СТАТЬИ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Применение метода усреднения к динамике частиц в периодических структурах

О. Е. Шишанин[a]
Московский политехнический университет, факультет базовых компетенций
Россия 107023, Москва, Большая Семеновская, 38

Поступила в редакцию 06.07.2021, после доработки 21.07.2021, принята к публикации 03.08.2021.

Рассмотрен метод усреднения в общем виде с точностью до четвертого порядка включительно. В качестве примера изучается движение заряженной частицы в разрывном сильнофокусирующем магнитном поле. Представленную методику можно применить при исследовании колебаний частиц в ондуляторах и каналировании частиц в кристаллах.

Ключевые слова: градиент магнитного поля, ряд Фурье, матричное уравнение, операция усреднения, асимптотические решения.
УДК: 537.8. PACS: 41.20.-q.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена методика получения и решения дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами применительно к определенному типу физических задач. В частности, для исследования свойств синхротронного излучения необходимо иметь решение динамической задачи для электронов в циклических ускорителях. Первые исследования были проведены для аксиально-симметричного магнитного поля и выявили заметное влияние бетатронных колебаний на характеристики синхротронного света [1]. Однако в современных ускорителях динамика частиц рассматривается в основном в фазовом пространстве и матричным методом и это создает трудности для решения задачи об излучении. Для накопительных колец, как правило, используются три основные ячейки; это система FODO (F и D означают фокусирующие и дефокусирующие квадруполи, O — диполи), ячейка Чесмена—Грина и ахроматический триплет [2, 3]. Заметим, что в современных монографиях по синхротронному излучению [4–6] роль бетатронных осцилляций при формировании излучения не рассматривалась. Это говорит об актуальности изучаемой тематики.

Для решения задачи в обычном трехмерном пространстве был выбран метод усреднения Боголюбова—Митропольского [7], который уже разработан до второго порядка точности. Метод усреднения обычно применяют при решении уравнений Ван-дер-Поля, Дюффинга, Матье [8], но он уже вошел в университетские курсы по дифференциальным уравнениям [9]. В данном случае для решения поставленной задачи необходимо было получить решения с большей точностью. В связи с этим теория усреднения была пролонгирована методом итераций до четвертого порядка. Оказалось, что эти полученные впервые результаты по методу усреднения имеют общий характер и их можно применять к другим задачам. Для иллюстрации методики в качестве примера была рассмотрена задача по движению заряженной частицы в другой системе FODO (с сильной фокусировкой). Полученные здесь результаты по частоте согласуются с известной в теории ускорителей формулой [10]. Что касается динамики частиц в ондуляторах и кристаллах, то здесь задача также сводится к поиску решений уравнения Хилла [11].

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Пусть, например, заряженная частица двигается по замкнутой орбите, состоящей из N периодов, и фокусирующие и дефокусирующие магнитные поля действуют на криволинейных участках длиной a и с радиусом R, а расстояние между магнитами l. Тогда длина орбиты

$$S = 2\pi R + 2Nl = 2\pi R_0,$$

где R_0 — так называемый средний радиус, причем $R_0 = R(1+k)$, а малый параметр $k = Nl/\pi R = l/a \ll 1$.

Если в задаче изучаются, наряду с вертикальными колебаниями, только малые радиальные осцилляции, то можно сделать ряд упрощений, касающихся радиального движения. Вначале усредним или распространим по всей длине периода ведущее магнитное поле H_0 и будем считать, что частица движется по кругу с радиусом R_0. Тогда компоненты магнитного поля можно представить как

$$H_z = H_0\left(\frac{a}{a+l} - n(\tau)\frac{\rho}{R}\right), \quad H_r = -H_0 n(\tau)\frac{z}{r}, \quad (1)$$

где

$$n(\tau) = \frac{4n}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \cos(2\nu+1)(\tau-\tau_1),$$

$$\tau = N\varphi, \quad \tau_1 = \frac{\pi a}{2(a+l)}, \quad g_\nu = \frac{\sin(2\nu+1)\tau_1}{2\nu+1},$$

n — показатель спадания магнитного поля. Функция $n(\tau)$ «включает» фокусировку и дефокусировку в соответствующих местах траектории, в прямоугольных промежутках она равна нулю. В точках разрыва, согласно теореме Дирихле, она дает полусумму значений.

