Существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость погранслойного решения краевой задачи Неймана для системы двух нелинейных уравнений с разными степенями малого параметра

Б. В. Тищенко[a]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Поступила в редакцию 30.06.2021, после доработки 09.07.2021, принята к публикации 13.07.2021.

В работе используется асимптотический анализ для исследования существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решения погранслойного типа одномерной нелинейной начально-краевой задачи с неоднородными условиями Неймана. Доказательство соответствующих теорем проводится при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств для различных типов квазимонотонности правых частей.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений, малый параметр, пограничные слои, верхнее и нижнее решения, асимптотическое приближение решения, условия квазимонотонности.
УДК: 517.928, 517.925. PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается сингулярно возмущенная система двух одномерных нелинейных параболических уравнений с различными степенями малого параметра при старших производных. Правые части этих уравнений удовлетворяют определенным условиям квазимонотонности — условиям на знаки производных функций правых частей по аргументам, отвечающим тем компонентам системы, которые входят в каждом из уравнений в качестве параметров. Целью работы является получение достаточных условий существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного погранслойного решения краевой задачи Неймана. Настоящая работа является составной частью более общего исследования по получению условий существования и устойчивости решений прикладных задач с внутренними переходными слоями [1–7]. Несмотря на то что основным фокусом подобных исследований являются внутренние переходные слои, теоретическое исследование возникающих в этих задачах погранслоев также важно, особенно для реализации численного решения, когда требуется хорошее начальное приближение для оптимизации численного счета [8, 9], и, в частности, в ходе реализации алгоритмов решения коэффициентных обратных задач по восстановлению свойств среды на основании данных о движениях фронтов (см. [10–13] и работу Лукьяненко и др., 2019 в этом журнале).

Ранее в работе [14] был затронут вопрос о пограничных слоях для системы эллиптических уравнений с различными степенями малого параметра. Однако в этой работе авторы ограничились выписыванием системы уравнений для пограничных функций. В настоящей работе приведен алгоритм построения асимптотики погранслойного решения для аналогичной системы уравнений, указан способ построения верхнего и нижнего решений в случае различных условий квазимонотонности а также доказана локальная единственность и асимптотическая устойчивость такого решения как стационарного решения параболической задачи с указанием локальной области притяжения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему параболических уравнений:

$$\varepsilon^4 y_{xx} - y_t = f(y,z,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 z_{xx} - z_t = g(y,z,x,\varepsilon),$$
$$x \in (-1,1),\ t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

где $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малый параметр; функции $f(u,v,x,\varepsilon)$, $g(u,v,x,\varepsilon)$ принадлежат классу $C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times [-1,1] \times [0,\varepsilon_0])$, где I_u и I_v — некоторые допустимые интервалы изменения переменных u и v, n — порядок требуемого асимптотического приближения. Здесь и далее используются обозначения $\mathbb{R}^+ := (0,+\infty)$, $\mathbb{R}^+_0 := [0,+\infty)$, $\mathbb{R}^- := (-\infty,0)$, $\mathbb{R}^-_0 := (-\infty,0]$.

Поставим следующие начальные и краевые условия:

$$y_x(\mp 1,t) = a^{(\mp)}, \quad y(x,0) = u^0(x),$$
$$z_x(\mp 1,t) = b^{(\mp)}, \quad z(x,0) = v^0(x), \quad (2)$$

считая что $a^{(\mp)}$ и $b^{(\mp)}$ — константы, функции $u^0(x)$, $v^0(x)$ гладкие на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяют условиям согласования $u^0_x(\mp 1) = a^{(\mp)}$, $v^0_x(\mp 1) = b^{(\mp)}$.

Очевидно, что стационарные решения задачи (1), (2) — это решения краевой задачи Неймана

$$\varepsilon^4 u'' = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (-1,1),$$
$$u'(\mp 1) = a^{(\mp)}, \quad v'(\mp 1) = b^{(\mp)}. \quad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. На множестве $I_v \times [-1,1]$ уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(v,x)$ и выполняется неравенство $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0$.

Условие 2. Обозначим $h(v,x) = g(\varphi(v,x),v,x,0)$. На отрезке $[-1,1]$ уравнение $h(v,x) = 0$ имеет изолированное решение $v = \psi(x)$ и всюду на этом отрезке выполняется неравенство $h_v(\psi(x),x) > 0$.

