ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Стабилизация решения вида движущегося фронта в уравнении реакция—диффузия

К. А. Коцюбинский,[а] Н. Т. Левашова,[б] А. А. Мельникова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 28.07.2021, после доработки 14.09.2021, принята к публикации 15.09.2021.

В работе исследуется вопрос о стабилизации решения вида фронта параболической задачи для одномерного уравнения реакция—диффузия к решению с внутренним переходным слоем соответствующей стационарной задачи. Результат о стабилизации, полученный ранее В. Ф. Бутузовым и И. В. Неделько при помощи метода параметрических барьеров, в настоящей работе уточняется благодаря учету скорости движения фронта, что позволяет получить оценку времени, за которое решение параболической задачи окажется в малой окрестности стационарного решения. Этот результат является практически важным для применения численных методов стационирования при решении эллиптических задач.

Ключевые слова: уравнение реакция—диффузия, сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений второго порядка, малый параметр, стабилизация решения, асимптотический метод.

УДК: 517.95. PACS: 02.30.Jr.

ВВЕДЕНИЕ

Начально–краевые задачи для уравнения типа реакция—дифузия часто используются при моделировании так называемых автоволновых процессов [1–3], связанных с явлением распространения фронта автоволны «переключения» двух различных состояний бистабильной среды. Характерным примером такой постановки является модель распространения фронта медленного горения [1]. Вместе с тем в некоторых биофизических задачах появляется необходимость в создании моделей, описывающих стабилизацию волн переключения к стационарным контрастным структурам типа ступеньки, то есть функциям, резко изменяющимся в некоторой узкой подобласти области определения между значениями, отвечающими различным состояниям бистабильной среды. К таким явлениям относятся, например, формирование пятен на шкурах животных [3] или развитие городских поселений [4].

Достаточно удаленную от граничных точек подобласть, в которой функция обладает большим градиентом, будем называть «внутренним переходным слоем».

При численной реализации процесса стабилизации решений вида фронта весьма эффективно использовать метод эволюционной факторизации [5]. Если, кроме того, в модели требуется стабилизация к стационарному решению с внутренним переходным слоем, то задача должна быть поставлена таким образом, чтобы указанное решение существовало и было асимптотически устойчивым.

Теорема существования стационарного решения с внутренним переходным слоем уравнения реакция—диффузия на отрезке содержится в книге [6]. Вопрос об устойчивости такого решения обсуждается в работе [7]. В статье [8] получена глобальная область влияния стационарного решения в случае граничных условий Неймана. Исследование процесса стабилизации проведено методом параметрических барьеров. Работа [9] посвящена вопросу формирования фронта в указанных задачах.

В настоящей работе рассматривается вопрос о стабилизации решения начально–краевой задачи для уравнения реакция—диффузия с краевыми условиям Дирихле на отрезке к стационарному решению с внутренним переходным слоем из гладкой начальной функции, имеющей вид уже сформированного фронта и удовлетворяющей условиям согласования с граничными условиями на концах отрезка. Доказательство основной теоремы опирается на метод верхних и нижних решений, который в работе [10] применялся для доказательства существования решения вида фронта у рассматриваемой здесь задачи.

Как известно [10, 11], решение вида фронта начально-краевой задачи в любой момент времени заключено между верхним решением этой задачи и нижним. В качестве последнего можно взять решение стационарной задачи. Мы покажем, что при определенных условиях с течением времени верхнее решение вида движущегося фронта окажется внутри локальной области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения, что и будет означать стабилизацию. Учет скорости движения верхнего решения даст возможность уточнить время, за которое решение параболической задачи окажется в малой окрестности стационарного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения реакция—диффузия:

$$\begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial t} = f(v,x,\varepsilon), \quad x\in(0,1), \quad t>0,\\ v(0,t)=h_0, v(1,t)=h_1, \quad t>0,\\ v(x,0)=v_{\text{init}}(x), \quad x\in[0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

[а] E-mail: kkotsubinsky@gmail.com

[б] E-mail: natasha@wanaku.net

Здесь ε — малый параметр, $f(v,x,\varepsilon) \in C^4(\overline{D})$, где $\overline{D} = \left\{(v,x,\varepsilon) \in I_v \times [0,1] \times (0,\varepsilon_0]\right\}$, $v_{\text{init}}(x)$ — гладкая на отрезке $[0,1]$ функция, имеющая вид фронта, сформированного во внутренней точке отрезка, а граничные и начальное условия согласованы до непрерывности: $v_{\text{init}}(0) = h_0$, $v_{\text{init}}(1) = h_1$.

Заметим, что такое вхождение малого параметра ε в уравнение означает, что диффузия мала, а реакции — быстрые.

Потребуем выполнение следующего условия.

(A1) Уравнение $f(v,x,0) = 0$ имеет на отрезке $x \in [0,1]$ три изолированных упорядоченных корня $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$, и, кроме того, выполняются неравенства: $f_v(\varphi^{(\mp)}(x),x,0) > 0$.

Далее будет построено верхнее решения задачи (1) как модификация асимптотического приближения решения вида движущегося фронта этой задачи, то есть функции, резко изменяющейся в окрестности некоторой внутренней точки отрезка $[0,1]$, положение которой определяется законом $\hat{x}(t)$, от значений, близких к $\varphi^{(-)}(\hat{x}(t))$, до значений, близких к $\varphi^{(+)}(\hat{x}(t))$. Будем считать, что функция $\hat{x}(t)$ определяется из условия пересечения решения $v_\varepsilon(x,t)$ задачи (1) и функции $\varphi^{(0)}(x)$. Значение функции $\hat{x}(t)$ в каждый момент времени называется точкой локализации переходного слоя, а окрестность этой точки, в которой решение обладает большим градиентом, — внутренним переходным слоем.