[a] E-mail: olegsh55@gmail.com

С помощью (1) малые осцилляции заряженной частицы будут описываться следующими уравнениями:

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2}+\frac{1}{N^2}(1-(1+k)^2n(\tau))\rho=0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}+\frac{1}{N^2}(1+k)^2n(\tau)z=0, \tag{3}$$

где $\rho = r - R_0$. Угловая скорость, например для электрона, определится как

$$\dot\varphi=\frac{a\omega}{a+l}(1-\frac{\rho}{R_0}+\frac{3}{2}\frac{\rho^2}{R_0^2}+\frac{1}{R^2}\int n(\tau)(z\dot z-\rho\dot\rho)dt), \tag{4}$$

где частота $\omega = ceH_0/E$; она уменьшится в $1+k$ раз из-за влияния прямолинейных промежутков.

МЕТОД БОГОЛЮБОВА–МИТРОПОЛЬСКОГО С УЧЕТОМ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Попытаемся найти асимптотическое решение, например уравнения (3), способом усреднения. Согласно этой теории [7], представим уравнение (3) в стандартной форме

$$\frac{dZ}{d\tau}=\varepsilon\cdot G\cdot Z, \tag{5}$$

где компоненты вектора Z равны z and $(1/\varepsilon)dz/d\tau$. Здесь матрица

$$G=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -g(\tau) & 0\end{pmatrix},\quad g(\tau)=(1+k)^2n(\tau),$$

а $\varepsilon = 1/N$ будет малым параметром.

Можно рассмотреть более общее матричное уравнение вида

$$dZ/d\tau=\varepsilon\cdot Y(\tau,Z).$$

Тогда для функции $Y(\tau, Z)$ определяется операция усреднения как

$$<Y(\tau,Z)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Y(\tau,Z)d\tau \tag{6}$$

и вводится интегрирующий оператор

$$\widetilde Y(\tau,\xi)=\int[Y(\tau,\xi)-<Y(\tau,\xi)>]d\tau.$$

Вектор ξ находится из системы

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\varepsilon<Y(\tau,\xi)>,$$

а первое приближение будет

$$Z(\tau)=\xi(\tau)+\varepsilon\widetilde Y(\tau,\xi).$$

Интересно отметить, что (5) оказалась системой дифференциальных уравнений типа Каратеодори [12] и это указывает на то, что полученное решение будет единственным. Обычно метод усреднения расписан до второго приближения. Используя способ итерации, когда последовательно добавляется новая поправка, можно описать любое приближение.

Если взять первые четыре порядка, то получим, что

$$Z(\tau)=\xi+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^iY_i, \tag{7}$$

где

$$Y_1=\widetilde Y,\qquad Y_2=\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_1-\int\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}d\tau<Y>,$$

$$Y_3=\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_2-\int\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}d\tau<\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_1>-\int\frac{\partial Y_2}{\partial\xi}d\tau<Y>,$$

$$Y_4=\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_3-\int\frac{\partial Y_1}{\partial\xi}d\tau<\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_2>-$$

$$-\int\frac{\partial Y_2}{\partial\xi}d\tau<\frac{\partial Y}{\partial\xi}Y_1>-\int\frac{\partial Y_3}{\partial\xi}d\tau<Y>.$$

Согласно [7] погрешность данного приближения будет ε^5. Положим теперь $Y(\tau, Z) = G \cdot Z$. Тогда из (7) можно найти

$$Z(\tau)=\left(1+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^iG_i\right)\xi, \tag{8}$$

где

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\varepsilon<G\left(1+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^iG_i\right)>\xi. \tag{9}$$

Процедуру дифференцирования по вектору ξ можно проиллюстрировать следующим примером:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}Y(\tau,\xi)=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi_1}(g_{11}\xi_1+g_{12}\xi_2) & \frac{\partial}{\partial\xi_2}(g_{11}\xi_1+g_{12}\xi_2)\\ \frac{\partial}{\partial\xi_1}(g_{21}\xi_1+g_{22}\xi_2) & \frac{\partial}{\partial\xi_2}(g_{21}\xi_1+g_{22}\xi_2)\end{pmatrix}=G.$$

Матрицы G_i примут вид

$$G_1=\widetilde G,\ G_2=\widetilde{GG}_1-\widetilde{G_1}<G>,$$

$$G_3=\widetilde{GG}_2-\widetilde{G_1}<GG_1>-\widetilde{G_2}<G>,$$

$$G_4=\widetilde{GG}_3-\widetilde{G_1}<GG_2>-\widetilde{G_2}<GG_1>-\widetilde{G_3}<G>.$$

Матрицы выразим через функцию $g(\tau)$ и получим, что

$$G_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\widetilde g & 0\end{pmatrix},\qquad G_2=\begin{pmatrix}-\widetilde{\widetilde g} & 0\\ 0 & \widetilde{\widetilde g}\end{pmatrix},$$

$$G_3=\begin{pmatrix}0 & 2\widetilde{\widetilde{\widetilde g}}\\ \widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde g}}} & 0\end{pmatrix},\qquad G_4=\begin{pmatrix}\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde{\widetilde g}}}} & 0\\ 0 & -2\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde{\widetilde g}}}}-\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde g}}}\end{pmatrix}.$$