---

[a] E-mail: bogdanmsu@yandex.ru

Пусть при всех $(u,v) \in I_u \times I_v$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ на отрезке $[-1,1]$ правые части уравнений задачи (3) удовлетворяют одному из четырех типов квазимонотонности (КМ), то есть выполняются неравенства:

Условие 3(а).

$$f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0, \;\; g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0 \;\; (\text{NN тип});$$
$$f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0, \;\; g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0 \;\; (\text{PP тип}).$$

Условие 3(б).

$$f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0, \;\; g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0 \;\; (\text{NP тип});$$
$$f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0, \;\; g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0 \;\; (\text{PN тип}).$$

Введем на множестве $(v,x) = I_v \times [-1,1]$ функции

$$\begin{aligned}\nu(v,x) &:= g_v(\varphi(v,x),v,x,0)+\\ &+ \frac{f_v(\varphi(v,x),v,x,0)}{f_u(\varphi(v,x),v,x,0)} \cdot g_u(\varphi(v,x),v,x,0),\\ \bar{\nu}(x) &:= \nu(\psi(x),x) \quad \text{и константы} \quad \bar{\nu}^{(\mp)} := \bar{\nu}(\mp 1).\end{aligned} \tag{4}$$

Условие 4. $\bar{\nu}(x) > 0$ на отрезке $[-1,1]$.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

В текущей секции мы остановимся на построении асимптотического приближения решения задачи (3).

Асимптотическое приближение n-ого порядка решения задачи (3) строится в виде сумм

$$U_n = \bar{u}_n(x,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp,\varepsilon), \tag{5}$$

$$V_n = \bar{v}_n(x,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}v(\eta_\mp,\varepsilon). \tag{6}$$

Функции, зависящие от переменной x, описывают поведение решения вдали от границ отрезка (регулярная часть). Функции, зависящие от растянутых переменных $\zeta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon$ и $\eta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon^2$, описывают поведение решения в окрестности точек $x = \mp 1$ (пограничные функции).

Каждая из функций, входящих в правые части (5), (6) представляется в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\mp)}_n(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{u}^{(\mp)}_i(x),\\ \bar{v}^{(\mp)}_n(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{v}^{(\mp)}_i(x);\\ P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P^{(\mp)}_i u(\zeta_\mp),\\ P^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P^{(\mp)}_i v(\zeta_\mp);\\ R^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+2} \varepsilon^i R^{(\mp)}_i u(\eta_\mp),\\ R^{(\mp)}_{n+2}v(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+2} \varepsilon^i R^{(\mp)}_i v(\eta_\mp).\end{aligned} \tag{7}$$

Замечание 1. Во избежание разночтений автор обращает внимание читателя на различие в (7) между, например, $P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon)$ и $P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp)$ — суммой и ее отдельным членом.

2.1. Регулярная часть

Системы уравнений для функций регулярной части стандартным образом (см. [15]) получаются из равенств

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 \bar{u}_{n-4}(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - f(\bar{u}_n(x,\varepsilon), \bar{v}_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_{n-2}(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - g(\bar{u}_n(x,\varepsilon), \bar{v}_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по малому параметру функций, входящих в эти равенства.

В частности, в нулевом порядке, принимая во внимание Условия 1 и 2, следует положить

$$\bar{u}_0(x) = \varphi(\psi(x),x), \;\; \bar{v}_0(x) = \psi(x). \tag{8}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\bar{f}_u(x) &:= f_u(\varphi(\psi(x),x),\psi(x),x,0), & \bar{f}^{(\mp)}_u &:= \bar{f}_u(\mp 1),\\ \bar{g}_u(x) &:= g_u(\varphi(\psi(x),x),\psi(x),x,0), & \bar{g}^{(\mp)}_u &:= \bar{g}_u(\mp 1),\\ \bar{h}_v(x) &:= h_v(\psi(x),x), & \bar{h}^{(\mp)}_v &:= \bar{h}_v(\mp 1).\end{aligned} \tag{9}$$

В аналогичном смысле понимаются и обозначения для других частных производных функций f и g.

Функции k-ого порядка $\bar{u}_k(x)$ и $\bar{v}_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, находятся из систем

$$\begin{aligned}\bar{f}_u(x)\,\bar{u}_k(x) + \bar{f}_v(x)\,\bar{v}_k(x) &= \bar{F}_k(x),\\ \bar{g}_u(x)\,\bar{u}_k(x) + \bar{g}_v(x)\,\bar{v}_k(x) &= \bar{G}_k(x),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\bar{F}_k(x)$, $\bar{G}_k(x)$ — известные на каждом шаге функции. Системы (10) также разрешимы в силу Условий 1 и 2, так как их определители равны $\bar{f}_u(x) \cdot \bar{h}_v(x) > 0$.

