установление общих закономерностей, определяющих связь между особенностями структуры фракталоподобных объектов и их спектральными характеристиками. Ее решение применительно к дендритам позволит выработать единые критерии для идентификации широкого класса фрактальных кластеров.

Рассмотренные модели построения случайных дендритных структур можно использовать для описания первичного этапа формирования процессов структурирования материи применительно к некоторым биологическим объектам. Кроме того, найденные границы неустойчивости изменения значений фрактальной размерности для различных моделей частица—кластер можно положить в основу выделения локальных областей скейлинга структур центрально-симметричных дендритов. Это позволит выработать более общий подход идентификации дендритных структур и их картин дифракции, включающий как определение фрактальной размерности, так и локальные параметры скейлинга (коэффициенты и области скейлинга).

Авторы выражают благодарность профессору П.В. Короленко за помощь в проведении работы и за обсуждение ее результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: «Институт компьютерных исследований», 2002. (Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. Freeman: N.Y. 1983.)
- Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Шапкина Н. Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 2. С. 20. (Bogolyubov A. N., Petukhov A. A., Shapkina N. E. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2011. 66, N 2. P. 122.)
- Canabal J.A., Otaduy M.A., Kim B., Echevarria J. // Eurographics. 2020. 39, N 2. P. 597.
- Рыжикова Ю.В., Ковальчук М.В., Короленко П.В., Косырев А.В. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2020. № 4. 2040301.
- Кравченко В. Ф., Кравченко О. В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018.
- 6. *Каретин Ю. А.* Самоорганизация живых систем. Краткий курс синергетики для биологов. Владивосток: Мор. гос. ун-т., 2017.
- 7. *Кидалов В. Н., Хадарцев А. А.* Тезиография крови и биологических жидкостей. Тула: Тульский полиграфист, 2009.
- Ковальчук М. В., Короленко П. В., Рыжикова Ю. В. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2015. № 1. 151401.
- Краевой С. А., Колтовой Н. А. Диагностика по капле крови. Кристаллизация биожидкостей. Книга З. Тезиография. Кристаллизация тестовых растворов. Москва– Смоленск. // Электронный математический и медикобиологический журнал «Математическая морфология», 2016.
- 10. Metze K. // Expert Rev. Mol. Diagn. 2013. 13(7). P. 719.
- Squire L., Berg D. Bloom F., du Lac S. et al. // Fundamental neuroscience. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sidney, Tokyo: Academic Press. Elsevier Inc., 2008.

- 12. Hagopian A., Doublet M-L., Filhol J-S. // Energy Environ. Sci. 2020. 13. P. 5186.
- Ivashkina O. I., Vorobyeva N. S., Gruzdeva A. M., Roshchina M. A. et al. // Acta Naturae. 2018. 10. N 2(37). P. 37.
- 14. Ковальчук М.В. Наука и жизнь: моя конвергенция. М.: ИКЦ «Академкнига», 2012.
- Ковальчук М. В. Конвергенция наук и технологий прорыв в будущее // Российские нанотехнологии. 2011. 6, № 1-2. С. 13.
- Короленко П.В., Зотов А.М., Рыжикова Ю.В. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2018. № 5. 1850402.
- 17. Марголин В.И., Жабрев В.А., Лукьянов Г.Н., Тупик В.А. Введение в нанотехнологию: Учеб. пособ. 1-е изд. СПб: Лань, 2012.
- Ben-Jacov E. // Contemporary Physics. 1997. 38, N 3. P. 205.
- 19. Карпов С. // Фотоника. 2012. 33, № 3. С. 52.
- Антонов Д. Н., Бурцев А. А., Бутковский О. Я. // ЖТФ. 2016. 86, Вып. 1. С. 110 (Antonov D. N., Burtsev A. A., Butkovskii O. Ya. // Technical Physics. 2016. 61. Р. 108.)
- Самсонов В. М., Кузнецова Ю. В., Дьякова Е. В. // ЖТФ. 2016. 86(2). С. 71. (Samsonov V. M., Kuznetsova Yu. V., D'yakova E. V. // Technical Physics. 2016. 61(2). P. 227.)
- 22. Александров Д. В., Галенко П. К. // УФН. 2014. **184**, № 8. С. 833. (Alexandrov D. V., Galenko P. K. // Physics-Uspekhi. 2014. **57**. Р. 771.
- Madaan K., Kumar S., Poonia N., Lather V., Pandita D. // J. of Pharmacy & BioAllied Sciences. 2014. 6(3). P. 139.
- 24. Mohanty S., Biswal S. K. // IJPRAS. 2015. **4**(4). P. 18. www.ijpras.com.
- 25. Potapov A., Ushakov P., Gil'mutdinov A.Kh. // Phys. Wave Phenom. 2010. 18(2). P. 119.
- Кравченко В., Масюк В. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. В 3-х кн. М.: ИПРЖР, 2002.
- 27. Потапов А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
- Korolenko P., Ryzhikov S., Ryzhikova Yu.V. // Physics of Wave Phenomena. 2013. 21(4). P. 256.
- 29. Зотов А., Ким Е., Короленко П., Рыжикова Ю. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. 18, № 12. С. 10.
- Рыжикова Ю., Рыжиков С. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2018. № 5. 1850401.
- Косырев А., Короленко П., Рыжикова Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. 85, № 1. С. 74. (Kosyrev A., Korolenko P., Ryzhikova Yu.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. 85. N 1. P. 57.
- 32. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. (Feder J. Fractals. New York, Plenum Press, 1988.).
- 33. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: «Техносфера», 2006.
- 34. Исаева В. // Вестник ДВО РАН. 2015. № 1. С. 5 .
- 35. Безносюк С., Лерх Я., Жуковская Т. // Ползуновский вестник. 2005. № 4-1. С. 143.
- 36. *Меньшутин А.* // Вестник Нижегородского университета имени Н. Лобачевского. 2013. № 2(2). С. 46.
- Nicolás-Carlock J. R., Carrillo-Estrada J. L., Dossetti V. // Sci. Rep. 2016. 6. 19505.
- 38. Jiang M., Ko J., Liu W., Chiang J. // Chinese J. Phys.1994. 32, № 5 - 1. P. 451.
- 39. Гридчина В., Короленко П., Рыжикова Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2015. 79, № 12. С. 1691.