Эта часть теории является общей. Затем, в частности, нужно учитывать, что

$$g(\tau) = \frac{4n(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu \cos(2\nu+1)(\tau-\tau_1),$$
$$< g(\tau) >= 0,$$
$$\widetilde{g(\tau)} = \frac{4n(1+k)^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{g_\nu}{2\nu+1} \sin(2\nu+1)(\tau-\tau_1),$$
$$< \widetilde{g(\tau)} >= 0,$$
$$< g(\tau)\widetilde{\widetilde{g(\tau)}} >= -\frac{\pi^2 n^2(1+4k+3k^2)}{12}$$

и т. д. Отметим, что секулярные слагаемые вычитаются при действии интегрирующего оператора. Из (9) получим

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{N^4}(< g\widetilde{\widetilde{g}} > -\frac{1}{N^2} < g\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}}} >)\cdot\xi.$$

Обозначим

$$\nu_z^2 = -\frac{1}{N^2} < g\widetilde{\widetilde{g}} > + \frac{1}{N^4} < g\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}}} > .$$

Тогда получим, что усредненное решение $\xi = B\cos(\frac{\nu_z}{N}\tau+\psi)$, где B и ψ — произвольные константы, а квадрат частоты

$$\nu_z^2 = \frac{\pi^2 n^2(1+4k+3k^2)}{12N^2}. \qquad (10)$$

Этот результат согласуется с известным в [10] набегом фазы $\mu_z = 2\pi\nu_z/N$.

Подставляя G_i в матричное равенство (8), найдем решение начального уравнения (3) в виде

$$z = (1 - \frac{1}{N^2}\widetilde{\widetilde{g}} + \frac{1}{N^4}\widetilde{\widetilde{\widetilde{g\widetilde{g}}}})\cdot\xi + \frac{2}{N^3}\cdot\widetilde{\widetilde{\widetilde{g}}}\cdot\frac{d\xi}{d\varphi}.$$

Окончательно асимптотика с точностью до $1/N^3$ запишется как

$$z = B\cos(\frac{\nu_z}{N}\tau+\psi)(1+S_1)+B\sin(\frac{\nu_z}{N}\tau+\psi)\nu_z S_2, \quad (11)$$

где

$$S_1 = \frac{4n(1+k)^2}{\pi N^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{(2\nu+1)^2}\cos(2\nu+1)(\tau_1-\tau_1),$$
$$S_2 = \frac{8n(1+k)^2}{\pi N^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{g_\nu}{(2\nu+1)^3}\sin(2\nu+1)(\tau-\tau_1).$$

Решение для уравнения (2) будет следующим:

$$\rho = A\cos(\frac{\nu_\rho}{N}\tau+\chi)(1-S_1)-A\sin(\frac{\nu_\rho}{N}\tau+\chi)\nu_\rho S_2, \quad (12)$$

где $\nu_\rho^2 = 1+\nu_z^2$.

Если в полученных впервые решениях провести усреднение по быстрым осцилляциям, то останутся только первые слагаемые. Следовательно, A и B можно трактовать как амплитуды основных косинусоидальных колебаний, а χ и ψ — как их начальные фазы. В целом это будет движение с модулированными амплитудами. В полученных решениях нет расходящихся гиперболических функций, что находится в соответствии с теорией устойчивости движения при жестком фокусировании на замкнутой орбите. Имеющиеся здесь ряды могут быть выражены через многочлены Эйлера $E_i(x)$. Согласно [13]

$$S_1 = -\frac{\pi^2 n(1+k)^2}{4N^2}[E_2(\frac{\tau}{\pi}) - E_2(\frac{\tau-2\tau_1}{\pi})],$$
$$S_2 = \frac{\pi^3 n(1+k)^2}{6N^3}[E_3(\frac{\tau-2\tau_1}{\pi}) - E_3(\frac{\tau}{\pi})],$$

где аргументы многочленов заключены в интервале (0,1). Если это условие не выполняется, то нужно перейти к другой переменной — $y = \tau - \pi$. Здесь

$$E_2(x) = x^2 - x, \quad E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}.$$

В конечном счете это говорит о близости решений z и ξ начальной и усредненной систем [12, 14].