Сформулируем достаточные условия, при которых, согласно работе [10], у задачи (1) существует решение вида фронта. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \xi} = f\left(\widetilde{v},x,0\right), \quad -\infty < \xi < +\infty. \tag{2}$$

Это уравнение называется присоединенным уравнением задачи (1). Здесь x и W являются параметрами. Перепишем уравнение (2) в виде системы:

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \xi} = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + W\Phi = f\left(\widetilde{v},x,0\right).$$

Точки $\left(\varphi^{(\mp)}(x),0\right)$ фазовой плоскости $(\widetilde{v},\Phi)$ являются точками покоя типа седла этой системы. Сепаратрисы седловых точек, функции $\Phi^{(\mp)}(\widetilde{v},x,W)$, определяются как решения задач Коши:

$$\begin{gathered}\Phi^{(\mp)}\frac{\partial \Phi^{(\mp)}}{\partial \widetilde{v}} + W\Phi^{(\mp)} = f(\widetilde{v},x,0),\\ \varphi^{(-)}(x) < \widetilde{v} < \varphi^{(+)}(x),\\ \Phi^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x),x,W) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Согласно исследованиям, приведенным в книге [12], для каждого значения $x \in (0,1)$ существует такая величина W, что решение каждой из этих задач Коши существует и строго положительно внутри интервала $\widetilde{v} \in (\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x))$.

При $W = 0$ функции $\Phi^{(\mp)}(\widetilde{v},x,0)$ можно выписать в явном виде:

$$\begin{gathered}\Phi^{(\mp)}(\widetilde{v},x,0) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(x)}^{\widetilde{v}} f(v,x,0)dv},\\ \widetilde{v} \in (\varphi^{(-)}(x),\varphi^{(+)}(x)).\end{gathered} \tag{4}$$

Как показано в книге [12], существует такая пара параметров x_0, W_0, что уравнение (2) с условиями $\widetilde{v} \to \varphi^{(\mp)}(x_0)$ при $\xi \to \mp\infty$ имеет классическое решение, а значит, выполняется равенство

$$\Phi^{(-)}(\varphi^{(0)}(x_0),x_0,W_0) = \Phi^{(+)}(\varphi^{(0)}(x_0),x_0,W_0) \tag{5}$$

и фазовые траектории $\Phi^{(-)}(\widetilde{v},x_0,W_0)$ и $\Phi^{(+)}(\widetilde{v},x_0,W_0)$ образуют сепаратрису, соединяющую седловые точки:

$$\Phi(\widetilde{v},x_0,W_0) = \begin{cases}\Phi^{(-)}(\widetilde{v},x_0,W_0), \\ \qquad \varphi^{(-)}(x) \leqslant \widetilde{v} \leqslant \varphi^{(0)}(x), \\ \Phi^{(+)}(\widetilde{v},x_0,W_0), \\ \qquad \varphi^{(0)}(x) \leqslant \widetilde{v} \leqslant \varphi^{(+)}(x).\end{cases} \tag{6}$$

Проинтегрируем уравнение (3) по $\widetilde{v}$ в пределах от $\varphi^{(-)}(x_0)$ до $\varphi^{(0)}(x_0)$ и от $\varphi^{(+)}(x_0)$ до $\varphi^{(0)}(x_0)$. Приравняем левые части полученных равенств и после некоторых преобразований с учетом равенства (5) придем к выражению, связывающему параметры:

$$W_0(x_0) = \int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} f(v,x_0,0)dv \times \\ \times \left(\int\limits_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} \Phi(v,x_0,W_0)dv\right)^{-1}. \tag{7}$$

Введем обозначение $J(x) := \int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(v,x,0)dv$.

Потребуем выполнения следующих условий.

(A2) Пусть существует единственная внутренняя точка $x = x_{s0}$ отрезка $(0,1)$ такая, что выполнено равенство $J(x_{s0}) = 0$ и, кроме того, выполняется неравенство $J_x(x_{s0}) < 0$.

Отметим, что в силу условия **(A1)** выполняется равенство $J_x(x) = \int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f_x(v,x,0)dv$. Из условия **(A2)** также следует неравенство $\dfrac{dW_0}{dx_0}(x_{s0}) < 0$.

(A3) Пусть начальная задача: $\dfrac{dx_0}{dt} = W_0(x_0)$, $x_0(0) = x_{00}$, где $x_{00} \in (0,1)$, имеет единственное решение $x_0(t) \in (0,1)$ при $t > 0$.

Замечание 1. Выполнение условия **(A2)** означает, что точка $x = x_{s0}$ является асимптотически устойчивой точкой покоя этой задачи.

Замечание 2. Из условия **(A2)** и выражения (4) следует, что выполняется равенство $\Phi^{(-)}(\varphi^{(0)}(x_{s0}),x_{s0},0) = \Phi^{(+)}(\varphi^{(0)}(x_{s0}),x_{s0},0)$.

2. ЛОКАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Если существует стационарное решение задачи (1), то оно является решением следующей задачи:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 v_s}{dx^2} = f(v_s, x, \varepsilon), \quad x \in (0,1), \qquad v_s(0) = h_0, \quad v_s(1) = h_1. \tag{8}$$

Известно [6], что при выполнении условий **(A1)**, **(A2)** существует решение задачи (8) с внутренним переходным слоем в окрестности некоторой точки $\hat{x}_s \in (0,1)$, отстоящей от точки x_{s0} на величину порядка $O(\varepsilon)$.