(Gridchina V., Korolenko P., Ryzhikova Yu.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2015. **79**. N 12. P. 1480.

- Ryzhikova Yu., Mukhartova Iu. and Ryzhikov S. // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 012059.
- Korolenko P., Logachev P., Ryzhikova Yu.V. // Physics of Wave Phenomena. 2015. 23, N 1. P. 46.
- 42. Mainster M. // Eye. 1990. 4. P. 235.
- Liew G., Wang J.J., Mitchell P., Wong T.Y. // Retinal Vascular Imaging. 2008. 1. N 2. P. 156.
- 44. Зуева М. // Офтальмология. 2014. 11, № 1. С. 4.
- Ben-Jacov E., Shochet O., Tenenbaum A., Cohen I. // Phys.1 Rev. E. 1996. 53, N 2. P. 1835.
- Fujikawa H., Matsushita M. // J. of the Phys. Society of Japan. 1989. 58(11). P. 3875.
- Bonachela J., Nadell C., Xavier J.B., Levin S. // J. Stat. Phys. 2011. 144(2). P. 303.
- Tronnolone, H., Tam, A., Szenczi, Z. Green J.F.et al. // Sci. Rep. 2018. 8. 5992.
- 49. Gralka M., Hallatschek O. // Elife. 2019 12, N 8. P. 1.
- 50. Симонян Г., Симонян А.Г. // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 3-2. С. 268.
- Family F., Masters B., Platt D. // Physica D. 1989. 38.
 P. 98.
- Исаева В., Каретин Ю., Чернышев А., Шкуратов Д. Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе. Владивосток: Институт биологии моря ДВО РАН, 2004.
- 53. Sutherland D. N. // J. Colloid Interface Sci. 1967. 25, N 3. P. 373.
- 54. Vold M. J. // J. Colloid Scie. 1959. 14, N 2. P. 168.
- 55. Witten Jr T.A., Sander L.M. // Phys. Rev. Lett. 1981. 47, N 19. P. 1400.
- 56. Witten T. A., Sander L. M. // Phys. Rev. B. 1983. 27, N 9. P. 5686.
- 57. Meakin P. // Phys. Rev. A. 1983. 27, N 3. P. 1495.
- 58. Cronemberger C., Sampaio L. C., Guimarzes A. P., Molho P. // Phys. Rev. E. Stat Nonlin Soft Matter Phys. 2010. 82(2). 021403.
- 59. Jungblut S., Joswig J-O., Eychmbller A. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2019. 21(10). P. 5723.
- 60. Menshutin A.Yu., Shchur L. // Phys. Rev. E. 2006. **73**. 011407.
- 61. Liu D., Zhou W., Qiu Z., Song Xu. // Fractal Fract. 2017. 1, N 12. P. 1.
- 62. Xu L., Mould D. // Proceedings of the Second International Conference on Computer Graphics Theory and Applications. Barcelona, Spain, March 8-11, 2007.
- 63. Pastor-Satorras R., Rubн J. M. // Phys. Rev. E. 1995. **51**, N 6. P. 5994.
- 64. Nicolás-Carlock J. R., Carrillo-Estrada J. L., Dossetti V. // Sci. Rep. 2017. 7. 3523.
- 65. Maghan M. C., Li G., Chen X., Archer L.A. et. al. // Sci. Adv. 2021. 7, N 8. P. 1.
- 66. *Eden M.A.* // Dynamics of fractal surfaces. 1961. **4**. P. 223.
- 67. Adomian G. // Appl. Math. Lett. 1995. 8, Iss. 2. P. 51.
- 68. Gralka M., Hallatschek O. // Elife. 2019. 12, Is. 8. P. 1.
- Giverso C., Verani M., Ciarletta P. // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. 2016.
 15, Is. 3. P. 643.
- Giverso C., Verani M., Ciarletta P. // Royal Soc. publishing interference. 2015. 12, N 104. P. 1.
- Prusinkiewicz P., Hanan J., Hammel M., Mech R. // Proceedings of the 2nd CSIRO Symposium on Computational Challanges in Life Sciences, CSIRO Publishing, 1996.
- 72. Desbenoit, B., Galin, E., Akkouche, S. // Computer Graphics Forum. 2004. 23, Is. 3. P. 341.