К этой задаче можно также применить комбинацию метода Уиттекера и растянутых параметров, как в [8], и получить те же результаты. Эта процедура приведена в работе [15]. Найденные формулы верны и для протона, только в формуле (4) справа нужно поменять знак.

Коснемся также модели, близкой к накопительным кольцам. Интересно, что более современной теперь является тоже структура FODO, но F и D означают квадруполи, а O — пространство с дипольными магнитами. Это рассматривается, в частности, в докладе [16]. Пусть здесь длины квадруполей равны a, поворотных магнитов — d, а протяженность одного из четырех свободных промежутков — l. Тогда длина одного периода $L = 2a + 2d + 4l$ и усредненный радиус $R_0 = R(1+k)$, где $k = (a+2l)/d$. Например, уравнение для вертикальных колебаний будет иметь вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \lambda^2 n_1(\tau) z = 0, \qquad (13)$$

где

$$n_1(\tau) = \sum_{\nu=o}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\tau_1}{2\nu+1}\cos(2\nu+1)(\tau-\tau_2),$$
$$\lambda^2 = \frac{4gR_0(1+k)}{\pi N^2 H}, \quad \tau_2 = \frac{\pi a}{L}.$$

Но, оказывается, для накопительных колец порядка нескольких гигаэлектронвольт параметр λ может быть больше единицы. Полученное выражение есть уравнение Хилла с малым параметром при старшей производной [8, 17]. Это альтернативный пример, и к приведенной выше методике нужно относиться более аккуратно. Подходы к решению этого уравнения обсуждаются в работах [18, 19]. Если в ячейку добавить секступоли, то получим нелинейные уравнения [3, 20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что анализ был выполнен только для одного периода.

Однако те же условия повторяются при прохождении частицей и последующих периодов. Таким образом, возможно обобщение на всю замкнутую орбиту. Кроме того, для практики представляет интерес только стабильное движение частицы внутри огибающих.

Применительно к другим периодическим структурам, таким как ондуляторы и кристаллические решетки, можно взять уравнение вида

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \epsilon^2(a_0 + f(\tau))x = 0.$$

Здесь $f(\tau)$ является периодической функцией, а ϵ — малый параметр, который применяется к другим физическим задачам. К такому уравнению можно использовать рассмотренную в этой работе методику. Что касается уравнения (13), то, по-видимому, здесь можно задать начальные условия и решать задачу Коши.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е.* // ЖЭТФ. 1971. **61**. № 4. С. 1371.
2. *Wiedemann H.* // Nucl. Inst. and Meth. 1986. **A 246**. N 1–3. P. 4.
3. *Wiedemann H.* Particle Accelerator Physics. Fourth Edition. Springer, 2015.
4. *Hofmann A.* The Physics of Synchrotron Radiation. Cambridge University Press, 2009.
5. *Willmott P.* An Introduction to Synchrotron Radiation. Techniques and Applications. 2nd Edition. John Wiley & Sons Ltd, 2019.
6. Synchrotron Light Sources and Free Electron Lasers. E. Jaeschke, S. Khan, J. Schneider, J. Hastigs (Eds.) // Springer, 2020.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
8. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
9. *Chicone C.* Ordinary differential equations with applications. (2nd ed.) Springer, 2006.
10. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.
11. Теория излучения релятивистских частиц. Под ред. В. А. Бордовицина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
12. *Сансоне Ж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.II. М.: ИЛ, 2008.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
14. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
15. *Шишанин О. Е.* // ЖЭТФ. 1993. **103**. № 4. С. 1117.
16. Технический проект ускорительного комплекса NICA (Том 1). Под общей редакцией И. Н.Мешкова, Г.В.Трубникова // Дубна. ОИЯИ, 2015.
17. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
18. *Шишанин О. Е.* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. Июнь. Серия 10. Вып.2. С. 60.
19. *Shishanin O. E.* // arXiv:1505.08166 [physics.acc-ph]. 10 Apr 2015.
20. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969.

Applications of Averaging Methods to Particle Dynamics in Periodic Structures

O. E. Shishanin

Faculty of Basic Competencies, Moscow Polytechnic University, Moscow, 107023 Russia
E-mail: olegsh55@gmail.com

The averaging method is considered in the general form up to the fourth order (inclusively). As an example, we study the motion of a charged particle in a discontinuous strong-focusing magnetic field. In particular, the presented technique can be applied in the study of particle oscillations in undulators and particle channeling in crystals.

Keywords: magnetic field gradient, Fourier series, matrix equation, averaging operation, asymptotic solutions.
PACS: 41.20.-q.
Received 06 July 2021.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 5. Pp. 292–295.

Сведения об авторе

Шишанин Олег Евстропович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: olegsh55@gmail.com.