Локальная область притяжения решения стационарной задачи, отвечающей задаче (1), непосредственно связана с верхним и нижним решениями задачи (8), которые мы будем понимать в смысле определения данного в работе Н. Н. Нефедова и др. в этом журнале за 2018 г. Эти функции будем строить как модификации асимптотического приближения решения этой задачи.

2.1. Асимптотическое приближение решения стационарной задачи

Будем использовать асимптотическое приближение решения задачи (8), построенное в книге [6]. Здесь нам понадобится приближение до второго порядка по малому параметру, которое мы обозначим как $V_{s2}(x, \hat{x}_s, \varepsilon)$. Эта функция строится отдельно слева и справа от точки локализации внутреннего переходного слоя $\hat{x}_s$ в виде суммы регулярной части $\overline{v}^{(\mp)}$, функций переходного слоя $Q^{(\mp)}$, описывающих поведение решения в окрестности точки $\hat{x}_s$ и зависящих от растянутой переменной $\xi_s := \dfrac{x - \hat{x}_s}{\varepsilon}$, а также функций пограничного слоя $P^{(\mp)}$, зависящих соответственно от растянутых переменных $\zeta^{(-)} := \dfrac{x}{\varepsilon}$ и $\zeta^{(+)} := \dfrac{x-1}{\varepsilon}$:

$$V_{s2}(x, \hat{x}_s, \varepsilon) := \begin{cases} V_{s2}^{(-)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon), & x \in [0, \hat{x}_s], \\ V_{s2}^{(+)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon), & x \in [\hat{x}_s, 1], \end{cases} = \begin{cases} \overline{v}^{(-)}(x,\varepsilon) + Q_s^{(-)}(\xi_s, \hat{x}_s, \varepsilon) + P^{(-)}(\zeta^{(-)}, \varepsilon), \\ \quad x \in [0, \hat{x}_s], \xi_s \leqslant 0, \zeta^{(-)} \geqslant 0, \\ \overline{v}^{(+)}(x,\varepsilon) + Q_s^{(+)}(\xi_s, \hat{x}_s, \varepsilon) + P^{(+)}(\zeta^{(+)}, \varepsilon), \\ \quad x \in [\hat{x}_s, 1], \xi_s \geqslant 0, \zeta^{(+)} \leqslant 0. \end{cases} \tag{9}$$

Каждое слагаемое в правой части (9) представляется в виде разложения второго порядка по степеням ε, в частности

$$\overline{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \overline{v}_i^{(\mp)}(x), \qquad Q_s^{(\mp)}(\xi_s, \hat{x}_s, \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i Q_{si}^{(\mp)}(\xi_s, \hat{x}_s). \tag{10}$$

Функции $V_{s2}^{(-)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon)$ и $V_{s2}^{(+)}(x, \hat{x}_s, \varepsilon)$ и их производные по переменной x сшиваются в точке $\hat{x}_s$, при этом считается, что выполняются равенства:

$$\overline{v}^{(-)}(\hat{x}_s, \varepsilon) + Q_s^{(-)}(0, \hat{x}_s, \varepsilon) = = \overline{v}^{(+)}(\hat{x}_s, \varepsilon) + Q_s^{(+)}(0, \hat{x}_s, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(\hat{x}_s), \tag{11}$$

$$\frac{\partial \overline{v}_s^{(-)}}{\partial x}(\hat{x}_s, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_s^{(-)}}{\partial \xi_s}(0, \hat{x}_s, \varepsilon) = = \frac{\partial \overline{v}_s^{(+)}}{\partial x}(\hat{x}_s, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_s^{(+)}}{\partial \xi_s}(0, \hat{x}_s, \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Параметр $\hat{x}_s$ также представляется в виде разложения по степеням ε:

$$\hat{x}_s(\varepsilon) := \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i x_{si}, \tag{13}$$

каждое слагаемое которого определяется из условия (12).

Учитывая условие **(A1)**, положим: $\overline{v}_0^{(\mp)}(x) = = \varphi^{(\mp)}(x)$. Функции $\overline{v}_i^{(\mp)}(x)$, $i = 1, 2$ определяются из равенств: $0 = \overline{f}_v^{(\mp)}(x)\overline{v}_{s1}^{(\mp)} + \overline{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$. Здесь для краткости введены обозначения $\overline{f}^{(\mp)}(x) := := f(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0)$, и такой же смысл имеют обозначения для производных $\overline{f}_v^{(\mp)}(x)$ и $\overline{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$.

Уравнения для функций переходного слоя нулевого порядка сводятся к уравнениям вида (2) (с $W = 0$) для функции

$$\widetilde{v}_s(\xi_s, \hat{x}_s) = \begin{cases} Q_{s0}^{(-)}(\xi_s, \hat{x}_s) + \varphi^{(-)}(\hat{x}_s), & \xi_s \leqslant 0, \\ Q_{s0}^{(+)}(\xi_s, \hat{x}_s) + \varphi^{(+)}(\hat{x}_s), & \xi_s \geqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

Из рассуждений, приведенных в §1, следует, что функцию $\widetilde{v}_s$ на каждой из полупрямых $\xi_s \leqslant 0$ и $\xi_s \geqslant 0$ можно определить как решение соответствующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{v}_s}{\partial \xi_s} = \Phi^{(-)}(\widetilde{v}_s, \hat{x}_s, 0), \ \xi_s < 0, \\ \widetilde{v}_s(0, \hat{x}_s) = \varphi^{(0)}(\hat{x}_s); \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{v}_s}{\partial \xi_s} = \Phi^{(+)}(\widetilde{v}_s, \hat{x}_s, 0), \ \xi_s > 0, \\ \widetilde{v}_s(0, \hat{x}_s) = \varphi^{(0)}(\hat{x}_s). \end{cases} \tag{15}$$

Справедливы оценки [13]:

$$\left| Q_{s0}^{(\mp)}(\xi_s, \hat{x}_s) \right| < C\, e^{-\kappa|\xi_s|}, \tag{16}$$

где C и κ — положительные константы.

Функции переходного слоя первого порядка можно выписать в явном виде:

$$Q_{s1}^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s) = -\overline{v}_{s1}^{(\mp)}(\hat{x}_s)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s,0)}{\Phi^{(\mp)}(0,\hat{x}_s,0)} + \\ + \Phi^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s,0)\int\limits_0^{\xi_s}\frac{d\xi_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi_1,\hat{x}_s,0)\right)^2}\times \\ \times\int\limits_{\mp\infty}^{\xi_1}\Phi^{(\mp)}(\xi_2,\hat{x}_s,0)Qf_{s1}^{(\mp)}(\xi_2,\hat{x}_s)d\xi_2. \quad (17)$$

Здесь использованы обозначения $\widetilde{f}(\xi_s,\hat{x}_s) := f\left(\widetilde{v}_s(\xi_s,\hat{x}_s),\hat{x}_s,0\right)$, и такой же смысл имеют схожие обозначения для производных $\Phi^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s,0) := \Phi^{(\mp)}(\widetilde{v}_s(\xi_s,\hat{x}_s),\hat{x}_s,0)$ и

$$Qf_{s1}^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s) := \left(\widetilde{f}_v(\xi_s,\hat{x}_s) - \overline{f}_v^{(\mp)}(\hat{x}_s)\right)\times \\ \times\left(\frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(\hat{x}_s)\xi_s + \overline{v}_{s1}^{(\mp)}(\hat{x}_s)\right) + \\ + \left(\widetilde{f}_x(\xi_s,\hat{x}_s) - \overline{f}_x^{(\mp)}(\hat{x}_s)\right)\xi_s + \\ + \widetilde{f}_\varepsilon(\xi_s,\hat{x}_s) - \overline{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\hat{x}_s). \quad (18)$$

Функции второго порядка $Q_{s2}^{(\mp)}(\xi_s,\hat{x}_s)$ получаются аналогично первому. Они имеют экспоненциальные оценки типа (16) (см. [14]).

2.1.1. Точка локализации переходного слоя решения стационарной задачи

Подставим в условие сшивания (12) разложения (10) и (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по малому параметру получившихся равенств. Коэффициенты при ε^{-1} в сумме равны нулю (см. замечание 2 после условия **(A3)**, обозначение (14) и уравнения (15)). Объединив коэффициенты при ε^0, получим равенство, из которого будет следовать выражение для коэффициента x_{s1} в сумме (13):

$$x_{s1} = -\frac{\Phi(\varphi^{(0)}(x_{s0}),x_{s0},0)}{J_x(x_{s0})}G_{s1}(x_{s0}), \quad (19)$$

где

$$G_{s1}(x_{s0}) = \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_{s0}) - \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_{s0}) + \\ + \frac{dQ_{s1}^{(-)}}{d\xi_s}(0,x_{s0}) - \frac{dQ_{s1}^{(+)}}{d\xi_s}(0,x_{s0}) \quad (20)$$

и использовано обозначение (6). Аналогичным образом можно получить выражение и для коэффициента x_{s2} разложения (13).

2.1.2. Нижнее и верхнее решения стационарной задачи

Верхнее решение стационарной задачи строится согласно методу, предложенному в [10], (см. также [15]) как модификация асимптотического приближения задачи (8):

$$\beta_s(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_{s2}^{(-)}(x,\overline{x}_s,\varepsilon) + \\ +\varepsilon^2\left(\mu_s^{(-)} + Q_{s\beta}^{(-)}(\overline{\xi}_s,\overline{x}_s) + P_\beta^{(-)}(\zeta^{(-)})\right), \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_s,\ \bar{\xi}_s \leqslant 0,\ \zeta^{(-)} \geqslant 0, \\ V_{s2}^{(+)}(x,\overline{x}_s,\varepsilon) + \\ +\varepsilon^2\left(\mu_s^{(+)} + Q_{s\beta}^{(+)}(\overline{\xi}_s,\overline{x}_s) + P_\beta^{(+)}(\zeta^{(+)})\right), \\ \qquad \bar{x}_s \leqslant x \leqslant 1,\ \bar{\xi}_s \geqslant 0,\ \zeta^{(+)} \leqslant 0, \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{x}_s = \hat{x}_s(\varepsilon) - \varepsilon^2\delta_s$, $\overline{\xi}_s = \dfrac{x-\overline{x}_s}{\varepsilon}$, $\mu_s^{(\mp)}$ — положительные константы, функции $Q_{s\beta}(\xi_s^{(\mp)},\overline{x}_s)$ имеют экспоненциальные оценки типа (16), а $P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)})$ определяются аналогично работе [16] и являются экспоненциально убывающими до нуля вдали от соответствующей границы отрезка $[0,1]$. Константа δ_s положительна и может быть выбрана достаточно большой. Термин «достаточно большой» будет оговорен ниже.