13

//

- 73. Prusinkiewicz, P., James, M., Mech, R. // In Proceedings of SIGGRAPH. 1994. **28**. P. 351.
- 74. Soleyman R, Adeli M. // Polym. Chem. 2015. 6. P. 10.
- Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. (Goodman J. W. Introduction to fourier optics. New York, MCGRAW-HILL BOOK Company, 1968).
- Арзамасцева Г., Евтихов М., Лисовский Ф., Мансветова Е. // Изв. РАН. Сер. физ.. 2010. 74, № 10. С. 1432. (Arzamastseva G., Evtikhov M., Lisovskii F., Mansvetova E. // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.

2010. 74, N 10. P. 1370.)

№ 1. C. 62.

- 77. Macia E. // Rep. Prog. Phys. 2012. 75. 036502.
- 78. Korolenko P., Ryzhikova Yu.
- IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. **862**. Р. 052079. 79. Ружицкая Д., Рыжикова Ю., Рыжиков С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. **82**, № 11. С. 1512. (Ruzhitskaya, D.D., Ryzhikov S. B., Ryzhikova Y. V. //
- (Киглизкици, D.D., Кугликов З. Б., Кугликова Т. Ү. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2018. **73**. Р. 306.
 80. Короленко П., Косырев А., Ружицкая Д. Рыжиков С., Рыжикова Ю. // Физические основы приборостроения. 2021. **10**(39),
- Features of Self-Organization of Objects with a Fractal Structure of Dendritic Geometry

D. D. Ruzhitskaya, S. B. Ryzhikova, Yu. V. Ryzhikova^a

Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia E-mail: ^aryzhikovaju@physics.msu.ru

Features of self-organization models of dendritic objects are reviewed. The features of scaling of dendritic structures in light fields, which manifest themselves in the form of stable local formations, are determined on the basis of theoretical studies. General approaches to solving a fundamental scientific problem aimed at establishing patterns that determine the relationship between the features of the structure of dendrites and their spectral characteristics are considered. Finding the characteristics of dendrites can be used in the development of new diagnostic tools for their study.

Keywords: fractal, dendrites, self-organization, L-systems, fractal dimension, diffraction. PACS: 42.25.Fx; 61.43.Hv; 07.05.Tp. *Received 28 May 2021*.

English version: Moscow University Physics Bulletin. 2021. 76, No. 5. Pp. 253-263.

Сведения об авторах

- 1. Ружицкая Дарья Дмитриевна аспирант; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru.
- 2. Рыжиков Сергей Борисович доктор пед. наук.; тел. (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru.
- 3. Рыжикова Юлия Владимировна канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru.