

АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Аналитическая двумерная модель магнитосферы планеты

О. О. Царева,^{1, а} В. Ю. Попов,^{1, 2, 3, б} Х. В. Малова,^{1, 4} Л. М. Зеленый¹¹ Институт космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН).
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная 84/32.² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.³ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Россия, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20⁴ Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына МГУ имени М. В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 11.05.2021, после доработки 09.06.2021, принята к публикации 11.06.2021.

С помощью конформных отображений построена двумерная модель произвольной магнитосферы планеты. Предполагается, что ее магнитопауза имеет форму параболоида вращения. Благодаря фиксированной геометрии магнитопаузы, магнитные моменты и размер магнитосферы могут изменяться независимо друг от друга, что является преимуществом данной модели.

Ключевые слова: магнитосфера, потенциальная модель, межпланетное магнитное поле.

УДК: 51-71, 537.84, 537.67. PACS: 02.30.Em, 94.30.-d, 96.50.-e.

ВВЕДЕНИЕ

Магнитосфера планеты — это обтекаемая, вытянутая в форме снаряда полость, образующаяся в результате взаимодействия магнитного поля планеты со звездным ветром. Различают два типа планетарных магнитосфер: собственные (например, магнитосферы Меркурия, Земли, планет-гигантов) и индуцированные (магнитосферы Венеры, Марса).

Магнитосферное магнитное поле планеты порождается тремя источниками: 1 — собственным магнитным полем; 2 — внешним магнитным полем; 3 — аномальным магнитным полем, создаваемым остаточной намагниченностью в коре [1].

Собственное магнитное поле, создаваемое токами в ядре планеты и поддерживаемое ее внутренним динамо-механизмом, медленно меняется во времени и обычно имеет дипольную конфигурацию. Однако эволюционные периоды, для которых характерна дипольная магнитная конфигурация, могут сменяться периодами быстрой инверсии магнитного поля, когда магнитные поля могут иметь доминирующую квадрупольную составляющую [2]. Таким образом, магнитное динамо может генерировать конфигурации с разными симметриями. В работе [3] предложена гипотеза, что и экзопланеты, и их родительские звезды могут иметь дипольно-квадрупольные магнитные поля.

Внешнее магнитное поле, создаваемое токами в магнитосфере и ионосфере, претерпевает быстрые изменения, обусловленные звездной активностью. Основные крупномасштабные системы токов в магнитосферах земного типа (Земля, Меркурий): токи Чепмена–Ферраро на магнитопаузе (на внешней границе магнитосферы), экранирующие магнитный переходный слой от проникновения в него собственного магнитного поля; кольцевой ток, состоящий из

захваченных частиц; ток хвоста магнитосферы, который генерируется конвекцией плазмы, и продольные токи, которые замыкаются полярными электроджетами в ионосфере [4]. Это переменное внешнее магнитное поле может образовать индуцированную магнитосферу планеты в отсутствии собственного магнитного поля.

Существуют два подхода к моделированию магнитосфер планет. Первый подход [5–8] ориентирован на минимизацию расхождений результатов моделирования и спутниковых данных для описания реальной магнитосферы Земли. Второй подход [9–11] состоит в использовании потенциального поля для моделирования магнитосферы.

Поскольку модели потенциального поля строятся на основе формы магнитопаузы и параметров внутреннего поля, а не набора эмпирических данных, то их можно использовать для оценки конфигураций магнитосфер, отличающихся от сегодняшней магнитосферы Земли, например для земной палеомагнитосферы во время инверсии [2, 12, 13] или для магнитосфер других планет [3, 14, 15].

В трехмерных аналитических моделях [10, 16] полное магнитное поле построено путем суперпозиции внутреннего поля и поля токов Чепмена–Ферраро на заданной магнитопаузе цилиндрической формы. При этом ряд ранних работ по решению двумерных МГД-задач был посвящен именно форме магнитопаузы. В двумерных моделях [17, 18] формы магнитопауз дипольных и квадрупольных полей были найдены из условия баланса магнитного давления планеты и динамического давления солнечного ветра:

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = P_D = \rho v^2,$$

где ρ и v — плотность и скорость солнечного ветра.