Нижнее решение, $\alpha_s(x,\varepsilon)$ задачи (8) имеет такой же вид, что и (21), с тем отличием, что вместо параметра $\overline{x}_s$ в него входит параметр $\underline{x}_s = \hat{x}_s(\varepsilon) + \varepsilon^2\delta_s$ и переменная $\underline{\xi}_s = \dfrac{x-\underline{x}_s}{\varepsilon}$ вместо $\bar{\xi}_s$, а добавки порядка ε^2 к асимптотическому приближению $V_{s2}^{(\mp)}(x,\overline{x}_s,\varepsilon)$ входят в нижнее решение со знаком «$-$».

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При выполнении условий **(A1)**, **(A2)** и достаточно малых ε существует стационарное решение $v_{s,\varepsilon}(x)$ задачи (1), для которого функция $V_{s2}(x,\hat{x}_s,\varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^3\right)$.

Это решение локально единственно как решение задачи (8) и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью притяжения по крайней мере $[\alpha_s(x,\varepsilon),\beta_s(x,\varepsilon)]$.

Доказательство существование решения и обоснование его асимптотического приближения содержится в [6]. Доказательство устойчивости практически совпадает с доказательством аналогичных теорем в работе Н. Н. Нефедова и др. в этом журнале за 2018 г. и в работе [17].

3. ВЕРХНЕЕ РЕШЕНИЕ ВИДА ФРОНТА

Для построения верхнего решения задачи (1) мы будем использовать асимптотический метод дифференциальных неравенств. Согласно этому методу оно является модификацией асимптотического приближения решения вида фронта. В связи с этим сначала опишем алгоритм построения приближения решения вида фронта, в каждый момент времени, локализованного в окрестности точки $\hat{x}(t) \in (0,1)$, согласно работе [10]. Обозначим

$$W(t) = \frac{d\hat{x}}{dt}.$$

3.1. Асимптотическое приближение решения вида движущегося фронта

Построение формального асимптотического приближения $V_2(x,\hat{x}(t),W(t),\varepsilon)$ задачи (1) проводится с точностью до второго порядка по малому параметру отдельно слева и справа от точки положения фронта $\hat{x}(t)$. Оно представляется в таком же виде, как и асимптотическое приближение (9) стационарной задачи. Функции регулярной части и пограничных слоев задач (1) и (8) совпадают. Функции переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi,\hat{x}(t),W(t),\varepsilon)$ задачи (1) зависят от растянутой переменной $\xi=\dfrac{x-\hat{x}(t)}{\varepsilon}$. Они так же, как и функции $Q_s^{(\mp)}$, представляются в виде разложения по степеням ε до второго порядка:

$$Q^{(\mp)}(\xi,\hat{x}(t),W(t),\varepsilon):=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i Q_i^{(\mp)}(\xi,\hat{x}(t),W(t)).$$

В каждый момент времени $t\in[0,T]$ левые и правые части асимптотического приближения и их производные по переменной x в точке $\hat{x}(t)$ сшиваются таким же образом, как и для стационарной задачи (см. (11), (12)).

Нахождение функций переходного слоя нулевого порядка сводится к решению задач Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial\xi}=\Phi^{(-)}(\widetilde{v},\hat{x},W),\xi<0\\ \widetilde{v}(\xi,\hat{x},W)=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial\xi}=\Phi^{(+)}(\widetilde{v},\hat{x},W),\xi>0\\ \widetilde{v}(\xi,\hat{x},W)=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\end{cases}\tag{22}$$

где

$$\widetilde{v}(\xi,\hat{x},W):=\begin{cases}Q_0^{(-)}(\xi,\hat{x},W)+\varphi^{(-)}(\hat{x}), & \xi\leqslant 0,\\ Q_0^{(+)}(\xi,\hat{x},W)+\varphi^{(+)}(\hat{x}), & \xi\geqslant 0.\end{cases}\tag{23}$$

Известно [13], что для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)$ справедливы экспоненциальные оценки типа (16).

Функции переходного слоя первого порядка можно выписать в виде

$$Q_1^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)=-\overline{v}_1^{(\mp)}(\hat{x})\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)}{\Phi^{(\mp)}(0,\hat{x},W)}+ \\ +\Phi^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(\xi_1,\hat{x},W)\right)^2}\times \\ \times\int\limits_{\mp\infty}^{\xi_1}\Phi^{(\mp)}(\xi_2,\hat{x},W)\exp\left(W(\xi_2-\xi_1)\right)\times \\ \times Qf_1^{(\mp)}(\xi_2,\hat{x},W)d\xi_2.\tag{24}$$

Здесь введены обозначения

$$\widetilde{f}(\xi,\hat{x},W):=f\left(\widetilde{v}(\xi,\hat{x},W),\hat{x},0\right),$$
$$\Phi^{(\mp)}(\widetilde{v}(\xi,\hat{x},W),\hat{x},W)=:\Phi^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W),$$

а функции $Qf_1^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)$ состоят из тех же слагаемых, что и $Qf_{s1}^{(\mp)}$ (см. (18)), но с заменой производных функций $\widetilde{f}(\xi_s,x_s)$ на производные функций $\widetilde{f}(\xi,\hat{x},W)$, а параметра $\hat{x}_s$ — на $\hat{x}$.

Функции переходного слоя второго порядка определяются аналогично первому. Для функций $Q_{1,2}^{(\mp)}(\xi,\hat{x},W)$ справедливы оценки типа (16).