2.2. Функции пограничного слоя

Системы уравнений для функций пограничного слоя получаются путем приравнивания слагаемых с одинаковыми степенями ε в разложении Тейлора равенств

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon)}{\partial \zeta^2_\mp} &= P^{(\mp)}f(\zeta_\mp,\varepsilon),\\ \frac{\partial^2 P^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp,\varepsilon)}{\partial \zeta^2_\mp} &= P^{(\mp)}g(\zeta_\mp,\varepsilon),\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp,\varepsilon)}{\partial \eta^2_\mp} &= R^{(\mp)}f(\eta_\mp,\varepsilon),\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 R^{(\mp)}_{n+2}v(\eta_\mp,\varepsilon)}{\partial \eta^2_\mp} &= R^{(\mp)}g(\eta_\mp,\varepsilon),\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}P^{(\mp)}f(\zeta_\mp,\varepsilon) := f\Big(&\bar{u}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon),\\ &\bar{v}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp,\varepsilon), \varepsilon\zeta_\mp \mp 1, \varepsilon\Big) -\\ &- f\left(\bar{u}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon), \varepsilon\zeta_\mp \mp 1, \varepsilon\right),\end{aligned}$$

а функции $P^{(\mp)}g(\zeta_\mp,\varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$R^{(\mp)}f(\eta_\mp,\varepsilon) :=$$
$$f\left(\bar{u}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}v(\eta_\mp,\varepsilon), \varepsilon\eta_\mp \mp 1,\varepsilon\right) -$$
$$- f\left(\bar{u}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon), \varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon\right),$$

функции $R^{(\mp)}g$ определяются по аналогии с $R^{(\mp)}f$.

Будем требовать, чтобы для асимптотического приближения точно выполнялись краевые условия задачи (3):

$$\left.\frac{\partial U^{(\mp)}_n(x,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=\mp 1} = a^{(\mp)}, \quad \left.\frac{\partial V^{(\mp)}_n(x,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=\mp 1} = b^{(\mp)}. \tag{13}$$

Также учтем требование убывания на бесконечности для входящих в асимптотику погранслойных функций (см. (7)):

$$\begin{aligned} &P^{(\mp)}_k u(\zeta_\mp) \to 0,\ P^{(\mp)}_k v(\zeta_\mp) \to 0 \quad \text{при} \quad \zeta_\mp \to \pm\infty; \\ &R^{(\mp)}_k u(\eta_\mp) \to 0,\ R^{(\mp)}_k v(\eta_\mp) \to 0 \quad \text{при} \quad \eta_\mp \to \pm\infty, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{14}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε в (13), получаем следующие условия на концах отрезка для пограничных функций различного порядка:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2} : \left.\frac{dR^{(\mp)}_0 u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = \left.\frac{dR^{(\mp)}_0 v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0; \\
&\varepsilon^{-1} : \left.\frac{dP^{(\mp)}_0 u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_1 u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = \left.\frac{dP^{(\mp)}_0 v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_1 v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0; \\
&\varepsilon^{0} : L\left.\frac{d\bar{u}_0}{dx}\right|_{x=\mp 1} + \left.\frac{dP^{(\mp)}_1 u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_2 u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = a^{(\mp)}, \qquad \left.\frac{d\bar{v}_0}{dx}\right|_{x=\mp 1} + \left.\frac{dP^{(\mp)}_1 v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_2 v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = b^{(\mp)}; \\
&\varepsilon^{k} : \left.\frac{d\bar{u}_k}{dx}\right|_{x=\mp 1} + \left.\frac{dP^{(\mp)}_{k+1} u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_{k+2} u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0, \qquad \left.\frac{d\bar{v}_k}{dx}\right|_{x=\mp 1} + \left.\frac{dP^{(\mp)}_{k+1} v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR^{(\mp)}_{k+2} v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0, \\
&\quad k = \overline{1,n};
\end{aligned} \tag{15}$$

Выпишем явно получающиеся из (11), (12) уравнения для пограничных функций. Начнем с функций нулевого порядка — они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&f\left(\varphi(\psi(\mp 1),\mp 1) + P^{(\mp)}_0 u(\zeta_\mp), \psi(\mp 1) + P^{(\mp)}_0 v(\zeta_\mp), \mp 1, 0\right) = 0, \\
&\frac{d^2 P^{(\mp)}_0 v(\zeta_\mp)}{d\zeta^2_\mp} - g\left(\varphi(\psi(\mp 1),\mp 1) + P^{(\mp)}_0 u(\zeta_\mp), \psi(\mp 1) + P^{(\mp)}_0 v(\zeta_\mp), \mp 1, 0\right) = 0, \\
&\frac{d^2 R^{(\mp)}_0 u(\eta_\mp)}{d\eta^2_\mp} + f\left(\varphi(\psi(\mp 1),\mp 1) + P^{(\mp)}_0 u(0) + R^{(\mp)}_0 u(\eta_\mp), \psi(\mp 1) + P^{(\mp)}_0 v(0) + R^{(\mp)}_0 v(\eta_\mp), \mp 1, 0\right) - \\
&\qquad\qquad - f\left(\varphi(\psi(\mp 1),\mp 1) + P^{(\mp)}_0 u(0), \psi(\mp 1) + P^{(\mp)}_0 v(0), \mp 1, 0\right) = 0, \\
&\frac{d^2 R^{(\mp)}_0 v(\eta_\mp)}{d\eta^2_\mp} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Принимая во внимание (8), нетрудно видеть, что тривиальные функции пограничного слоя нулевого порядка, то есть

$$\begin{aligned} &P^{(\mp)}_0 u(\zeta_\mp) \equiv P^{(\mp)}_0 v(\zeta_\mp) \equiv 0, \\ &R^{(\mp)}_0 u(\eta_\mp) \equiv R^{(\mp)}_0 v(\eta_\mp) \equiv 0, \end{aligned} \tag{17}$$

удовлетворяют уравнениям (16), а также граничным условиям (14), (15).