Долгое время для решения двумерных задач с неизвестной границей магнитосферы применялась

^а E-mail: olga8.92@mail.ru

^б E-mail: masterlu@mail.ru

теория конформных отображений. В работе [19] рассматривались два способа определения магнитопаузы: первый способ применим, когда поле не меняет направления на границе магнитосферы, а второй — для поля диполя, сжатого плоскостью в подсолнечной точке. Затем метод моделирования дипольной магнитосферы был усовершенствован добавлением токовых слоев [20, 21] и применен для магнитосферы нейтронной звезды [22]. Этим же методом была построена магнитосфера с дипольным моментом, направленным на Солнце, а также магнитосфера квадруполь [23–25]. Этот усовершенствованный метод характеризуется вычислительной сложностью, поскольку функция отображения искомой формы магнитосферы восстанавливается с помощью интеграла Шварца [26]. В моделях, полученных таким методом, не рассматривается взаимодействие межпланетного магнитного поля (ММП) с магнитосферой, т. к. присутствие разреза вдоль токового слоя искажает картину линий тока. А для наклона магнитного момента необходимо решать новую задачу о форме магнитопаузы.

Из-за ограниченности имеющихся данных о магнитосферах экзопланет двумерные модели по-прежнему остаются актуальными. Наша задача — построить простую двумерную модель произвольной магнитосферы планеты с помощью метода конформных отображений. Форма и размер магнитопаузы заданы. Статистический анализ пересечений магнитопаузы космическими аппаратами [27] показал, что в первом приближении магнитопауза имеет форму параболоида вращения. Предполагаем, что при изменении давления солнечного ветра форма магнитопаузы сохраняется, меняется только ее размер, т. е. магнитопауза остается подобной самой себе. Из-за предполагаемой фиксированной геометрии параметры, входящие в модель, магнитные моменты и размер магнитосферы могут изменяться независимо друг от друга, что является преимуществом нашей модели над ранее использованными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Построим комплексный потенциал $F(z)$ внутри магнитосферы $\mathfrak{L}$ на плоскости $z = x + iy$, который связан с гармоническим векторным полем $\mathbf{V} = B_x + i B_y = (dF(z)/dz)^*$, где $*$ — комплексное сопряжение, т. е. $B_x = \Re\{dF(z)/dz\}$ и $B_y = -\Im\{dF(z)/dz\}$.

Воспользуемся функцией из каталога конформных отображений [26], (с. 223, формула (47)), отображающей внутреннюю область параболы $y^2 = 4\gamma(\gamma - x)$, где $\gamma = \rho(\pi/4)^2$, на единичный круг $|\zeta| \leq 1$:

$$\zeta = \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{z}{\rho}}.$$

Подставим $\zeta = f(z)$ в преобразование Жуковского отображающее единичный круг $|\zeta| < 1$ на плоскость, разрезанную вдоль отрезка $[-1; 1]$ действительной оси:

$$w = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

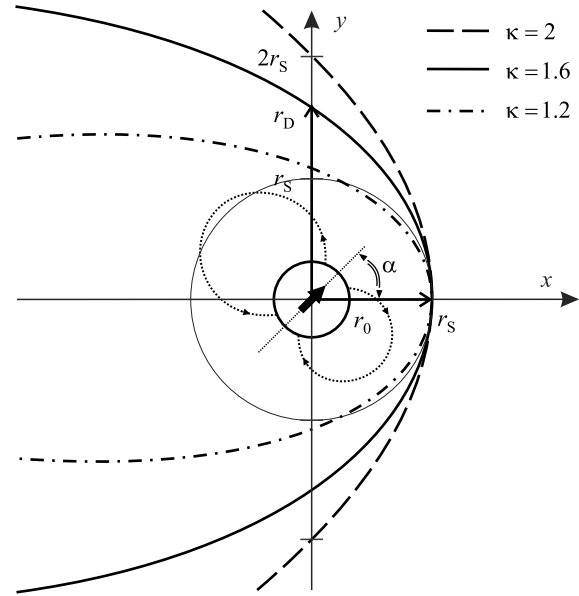


Рис. 1. Система координат, связанная с планетой: ось x направлена от центра планеты к центру звезды, ось y — перпендикулярно к плоскости эклиптики. Параметры магнитосферы: r_0 — радиус планеты, r_s — расстояние до подсолнечной точки магнитопаузы, $r_D = \kappa r_s$ — расстояние до точки пересечения магнитопаузы с осью y (или радиус сечения магнитосферы в плоскости, проходящей через ось y и линию утро–вечер в 3D), α — угол наклона магнитной оси диполя

Этот отрезок не оказывает никакого воздействия на поток, направленный вдоль вещественной оси. Таким образом, получим искомый потенциал на плоскости z :

$$F_{\text{dip}}(z) = -e^{-i\alpha} \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{z}{\rho}} - e^{i\alpha} \operatorname{tg}^{-2} \sqrt{\frac{z}{\rho}},$$

где α — угол наклона магнитной оси диполя относительно Ox (рис. 1).