3.1.1. Определение точки локализации фронта

Условие сшивания производных левой и правой частей асимптотического приближения записывается как

$$\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\left(\frac{d\overline{v}_i^{(-)}}{dx}(\hat{x})-\frac{d\overline{v}_i^{(+)}}{dx}(\hat{x})\right)+ \\ +\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i-1}\left(\frac{\partial Q_i^{(-)}}{\partial\xi}(0,\hat{x},W)-\frac{\partial Q_i^{(+)}}{\partial\xi}(0,\hat{x},W)\right)= \\ =O(\varepsilon^2).\tag{25}$$

Представим функции $\hat{x}(t)$ и $W(t)$ в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\hat{x}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i x_i(t),\quad W(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i W_i(t), \\ W_i(t):=\frac{dx_i}{dt}.\tag{26}$$

Определим функцию $x_0(t)$ как решение задачи Коши из условия **(A3)** с каким-либо начальным условием $x_{00}\in(0,x_{s0})$. Тогда коэффициенты при ε^{-1} в условии сшивания производных (25) с учетом обозначений (23), уравнений (22) и равенств (5) дадут ноль. Выделяя слагаемые при ε^0 придем к равенству:

$$\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0)-\frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0)+ \\ +\left(\frac{\partial\Phi^{(-)}}{\partial\hat{x}}(0,x_0,W_0)-\frac{\partial\Phi^{(+)}}{\partial\hat{x}}(0,x_0,W_0)\right)x_1+ \\ +\left(\frac{\partial\Phi^{(-)}}{\partial W}(0,x_0,W_0)-\frac{\partial\Phi^{(+)}}{\partial W}(0,x_0,W_0)\right)W_1+ \\ +\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,x_0,W_0)-\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,x_0,W_0)=0.$$

Выразим отсюда W_1:

$$W_1=K(x_0)x_1+\Phi(\varphi^{(0)}(x_0),x_0,W_0)\times \\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{W_0s}\Phi^2(\widetilde{v}(s,x_0,W_0),x_0,W_0)ds\right)^{-1}\times \\ \times G_1(x_0,W_0),\tag{27}$$

где

$$K(x_0)=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{W_0s}\Phi^2(\widetilde{v}(s,x_0,W_0),x_0,W_0)ds\right)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-W_0(\xi-s)}\Phi(\widetilde{v}(s,x_0,W_0),x_0,W_0)\widetilde{f}_x(s,x_0,W_0)ds\right),\tag{28}$$

а функция $G_1(x_0, W_0)$ имеет вид (20), где производные функций $Q_{s1}^{(\mp)}(\xi_s, x_{s0})$ при $\xi_s = 0$ заменены на производные функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, x_0, W_0)$ при $\xi = 0$ и параметр x_{s0} заменен на x_0. В частности, поскольку решения задач (15) и (22) совпадают при $\hat{x} = \hat{x}_s$ и $W = 0$, имеет место равенство

$$G_1(x_{s0}, 0) = G_{s1}(x_{s0}). \qquad (29)$$

Замечание. Функция $K(x_0)$ представляет собой взятое с обратным знаком частное двух разностей: $\dfrac{\partial}{\partial \hat{x}}\Phi^{(-)}(0, x_0, W_0) - \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}}\Phi^{(+)}(0, x_0, W_0)$ и $\dfrac{\partial}{\partial W}\Phi^{(-)}(0, x_0, W_0) - \dfrac{\partial}{\partial W}\Phi^{(+)}(0, x_0, W_0)$. Выражение для первой из них можно получить следующим образом: продифференцируем уравнения (3) по x, положим $x = \hat{x}$, добавим, соответственно, условия $\Phi_x^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\hat{x}), \hat{x}, W) = 0$ и, решив получившиеся задачи Коши, подставим в выражение для искомой разности. Тем же способом можно получить выражение для второй разности.

Объединив в (25) слагаемые при ε^1, получим равенства, связывающие $x_2(t)$ и $W_2(t)$. Определим $x_i(t)$, $i = 1, 2$, как решения задач Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} = W_i, \quad x_i(0) = 0. \qquad (30)$$

Теорема 2. При выполнении условий **(A1)**, **(A3)** и достаточно малых ε для любого $T > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ существует единственное решение $v_\varepsilon(x, t)$ задачи (1), для которого функция $V_2(x, \hat{x}, W, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^3\right)$.

Доказательство **Теоремы 2** приведено в работе [10] при помощи метода верхних и нижних решений. В настоящей работе для получения результата о стабилизации решения вида фронта задачи (1) к стационарному решению этой задачи нам понадобится верхнее решение задачи (1), построенное в работе [10].