Для функций $R^{(\mp)}_1 v(\eta_\mp)$ из самих разложений выражений (12) получаются уравнения

$$\frac{d^2 R^{(\mp)}_1 v}{d\eta^2_\mp} = 0,$$

тогда как при получении уравнений для функций $R^{(\mp)}_1 u(\eta_\mp)$ и $R^{(\mp)}_2 v(\eta_\mp)$ также учитывается (17), откуда

$$\frac{d^2R_1^{(\mp)}u}{d\eta_\mp^2}-\bar f_u^{(\mp)}R_1^{(\mp)}u-\bar f_v^{(\mp)}R_1^{(\mp)}v=0,\qquad \frac{d^2R_2^{(\mp)}v}{d\eta_\mp^2}=0,$$

а учет (14), (15), в свою очередь, влечет тривиальность $R_1^{(\mp)}v(\eta_\mp)$, $R_1^{(\mp)}u(\eta_\mp)$, и $R_2^{(\mp)}v(\eta_\mp)$.

Уравнения для функций $P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$, $P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ имеют вид

$$0=\bar f_u^{(\mp)}P_1^{(\mp)}u+\bar f_v^{(\mp)}P_1^{(\mp)}v,$$
$$\frac{d^2P_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp^2}=\bar g_u^{(\mp)}P_1^{(\mp)}u+\bar g_v^{(\mp)}P_1^{(\mp)}v.$$

Выразим $P_1^{(\mp)}u$ из первых уравнений и подставим во вторые, учтем граничные условия (14), (15) и получим задачи для $P_1^{(\mp)}v$:

$$\frac{d^2P_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp^2}=\bar h_v^{(\mp)}\cdot P_1^{(\mp)}v,$$
$$\left.\frac{dP_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0}=b^{(\mp)}-\left.\frac{d\bar v_0}{dx}\right|_{x=\mp1}=:p_1^{(\mp)},$$
$$P_1^{(\mp)}v(\pm\infty)=0.$$

Функции $P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$ и $P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ можно выписать в явном виде:

$$P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp)=\mp\frac{p_1^{(\mp)}}{\sqrt{\bar h_v^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar h_v^{(\mp)}}\cdot|\zeta_\mp|},$$
$$P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp)=\pm\frac{\bar f_v^{(\mp)}p_1^{(\mp)}}{\bar f_u^{(\mp)}\sqrt{\bar h_v^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar h_v^{(\mp)}}\cdot|\zeta_\mp|}.$$

Для $R_2^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ имеем задачи:

$$\frac{d^2R_2^{(\mp)}u}{d\eta_\mp^2}=\bar f_u^{(\mp)}\cdot R_2^{(\mp)}u,\quad R_2^{(\mp)}u(\pm\infty)=0,$$
$$\left.\frac{dR_2^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0}=$$
$$=a^{(\mp)}-\left.\frac{d\bar u_0}{dx}\right|_{x=\mp1}-\left.\frac{dP_1^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0}=:r_2^{(\mp)},$$

откуда

$$R_2^{(\mp)}u(\eta_\mp)=\mp\frac{r_2^{(\mp)}}{\sqrt{\bar f_u^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar f_u^{(\mp)}}\cdot|\eta_\mp|}.$$

На данном этапе завершено построение асимптотического приближения нулевого порядка.

Построение асимптотики k-ого порядка, $k\geqslant 1$, производится по следующему алгоритму.

Предварительно находим $\bar u_k(x)$ и $\bar v_k(x)$ (см. (10)).

На первом шаге решаются задачи

$$\frac{d^2R_{k+2}^{(\mp)}v}{d\eta_\mp^2}=R_k^{(\mp)}g(\eta_\mp),\quad R_2^{(\mp)}v(\pm\infty)=0,$$

в которых $R_k^{(\mp)}g(\eta_\mp)$ — известные функции, $\eta_\mp\in\mathbb{R}_0^\mp$. Следовательно, их решения:

$$R_{k+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp)=\int\limits_{\pm\infty}^{\eta_\mp}d\eta_1\int\limits_{\pm\infty}^{\eta_1}R_k^{(\mp)}g(\eta_2)\,d\eta_2.$$

Замечание 2. В силу тривиальности погранслойных функций нулевого порядка, а также функций $R_1^{(\mp)}v(\eta_\mp)$, $R_1^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ и $R_2^{(\mp)}v(\eta_\mp)$ функции $R_3^{(\mp)}g(\eta_\mp)\equiv 0$, откуда $R_3^{(\mp)}v(\eta_\mp)\equiv 0$ — об этом упоминалось в [1, 7], однако не было расписано явно.