Однако данное преобразование отображает центр диполя на фокус параболы. А как известно из работ [6, 7], для соответственно параболоидной и эллипсоидальной магнитосфер Земли магнитный диполь планеты находится на расстоянии $\sim 4 r_0$ от фокуса при расстоянии до подсолнечной точки $10 r_0$, где r_0 — радиус планеты. Поэтому мы предлагаем использовать следующую модификацию потенциала, для которого центр диполя отображается не в фокус параболы:

$$F_{\text{dip}}(z) = -e^{-i\alpha} \operatorname{tg}^2 f\left(\frac{z}{\rho}, L\right) - e^{i\alpha} \operatorname{tg}^{-2} f\left(\frac{z}{\rho}, L\right),$$

где $f(z, C) = \sqrt{z} \left(1 - \frac{z}{C}\right),$

где ρ и L — параметры, задающие размеры магнитосферы:

$$\frac{dF_{\text{dip}}(z)}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\operatorname{tg}^2 f\left(\frac{z}{\rho}, L\right) + 1}{\sqrt{z/\rho}} \left(1 - \frac{3}{L} \frac{z}{\rho}\right) \times$$

$$\times \left[e^{-i\alpha} \operatorname{tg} f\left(\frac{z}{\rho}, L\right) - e^{i\alpha} \operatorname{tg}^{-3} f\left(\frac{z}{\rho}, L\right) \right].$$

Предполагаем, что магнитное поле планеты не проникает сквозь границу $\mathfrak{L} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\mathfrak{L}} = 0$, тогда функция тока на границе контура $\Psi = \Im\{F_{\text{dip}}(z)\} = 0$. Искомый контур $\mathfrak{L}$ определяется условием

$$\left| \operatorname{tg}^2 \left\{ \sqrt{\frac{z}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{L} \frac{z}{\rho} \right) \right\} \right| = 1.$$

Квадрат модуля комплексного тангенса можно переписать как

$$\frac{\sin^2 u \operatorname{ch}^2 v + \cos^2 u \operatorname{sh}^2 v}{\cos^2 u \operatorname{ch}^2 v + \sin^2 u \operatorname{sh}^2 v} = 1 \rightarrow u(x, y) = \frac{\pi}{4},$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительная и мнимая части функции $f(z/\rho, L) = \sqrt{z/\rho} [1 - z/(\rho L)]$. Полагая, что при $y = 0$ расстояние до подсолнечной точки магнитопаузы равно $x = r_S$, а при $x = 0$ расстояние до точки пересечения магнитопаузы с Oy равно $y = r_D$, определим параметры ρ и L :

$$u(r_S, 0) = \sqrt{\frac{r_S}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{L} \frac{r_S}{\rho} \right) = \frac{\pi}{4},$$

$$u(0, r_D) = \sqrt{\frac{r_D}{2\rho}} \left(1 + \frac{1}{L} \frac{r_D}{\rho} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пусть расстояние до подсолнечной точки пропорционально расстоянию до точки пересечения магнитопаузы с Oy , т.е. $r_D = \kappa r_S$ для $\kappa \in [1; 2]$, тогда

$$\rho = r_S \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} + \kappa^{3/2}}{\sqrt{2} + \kappa^{3/2}} \right)^2,$$

$$L = \frac{r_S}{\rho} \frac{1 + \kappa \sqrt{\kappa/2}}{1 - \sqrt{\kappa/2}}, \quad \text{где} \quad r_S = \sqrt[6]{\frac{2B_0^2}{\mu_0 P_D}}.$$

где B_0 — магнитный дипольный момент планеты.