3.1.2. Верхнее решение нестационарной задачи

Верхнее решение задачи (1) представляет собой модификации асимптотического приближения решения этой задачи. Оно имеет вид

$$\hat{\beta}(x, t, \varepsilon) = \\ = \begin{cases} V_2^{(-)}(x, \overline{x}(t), \overline{W}(t), \varepsilon) + \\ +\varepsilon^2 \left(\mu^{(-)} + Q_\beta^{(-)}(\overline{\xi}, \overline{x}(t), \overline{W}(t)) + P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(-)})\right), \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant \overline{x}(t), \ \ \overline{\xi} \leqslant 0, \ \ \zeta^{(-)} \geqslant 0, \ \ 0 < t \leqslant T, \\ V_2^{(+)}(x, \overline{x}(t), \overline{W}(t), \varepsilon) + \\ +\varepsilon^2 \left(\mu^{(+)} + Q_\beta^{(+)}(\overline{\xi}, \overline{x}(t), \overline{W}(t)) + P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(+)})\right), \\ \qquad \overline{x}(t) \leqslant x \leqslant 1, \ \ \overline{\xi} \geqslant 0, \ \ \zeta^{(+)} \leqslant 0, \ \ 0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

Здесь

$$\overline{x}(t) = \hat{x}(t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \delta(t), \quad \overline{\xi} = \frac{x - \overline{x}(t)}{\varepsilon}, \\ \overline{W} = \frac{d\overline{x}(t)}{dt}, \qquad (31)$$

$\mu^{(\mp)}$ — положительные константы, функции $Q_\beta^{(\mp)}(\overline{\xi}, \overline{x}(t), \overline{W}(t))$ имеют экспоненциальные оценки типа (16) при любом $t \in [0, T]$, а $P_\beta^{(\mp)}(\zeta^{(\mp)})$ — те же функции, что и для верхнего решения (21) стационарной задачи. Функция $\delta(t)$ определяется как решение задачи Коши

$$\frac{d\delta}{dt} = K(x_0)\delta + G_\delta(x_0, W_0), \quad \delta(0) = \delta_0, \qquad (32)$$

где $\delta_0 > 0$, $G_\delta(x_0, W_0) > 0$. Решение задачи (32) строго положительно.

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. При выполнении условий **(A1)–(A3)** и достаточно малом значении ε для решения $v_\varepsilon(x, t)$ задачи (1) с начальной функцией, имеющей вид фронта, сформированного во внутренней точке отрезка $[0, \hat{x}_s]$, выполняется предельное равенство:

$$\lim_{t \to \infty} |v_\varepsilon(x, t) - v_{s,\varepsilon}(x)| = 0, \quad x \in [0, 1],$$

где $v_{s,\varepsilon}(x)$ — решение задачи (8), локально единственное и асимптотически устойчивое в силу **Теоремы 1**.

Доказательство основывается на следующем утверждении, доказанном в [11].

Для любой гладкой начальной функции задачи (1), заключенной между верхним и нижним решениями в начальный момент времени, существует единственное решение $v_\varepsilon(x, t)$ этой задачи, которое в любой момент времени $t > 0$ также заключено между верхним и нижним решениями задачи (1).

Доказательство **Теоремы 3** состоит из следующих этапов.

1. Оценим интервал времени T_0, за который точка, определяющая положение переходного слоя для верхнего решения вида фронта, окажется правее точки $\bar{x}_s$.
2. Докажем, что при $t > T_0$ будет выполнено неравенство

$$\hat{\beta}(x, t, \varepsilon) \leqslant \beta_s(x, \varepsilon). \qquad (33)$$

Далее заметим, что нижним решением задачи (1) является решение $v_{s,\varepsilon}(x)$ стационарной задачи (8). Как известно [11], верхнее и нижнее решения задачи (1) обладают свойством упорядоченности, означающим, что для любых $t > 0$ справедливо неравенство $v_{s,\varepsilon}(x) < \hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$. Из свойства упорядоченности, а также неравенства (33), следует, что при $t > T_0$ решение $v_\varepsilon(x, t)$ параболической задачи будет находиться внутри локальной области притяжения устойчивого стационарного решения (см. формулировку **Теоремы 1**). В силу асимптотической устойчивости отсюда будет следовать выполнение предельного равенства **Теоремы 3.**

4.1. Этап 1

Оценим интервал времени T_0, достаточный для того, чтобы при $t \geqslant T_0$ было выполнено неравенство $\overline{x}(t) > \overline{x}_s$. Введем функцию

$$\Delta(t) = \overline{x}_s - \overline{x}(t) = \Delta_0(t) + \varepsilon\Delta_1(t) + \\ + \varepsilon^2\Delta_2(t) + \varepsilon^2(\delta(t) - \delta_s), \quad (34)$$

где $\Delta_i(t) = x_{s\,i} - x_i(t)$ при $i = 0, 1, 2$. Из условия **(A3)** следует, что функция $\Delta_0(t)$ определяется как решение задачи:

$$-\frac{d\Delta_0}{dt} = W_0(x_0) = W_0(x_{s0} - \Delta_0), \quad \Delta_0(0) = x_{s0} - x_{00}. \quad (35)$$

Из условия **(A2)** следует, что $W_0(x_{s0}) = 0$ и $\dfrac{dW_0}{dx_0}(x_{s0}) < 0$, следовательно, $\Delta_0 = 0$ — асимптотически устойчивая точка покоя уравнения (35), потому существует такая величина T_0, что при $t > T_0$ будет выполнена оценка $\Delta_0(t) = O(\varepsilon^2)$. Оценим интервал времени T_0. Представим правую часть уравнения (35) по формуле Тейлора как

$$W_0(x_{s0} - \Delta_0) = 0 - \frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0})\Delta_0 + \frac{1}{2}\frac{d^2W_0}{dx_0^2}(x^*(t))\Delta_0^2,$$

где $x^*(t) = x_{s0} - \theta\Delta_0(t)$, $0 < \theta < 1$. Учитывая это представление, приведем задачу (35) к эквивалентному интегральному уравнению:

$$\Delta_0 = x_{00} \times \\ \times \exp\left(\frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0})t - \int\limits_0^t \frac{1}{2}\frac{d^2W_0}{dx_0^2}(x^*(t'))\Delta_0(t')dt'\right).$$

Положим

$$T_0 = 2\left|\frac{dW_0}{dx_0}(x_{s0})\right|^{-1} |\ln\varepsilon|.$$

Тогда при $t > T_0$ будет выполняться оценка $\Delta_0(t) \sim \varepsilon^2$.