На втором шаге определяются функции $P_{k+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ и $P_{k+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$ из следующей системы уравнений:

$$P_{k+1}^{(\mp)}u=-\frac{\bar f_v^{(\mp)}}{\bar f_u^{(\mp)}}\cdot P_{k+1}^{(\mp)}v-P_{k+1}^{(\mp)}f,$$
$$\frac{d^2P_{k+1}^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp^2}=\bar h_v^{(\mp)}\cdot P_{k+1}^{(\mp)}v+P_{k+1}^{(\mp)}g,\quad P_{k+1}^{(\mp)}v(\pm\infty)=0$$
$$\left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0}=-\left.\frac{d\bar v_k}{dx}\right|_{x=\mp1}-\left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)}v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0}=:p_{k+1}^{(\mp)},$$

где $P_{k+1}^{(\mp)}f(\zeta_\mp)$, $P_{k+1}^{(\mp)}g(\zeta_\mp)$ известны.

На последнем шаге находим функции $R_{k+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ как решения задач

$$\frac{d^2R_{k+2}^{(\mp)}u}{d\eta_\mp^2}=\bar f_u^{(\mp)}\cdot R_{k+2}^{(\mp)}u+R_{k+2}^{(\mp)}f,\quad R_{k+2}^{(\mp)}u(\pm\infty)=0,$$
$$\left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0}=-\left.\frac{d\bar u_k}{dx}\right|_{x=\mp1}-\left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0}=:r_{k+2}^{(\mp)}$$

где $R_{k+2}^{(\mp)}f(\eta_\mp)$ известны.

В завершение в силу [16] отметим справедливость для искомых функций экспоненциальных оценок

$$\left|P_j^{(\mp)}u(\zeta_\mp)\right|\leqslant C_P\,e^{-\kappa|\zeta_\mp|},\qquad \left|P_j^{(\mp)}v(\zeta_\mp)\right|\leqslant C_P\,e^{-\kappa|\zeta_\mp|},$$
$$\left|R_j^{(\mp)}u(\eta_\mp)\right|\leqslant C_R\,e^{-\gamma|\eta_\mp|},\qquad \left|R_j^{(\mp)}v(\eta_\mp)\right|\leqslant C_R\,e^{-\gamma|\eta_\mp|},$$
$$j=0,1,\ldots,\tag{18}$$

где C_P, C_R, κ, γ — некоторые положительные константы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. *Пусть выполняются Условия 1–3(а) или 1–3(б),4. Тогда для достаточно малых* $\varepsilon>0$ *существует классическое решение* $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ *задачи* (3), *для которого пара функций* $(U_n(x,\varepsilon),V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $[-1,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$, *то есть*

$$|U_n(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x)|+|V_n(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x)|\leqslant C\varepsilon^{n+1},$$
$$x\in[-1,1],\tag{19}$$

где C *— не зависящая от* ε *положительная константа.*

Эту теорему будем доказывать при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [1, 17–19]).

3.1. Существование решения в общем случае

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon),$$
$$L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Верхнее и нижнее решения задачи (3) определяются следующим образом.

Определение 1. Пары функций $\left(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\right)$ и $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (3), если для них выполняются следующие неравенства:

(A$_1$). $\underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x),\ \ \underline{V}(x) \leqslant \overline{V}(x),\ \ x \in [-1,1];$

(A$_2$). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U}, v) \leqslant 0 \leqslant L_{u,\varepsilon}(\underline{U}, v), \underline{V} \leqslant v \leqslant \overline{V},\ x \in (-1,1),$
$L_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}) \leqslant 0 \leqslant L_{v,\varepsilon}(u, \underline{V}), \underline{U} \leqslant u \leqslant \overline{U},\ x \in (-1,1);$

(A$_3$). $\overline{U}_x(-1) \leqslant a^{(-)} \leqslant \underline{U}_x(-1),\ \overline{U}_x(1) \geqslant a^{(+)} \geqslant \underline{U}_x(1),$
$\overline{V}_x(-1) \leqslant b^{(-)} \leqslant \underline{V}_x(-1),\ \overline{V}_x(1) \geqslant b^{(+)} \geqslant \underline{V}_x(1);$

Утверждение 1. *Пусть существуют пары функций* $\left(\overline{U}, \overline{V}\right)$ *и* $(\underline{U}, \underline{V})$*, являющиеся, соответственно, верхним и нижним решениями в смысле Определения 1. Тогда существует хотя бы одно классическое решение* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *задачи* (3)*, причем*

$$\underline{U}(x) \leqslant u_\varepsilon(x) \leqslant \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \leqslant v_\varepsilon(x) \leqslant \overline{V}(x), \quad (20)$$

где $x \in [-1,1]$. Это утверждение доказано, например, в [18].