Потенциал для квадрупольной магнитосферы представим в виде

$$F_{\text{qp}}(z) = -e^{-i2\lambda} \operatorname{tg}^4 f \left(\frac{z}{\rho}, L \right) - e^{i2\lambda} \operatorname{tg}^{-4} f \left(\frac{z}{\rho}, L \right),$$

где λ — угол наклона магнитных осей квадруполя относительно Ox .

$$\frac{dF_{\text{qp}}(z)}{dz} = -\frac{2}{\rho} \frac{\operatorname{tg}^2 f(z/\rho, L) + 1}{\sqrt{z/\rho}} \left(1 - \frac{3}{L} \frac{z}{\rho} \right) \times$$

$$\times \left[e^{-i\alpha} \operatorname{tg}^3 f \left(\frac{z}{\rho}, L \right) - e^{i\alpha} \operatorname{tg}^{-5} f \left(\frac{z}{\rho}, L \right) \right].$$

Потенциал токового слоя в хвосте магнитосферы зададим функцией, которая качественно воссоздает картину обтекания токового слоя:

$$F_{\text{cs}}(z, \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{asinh} \left[e^{-i\alpha} \times \right.$$

$$\times \left(1 - \sin^4 \left\{ \frac{f(z/R_{st} - 1, L/C_L)}{\sqrt[4]{2}} \right\} \right) \left. \right] -$$

$$- i\phi(\alpha) f \left(\frac{z}{\rho}, L \right),$$

где $C_L = 1/\kappa + (1 - \sqrt{\kappa/2})/(\sqrt{2}\kappa + \kappa^{5/2})$, а коэффициент $\phi(\alpha) = 8/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin[(2n-1)\alpha]/(2n-1)^2$ — это ряд Фурье для треугольной периодической функции, $\phi(0) = 0$, $\phi(\pm\pi/2) = \mp 1$. Линии тока потенциала обтекают токовые магнитосферные слои, а нейтральная линия тока совпадает с магнитопаузой. Обтекаемые токовые слои представляются бесконечно тонкими (рис. 2, б, е). Однако для Земли ширина токового слоя составляет $\sim 1.5 R_E$, поэтому для визуализации таких слоев мы дополнительно «сгладили» найденный потенциал. Результат представлен на рис. 2, в, е, и рис. 3, в.

Таким образом, построен потенциал магнитного поля $F(z)$ внутри магнитосферы, т.е. для переменных z , удовлетворяющих условию $\Re\{f(z)\} \leq \pi/4$. Вне магнитосферы присутствует равномерное ММП, в суперпозиции с которым суммарный потенциал предстанет в виде

$$F_{\text{dip+imf}}(z) = \begin{cases} F_{\text{dip}}(z) + F_{\text{cs}}(z, \alpha) + |B_{\infty}/B_S| e^{-i\beta} z, & \text{если } \Re\{f(z)\} \leq \pi/4, \\ |B_{\infty}/B_S| e^{-i\beta} z, & \text{если } \Re\{f(z)\} > \pi/4, \end{cases}$$

где $|B_{\infty}| e^{-i\beta}$ — поле в бесконечно удаленной точке, т.е. ММП. Для солнечного ветра со скоростью 400 км/ч и плотностью 5 см⁻³ динамическое давление равно 1.4 нПа, тогда магнитное поле на подсолнечной точке магнитопаузы Земли равно $B_S = \sqrt{2\mu_0 P_D} = 60$ нТл. Средняя напряженность ММП около Земли $B_{\infty} = 6$ нТл, отсюда для дипольного поля Земли $|B_{\infty}|/|B_S| = 0.1$.

Потенциал квадрупольной магнитосферы с токовым слоем и ММП имеет вид

$$F_{\text{qp+imf}}(z) = \begin{cases} F_{\text{qp}}(z) - F_{\text{cs}}(z, 2\lambda) + |B_{\infty}/B_S| e^{-i\beta} z, & \text{если } \Re\{f(z)\} \leq \pi/4, \\ |B_{\infty}/B_S| e^{-i\beta} z, & \text{если } \Re\{f(z)\} > \pi/4. \end{cases}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Модель дает качественную картину силовых линий для закрытых и открытых мультипольных магнитосфер. На рис. 2 и 3 показаны картины силовых линий $\Psi = \Im\{F(z)\}$ дипольного и квадрупольного полей с разными ориентациями магнитных моментов и радиусами магнитосферных хвостов. На рис. 2, а, г, ж и 3, а приведены закрытые магнитосферы, магнитное поле которых — это результат суперпозиции собственного магнитного поля планеты и внешнего магнитного поля, создаваемого токами Чепмена–Ферраро на магнитопаузе. Рис. 2, б, д, з и 3, б включают токовые слои в хвосте магнитосферы. На рис. 2, в, е, и и рис. 3, в показаны открытые магнитосферы с усредненным токовым слоем и ММП. Плотность тока определяется как $\mu_0 \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$. На рисунках изображена компонента плотности тока $\mu_0 \tilde{j}_{\perp} = (\partial_y B_x - \partial_x B_y)/|B|$, перпендикулярная плоскости xOy и нормированная на модуль магнитного поля $|B|$ в каждой точке.