3.2. Обоснование асимптотики

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [1, 17] будем строить верхнее и нижнее решения задачи (3) — функции $\overline{U}$, $\underline{U}$, $\overline{V}$, $\underline{V}$ как модификации функций $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\overline{U} &= U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \alpha(x) + \varepsilon^{n+2} r^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp),\\
\overline{V} &= V_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \beta(x) + \varepsilon^{n+1} p^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp),\\
\underline{U} &= U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \alpha(x) - \varepsilon^{n+2} r^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp),\\
\underline{V} &= V_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \beta(x) - \varepsilon^{n+1} p^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp).
\end{aligned} \qquad (21)$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будем определять как решение системы уравнений:

$$\bar f_u(x)\cdot\alpha(x) - |\bar f_v(x)|\cdot\beta(x) = A,$$
$$-|\bar g_u(x)|\cdot\alpha(x) + \bar g_v(x)\cdot\beta(x) = B$$

при $x \in [-1,1]$ с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения (9). В силу Условий 1, 2, а также 3(а) (NN, PP типы) или 3(б) и 4 (NP и PN типы) эта система однозначно разрешима:

(NN, PP)

$$\alpha(x) = \frac{\bar g_v(x)A + |\bar f_v(x)|B}{\bar f_u(x)\cdot \bar h_v(x)}, \quad \beta(x) = \frac{|\bar g_u(x)|A + \bar f_u(x)B}{\bar f_u(x)\cdot \bar h_v(x)},$$

(NP, PN)

$$\alpha(x) = \frac{\bar g_v(x)A + |\bar f_v(x)|B}{\bar f_u(x)\cdot \bar \nu(x)}, \quad \beta(x) = \frac{|\bar g_u(x)|A + \bar f_u(x)B}{\bar f_u(x)\cdot \bar \nu(x)}.$$

Здесь использованы обозначения (4), (9).

Покажем, что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принимают строго положительные значения. Сначала заметим: для NN и PP типов КМ из условий 1-3(а) следуют неравенства

$$\bar h_v(x) = \bar g_v(x) - \frac{\bar f_v(x)}{\bar f_u(x)}\cdot \bar g_u(x) > 0 \ \text{ и } \ \frac{\bar f_v(x)}{\bar f_u(x)}\cdot \bar g_u(x) > 0;$$

для NP и PN типов КМ из условий 1, 2, 3(б), 4 вытекают неравенства

$$\bar \nu(x) = \bar g_v(x) + \frac{\bar f_v(x)}{\bar f_u(x)}\cdot \bar g_u(x) > 0 \ \text{ и } \ \frac{\bar f_v(x)}{\bar f_u(x)}\cdot \bar g_u(x) < 0.$$

Следовательно, во всех случаях $\bar g_v(x) > 0$ — зная это, остается лишь заметить положительность числителей и знаменателей в силу тех же условий 1–4.

Будем строить верхнее и нижнее решения удовлетворяющими равенствам в условии (A$_3$). Этого можно добиться, если потребовать

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dr^{(\mp)}_{n+2}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} &= 0,\\
\left.\frac{d\beta}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dp^{(\mp)}_{n+1}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} &= 0.
\end{aligned} \qquad (22)$$

Эти условия будут выполнены, если положить, например,

$$\begin{aligned}
r^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp) &= \pm\frac{\alpha_x(\mp1)}{k_u}\cdot e^{-k_u|\eta_\mp|},\\
p^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp) &= \pm\frac{\beta_x(\mp1)}{k_v}\cdot e^{-k_v|\zeta_\mp|},
\end{aligned} \qquad (23)$$

где k_u, k_v — некоторые произвольные положительные константы.

Докажем теперь, что функции, определенные выражениями (21), удовлетворяют неравенствам (A$_1$)-(A$_3$) и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (3).

Лемма 1. *При достаточно малых значениях* ε *пары функций* $(\overline{U}(x,\varepsilon), \overline{V}(x,\varepsilon))$ *и* $(\underline{U}(x,\varepsilon), \underline{V}(x,\varepsilon))$*, определенные выражениями* (21)*, являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (3)

Для доказательства Леммы 1 нужно проверить выполнение неравенств (A$_1$) — (A$_3$)

Условие (A$_1$) выполняется, поскольку функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принимают строго положительные значения и являются поправками порядка ε^n, а $r^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp)$ и $p^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp)$ ограничены и являются поправками порядков ε^{n+2} и ε^{n+1} соответственно — следовательно, при достаточно малых ε

$$\overline{U} - \underline{U} = 2\varepsilon^n\alpha(x) + O(\varepsilon^{n+2}) > 0,$$
$$\overline{V} - \underline{V} = 2\varepsilon^n\beta(x) + O(\varepsilon^{n+1}) > 0.$$