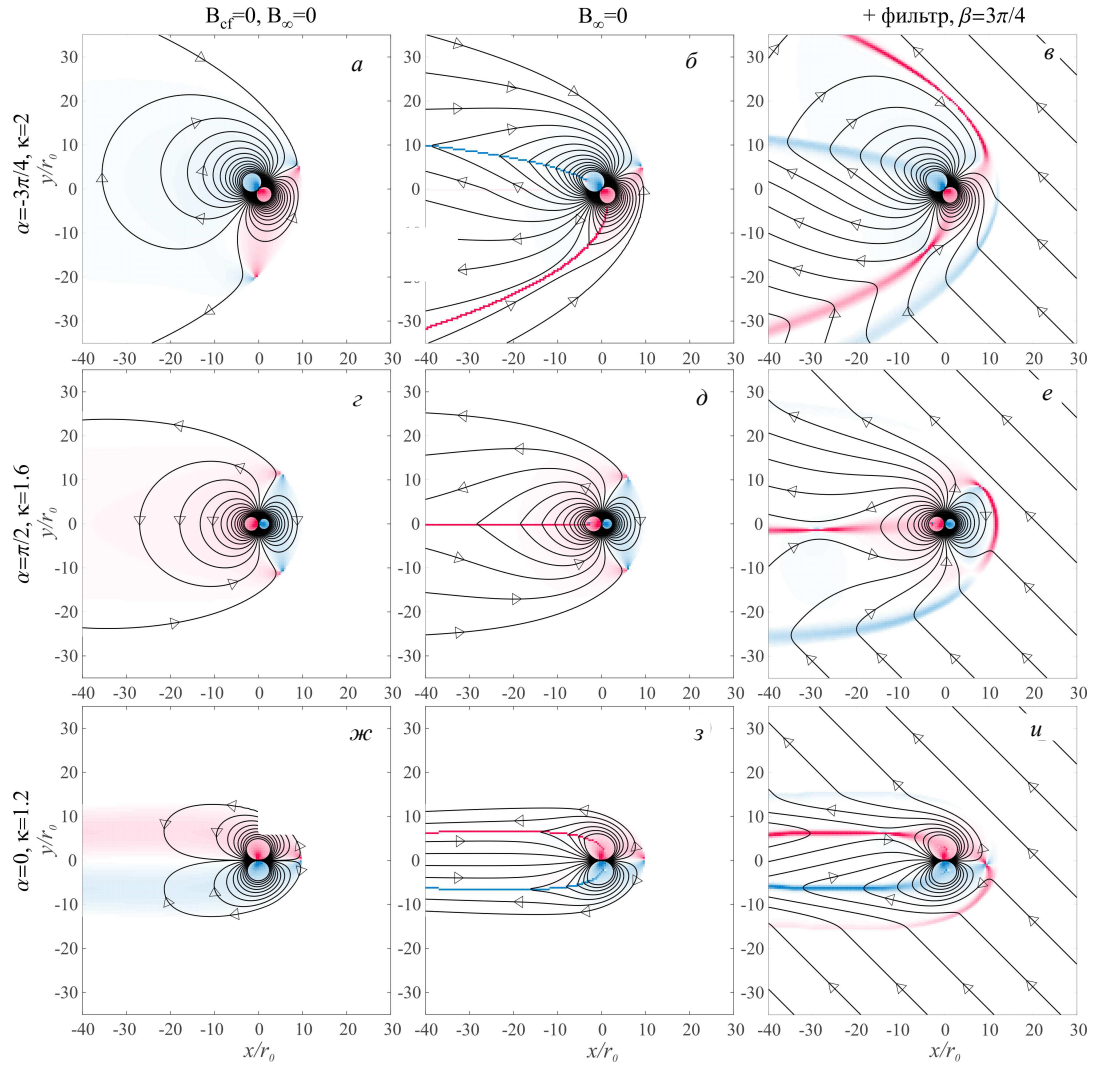


Рис. 2. Силовые линии дипольного магнитного поля и плотность тока $\tilde{j}_\perp$, перпендикулярная плоскости xOy , (цветом выделено направление тока)