Для доказательства условия (A$_2$) будем требовать при $x \in (-1,1)$ выполнения более жестких условий:

$$(NN)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v), \\ L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}); \end{cases}$$

$$(PP)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v), \\ L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}); \end{cases}$$

$$(NP)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v), \\ L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}); \end{cases}$$

$$(PN)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) \leqslant L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v), \\ L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) \leqslant L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}). \end{cases}$$

В любом случае приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} &L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \leqslant -\varepsilon^n A + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) < 0, \\ &L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v) \geqslant \varepsilon^n A + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0; \\ &L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \leqslant -\varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) < 0, \\ &L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}) \geqslant \varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Неравенства (24) выполняются при достаточно малых ε и указанном выше выборе констант A, B.

Выполнение условия (A$_3$) следует из способа построения верхнего и нижнего решения, а именно (22), (23).

Лемма 1 доказана. □

Замечание 3. Вместо поправки $\varepsilon^{n+2}r_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ в (21) можно использовать $\varepsilon^{n+1}p_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$, тогда для $p_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ достаточно потребовать $\alpha_x(\mp1) + \dfrac{dp_{n+1}^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}(0) = 0$ вместо первого равенства в (22).

Применяя к задаче (3) Лемму 1, в которой в качестве верхнего и нижнего решений выступают функции $(\underline{U},\underline{V})$ и $(\overline{U},\overline{V})$, определенные выражениями (21), получим, что у задачи (3) существует решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$, для которого справедливы неравенства (20) — из них при $x \in [-1,1]$ следует

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^n) + \underline{U}(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) \leqslant u_\varepsilon(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \overline{U}(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \\ O(\varepsilon^n) + \underline{V}(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) \leqslant v_\varepsilon(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \overline{V}(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \end{aligned}$$

откуда после замены индекса n на $n{+}1$ (в этом месте неявно используется асимптотика порядка $n+1$ — именно по этой причине требуется $C^{(n+2)}$ гладкость функций f и g) с учетом (21) следует оценка (19).

Теорема 1 доказана. ■

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Обозначим

$$\begin{aligned} L_{u,\varepsilon}^t(u,v) &:= \varepsilon^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon), \\ L_{v,\varepsilon}^t(u,v) &:= \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon). \end{aligned}$$

Определение 2. Пары функций $\left(\overline{U}^T(x,t), \overline{V}^T(x,t)\right)$ и $\left(\underline{U}^T(x,t), \underline{V}^T(x,t)\right)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (1), (2), если для них выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{B}_1). \quad \underline{U}^T(x,t) \leqslant \overline{U}^T(x,t), && \underline{V}^T(x,t) \leqslant \overline{V}^T(x,t), \quad (x,t) \in [-1,1]\times\mathbb{R}_0^+; \\ &(\mathrm{B}_2). \quad L_{u,\varepsilon}^t(\overline{U}^T,v) \leqslant 0 \leqslant L_{u,\varepsilon}^t(\underline{U}^T,v), && \underline{V}^T \leqslant v \leqslant \overline{V}^T, \quad (x,t) \in (-1,1)\times\mathbb{R}^+, \\ &\qquad\quad L_{v,\varepsilon}^t(u,\overline{V}^T) \leqslant 0 \leqslant L_{v,\varepsilon}^t(u,\underline{V}^T), && \underline{U}^T \leqslant u \leqslant \overline{U}^T, \quad (x,t) \in (-1,1)\times\mathbb{R}^+; \\ &(\mathrm{B}_3). \quad \overline{U}_x^T(-1,t) \leqslant a^{(-)} \leqslant \underline{U}_x^T(-1,t), && \overline{U}_x^T(1,t) \geqslant a^{(+)} \geqslant \underline{U}_x^T(1,t), \\ &\qquad\quad \overline{V}_x^T(-1,t) \leqslant b^{(-)} \leqslant \underline{V}_x^T(-1,t), && \overline{V}_x^T(1,t) \geqslant b^{(+)} \geqslant \underline{V}_x^T(1,t), \quad t \in \mathbb{R}_0^+. \end{aligned}$$

Утверждение 2. *Пусть существуют пары функций* $(\overline{U}^T,\overline{V}^T)$ *и* $(\underline{U}^T,\underline{V}^T)$ *являющиеся, соответственно, верхним и нижним решениями задачи* (1), (2) *в смысле Определения* 2. *Тогда существует единственное решение* $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ *задачи* (1), (2), *причем на множестве* $[-1,1]\times\mathbb{R}_0^+$ *выполняются неравенства:*

$$\begin{aligned} \underline{U}^T(x,t) &\leqslant y_\varepsilon(x,t) \leqslant \overline{U}^T(x,t), \\ \underline{V}^T(x,t) &\leqslant z_\varepsilon(x,t) \leqslant \overline{V}^T(x,t). \end{aligned}$$

Это утверждение доказывается в [18].