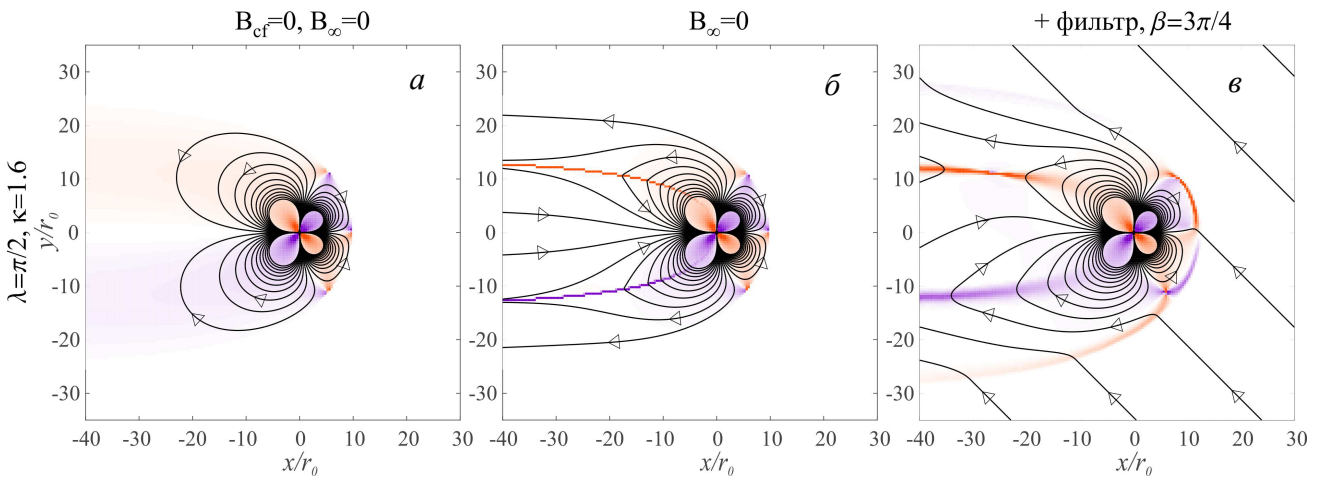


Рис. 3. Силовые линии квадрупольного магнитного поля и плотность тока $\tilde{j}_\perp$, перпендикулярная плоскости xOy (цветом выделено направление тока)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При помощи конформных отображений построена аналитическая двумерная модель обтекания магнитосферы планеты звездным ветром. Получена полная конфигурация магнитосферы: топология ее силовых линий и структура магнитосферных токовых

систем в хвосте и на магнитопаузе. Ее можно сравнить с результатами потенциальной модели [16] и МГД-моделирования [13, 28]. Аналогично приведенным работам рассмотрены магнитосферы дипольных и квадрупольных полей с произвольным заданным наклоном магнитного момента и ориента-

цией ММП. Простота представленной модели делает ее привлекательной для исследования магнитосфер малоизученных планет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McPherron R.L. // Geomagnetic field. Encyclopædia Britannica. 2020.
2. Царева О. О., Попов В. Ю., Малова Х. В. и др. // УФН. 2018. **188**, № 2. С. 208. (Tsareva O. O., Popov V. Yu., Malova H. V. et al. // *UFN*. 2018. **188**, N 2. P. 208.)
3. Sokoloff D., Malova H., Yushkov E. // *Symmetry*. 2020. **12**, N 12.
4. Siscoe G.L., Crooker N.U., Erickson G.M. et al. // Global Geometry of Magnetospheric Currents Inferred from MHD Simulations. In *Magnetospheric Current Systems*. 2000.
5. Alexeev I.I., Belenkaya E.S., Kalegaev V.V. et al. // *JGR*. 1996. **101**, N A4. P. 7737.
6. Stern D.P. // *JGR*. 1985. **90**, N A11. P. 10851.
7. Tsyganenko N.A. // *Planet. Space Sci.* 1989. **37**, N 1. P. 5.
8. Tsyganenko N.A. // *JGR*. 2002. **107**, N A8. P. 1179.
9. Hilmer R.V., Voigt G.-H. // *JGR*. 1995. **100**, N A4. P. 5613.
10. Voigt G.H. // *Planet. Space Sci.* 1981. **29**, N 1. P. 1.
11. Willis D.M., Holder A.C., Davis C.J. // *Ann. Geophys.* 2000. **18**, N 1. P. 11.
12. Vogt J., Zieger B., Glassmeier K.H. et al. // *JGR*. 2007. **112**, N A6. P. A06216.
13. Vogt J., Zieger B., Stadelmann A. et al. // *JGR*. 2004. **109**, N A12. P. A12221.
14. Voigt G.H., Behannon K.W., Ness N.F. // *JGR*. 1987. **92**, N A13. P. 15337.
15. Voigt G.-H., Ness N.F. // *JGL*. 1990. **17**, N 10. P. 1705.
16. Stadelmann A., Vogt J., Glassmeier K.-H. et al. // *Earth, Planets and Space*. 2010. **62**, N 3. P. 333.
17. Leubner M.P., Zollner K. // *JGR*. 1985. **90**, N A9. P. 8265.
18. Старченко С. В., Щербаков В. П. // Докл. АН СССР. 1991. **321**, № 1. С. 69. (Starchenko S. V., Shcherbakov V. P. // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1991. **321**, N 1. P. 69.)
19. Hurley J. // *Phys. Fluids*. 1961. **4**, N 7. P. 854.
20. Крылов А. Л. // Докл. АН СССР. 1972. **207**, № 1. С. 90. (Krylov A. L. // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1972. **207**, N 1. P. 90.)
21. Oberts P. // *Geomagn. Aehron.* 1973. **13**. P. 896.
22. Орешина И. В., Сомов Б. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. **65**, № 6. С. 90. (Oreshina I. V., Somov B. V. // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2010. **65**, N 6. P. 521.)
23. Biernat H., Koemle N., Rucker H. // *Planet. Space Sci.* 1981. **29**, N 10. P. 1101.
24. Biernat H.K., Koemle N.I., Lichtenegger H.I.M. // *Planet. Space Sci.* 1985. **33**, N 1. P. 45.
25. Levy R.H. // *Phys. Fluids*. 1964. **7**, N 6. P. 822.
26. Лаврик В. И., Савенков В. Н. // Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. (Lavrik V.I., Savenkov V.N. // *A Handbook on Conformal Mappings* (in Russ.). Naukova Dumka. Kiev. 1970.)
27. Wang Y., Sibeck D.G., Merka J. et al. // *JGR*. 2013. **118**, N 5. P. 2173.
28. Zieger B., Vogt J., Glassmeier K.H., Gombosi T.I. // *JGR*. 2004. **109**, N A7. P. A07205.

An Analytical Two-Dimensional Model of the Planet's Magnetosphere

O. O. Tsareva^{1a}, V. Yu. Popov^{1,2,3b}, H. V. Malova^{1,4}, L. M. Zelenyi¹

¹Space Research Institute, Russian Academy of Sciences. Moscow, 117997 Russia

²Department of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow, 119991 Russia

³National Research University Higher School of Economics. Moscow, 101000 Russia

⁴Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow, 119991 Russia

E-mail: ^aolga8.92@mail.ru, ^bmasterlu@mail.ru

A two-dimensional model of an arbitrary planet's magnetosphere is constructed using conformal maps. It is assumed that its magnetopause has the shape of a paraboloid of rotation. Due to the fixed geometry of the magnetopause, the magnetic moments and the size of the magnetosphere can change independently of each other, which is an advantage of this model.

Keywords: magnetosphere, potential theory, interplanetary magnetic fields.

PACS: 02.30.Em, 94.30.-d, 96.50.-e.

Received 11 May 2021.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 5. Pp. 392-397.

Сведения об авторах

1. Царева Ольга Олеговна — мл. науч. сотр. ИКИ РАН; e-mail: olga8.92@mail.ru.

2. Попов Виктор Юрьевич — доктор физ.-мат. наук, проф. МГУ; e-mail: masterlu@mail.ru.

3. Малова Хельми Витальевна — доктор физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. НИИЯФ МГУ; тел.: (495) 333-25-00, e-mail: hmalova@yandex.ru.

4. Зеленый Лев Матвеевич — доктор физ.-мат. наук, акад. РАН, почетный директор ИКИ РАН; тел.: (495) 333-25-88, e-mail: lzelenyi@iki.rssi.ru.