Рассмотрим теперь функции

$$\begin{aligned} \overline{U}^T(x,t,\varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + \left(\overline{U}_1(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \\ \overline{V}^T(x,t,\varepsilon) &= v_\varepsilon(x) + \left(\overline{V}_1(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \\ \underline{U}^T(x,t,\varepsilon) &= u_\varepsilon(x) + \left(\underline{U}_1(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \\ \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) &= v_\varepsilon(x) + \left(\underline{V}_1(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{25}$$

где λ — положительная константа, $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ — существующее согласно Теореме 1 точное решение задачи (3), а $\underline{U}_1(x,\varepsilon)$, $\underline{V}_1(x,\varepsilon)$, $\overline{U}_1(x,\varepsilon)$, $\overline{V}_1(x,\varepsilon)$ — верхние и нижние решения задачи (3), построенные на основе асимптотического приближения первого порядка $(U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon))$ (см. (5), (6), (21)).

В полной аналогии с [19] можно доказать, что при достаточно малом λ функции (25) являются нижним и верхним решениями задачи (1), (2). Отсюда с учетом Утверждения 2 немедленно следует основной результат этого параграфа — Теорема 2.

Теорема 2. *Пусть выполняются Условия 1–3(а) или 1–3(б),4. Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (1), (2) *локально единственно как решение задачи* (3) *и асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова с областью притяжения не меньше* $[\underline{U}_1(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)] \times [\underline{V}_1(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является полезным дополнением к работам по исследованию задач с внутренними переходными слоями для систем с различными степенями малого параметра при старших производных. Конкретно у этой работы существует несколько полезных и интересных направлений для расширения и/или обобщения: 1) двумерный случай; 2) граничные условия Дирихле или Робена; 3) дополнительное исследование устойчивости по граничным условиям.

Несмотря на то что как в настоящей работе, так и в [1, 7] изучается лишь случай на отрезке, принципы доказательств, методы и результаты исследований в перспективе будут без значительных изменений перенесены на задачи в многомерных звездных областях с гладкими границами.

Автор выражает благодарность Н. Т. Левашовой за ценные замечания и помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00042П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. **52**, № 11. С. 1983.
2. *Генералов Е. А., Левашова Н. Т., Сидорова А. Э.* и др. // Биофизика. **62**, № 5, С. 876 (2017).
3. *Sidorova A. E., Levashova N. T., Semina A. E., Mel'nikova A. A.* // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2018. **13**, N 2. P. 454.
4. *Levashova N. T., Sidorova A.E, Semina A.E, Ni Mingkang.* // Sustainability. 2019. **11**, N 13. P. 3658.
5. *Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. **59**, № 4. С. 611.
6. *Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. **60**, № 9. С. 1513.
7. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (в печати) 2021.
8. *Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V.* // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. **10187**. P. 107.
9. *Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N.* // Lect. Notes in Comput. Sci. 2017. **10187**. P. 721.
10. *Lukyanenko D. V., Grigorev V. B., Volkov V. T., Shishlenin M.A.* // Computers and Mathematics with Applications. 2019. **77**, N 5. P. 1245.
11. *Lukyanenko D. V., Shishlenin M. A., Volkov V. T.* // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2019. **27**, N 5. P. 745.
12. *Волков В. Т., Нефедов Н. Н.* // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. 2020. **60**. № 6, С. 975.
13. *Nefedov N. N., Volkov V. T.* // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. **28**, N 5. P. 633.
14. *Бутузов В. Ф., Неделько И. В.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. **40**, № 6. С. 877.
15. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* // Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. 1990.
16. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* // Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. 1973.
17. *Нефедов Н. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. **31**, № 4. С. 719. // Differ. Equ., 1995. **31**, N 4. P. 668.
18. *Pao C. V.* // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.
19. *Мельникова А. А.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. **59**, № 7. С. 1184.

The Existence, Local Uniqueness, and Asymptotic Stability of the Boundary Layer Type Solution of the Neumann Problem for a Two-Equation Nonlinear System with Different Powers of a Small Parameter

B. V. Tishchenko
Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
E-mail: bogdanmsu@yandex.ru

In this paper, we consider the existence, local uniqueness, and asymptotic stability of a solution of the boundary-layer type for a nonlinear one-dimensional initial-boundary problem with inhomogeneous Neumann conditions. The corresponding theorems are proved for different types of quasimonotone righthand sides of the equations by the method of upper and lower solutions and its modification; namely, the asymptotical method of differential inequalities.

Keywords: nonlinear system of equations, small parameter, boundary layers, lower and upper solutions, asymptotic approximation, quasimonotonicity.
PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv.
Received Received 30 June 2021.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 5. Pp. 296–304.

Сведения об авторе

Тищенко Богдан Викторович — аспирант; тел.: +7-917-561-47-53, e-mail: bogdanmsu@yandex.ru.