4.2. Сравнение функций переходного слоя

Из уравнения (15) с учетом представления (14), а также из уравнений (22) с учетом представления (23) следует, что функции $Q_0^{(\mp)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W})$ и $Q_{s0}^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s)$ являются решениями задач Коши:

$$\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \overline{\xi}} = \Phi^{(\mp)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W}), \\ Q_0^{(\mp)}(0, \overline{x}, \overline{W}) = \varphi^{(0)}(\overline{x}) - \varphi^{(\mp)}(\overline{x}), \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q_{s0}^{(\mp)}}{\partial \overline{\xi}_s} = \Phi^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s, 0), \\ Q_0^{(\mp)}(0, \overline{x}_s) = \varphi^{(0)}(\overline{x}_s) - \varphi^{(\mp)}(\overline{x}_s). \quad (37)$$

Задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» решаются на отрицательной полуоси, а с верхним индексом «$(+)$» — на положительной полуоси.

Будем рассматривать $t > T_0$. Воспользовавшись теоремой о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра, запишем равенства, связывающие решения задач (36) и (37):

$$Q_0^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}, \overline{W}) = Q_{s0}^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) - \\ - \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \overline{x}}(\overline{\xi}_s, \widetilde{x}, \widetilde{W})\Delta(t) + \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial W}(\overline{\xi}_s, \widetilde{x}, \widetilde{W})\overline{W}(t),$$

где $\widetilde{x} = \overline{x}_s - \theta_1\Delta(t)$, $\widetilde{W} = \theta_2\overline{W}(t)$, $0 < \theta_{1,2} < 1$. Аналогичные соотношения справедливы и для производных $\partial Q_0^{(\mp)}/\partial\xi$. Заметим, что функции $\dfrac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \hat{x}}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W})$ и $\dfrac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial W}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W})$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида (16).

Из равенств (31) и (26) следует, что для $\overline{W}$ справедливо представление

$$\overline{W} = W_0(x_0(t)) + \varepsilon W_1(x_0(t)) + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Из выражения (7), условия **(A2)**, а также равенств (19), (27) и (29) следует, что

$$W_i(x_{s0}) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (38)$$

С учетом этих рассуждений соотношение, связывающее функции переходного слоя для стационарной и нестационарной задач при больших значениях $t > T_0$, можно записать как

$$Q_0^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}, \overline{W}) = Q_{s0}^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) + \chi_0(\overline{\xi}_s, t). \quad (39)$$

Функция $\chi_0(\overline{\xi_s}, t)$ имеет структуру

$$\chi_0(\overline{\xi}_s, t) = \left(C\Delta(t) + O(\varepsilon^2)\right)\exp\left(-\kappa_0|\overline{\xi}_s|\right), \quad (40)$$

где C, κ_0 — положительные константы.

Равенства, выражающие аналогичную связь между функциями $Q_1^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}, \overline{W})$ и $Q_{s1}^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s)$, можно получить, используя явные выражения (17) и (24) для этих функций и разложение (34). Это равенство имеет вид:

$$Q_1^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}, \overline{W}) = Q_{s1}^{(\mp)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) + \chi_1(\overline{\xi}_s, t), \quad (41)$$

где $\chi_1(\overline{\xi}_s, t)$ имеет вид, аналогичный (40).

4.3. Оценка $\Delta(t)$ при $t > T_0$

Из уравнения (30) при $i = 1$ с учетом равенства $x_1 = x_{s1} - \Delta_1$ получим уравнение для функции $\Delta_1(t)$ в виде $\dfrac{d\Delta_1}{dt} = -W_1$. Подставив в это уравнение выражение (27) для W_1 и принимая во внимание равенства (38) (при $i = 0$) и (29), а также равенство (39), перепишем его так:

$$\frac{d\Delta_1}{dt} = K(x_{s0})\Delta_1 - \\ - \frac{J_x(x_{s0}) \cdot x_{s1} + \Phi(\varphi^{(0)}(x_{s0}), x_{s0}, 0)G_{s1}(x_{s0})}{\int_{\varphi^{(-)}(x_{s0})}^{\varphi^{(+)}(x_{s0})} \Phi(v, x_{s0}, 0)dv} + O(\varepsilon).$$

Функция $K(x_0)$, входящая в правую часть, определена выражением (28). Учитывая равенство (19), а также неравенство $K(x_{s0}) < 0$, верное в силу условия **(A2)**, отсюда можно получить оценку $\Delta_1(t) = O(\varepsilon)$ при $t > T_0$.

С учетом оценок для $\Delta_0(t)$ и $\Delta_1(t)$ при $t > T_0$ для функции $\Delta(t)$, определенной выражением (34), получим оценку $\Delta(t) = O(\varepsilon^2)$.

Величину δ_s можно выбрать настолько большой, что будет выполнено неравенство $\Delta(t) < 0$ при $t > T_0$. Заметим, что ограниченность величины $\delta(t)$ обеспечивается неравенством $K(x_{s0}) < 0$.

4.4. Этап 2

Докажем теперь, что при $t > T_0$ справедливо неравенство (33).

Заметим, что разность верхних решений задач (1) и (8) записывается в каждый момент времени по-разному на каждом из промежутков: $0 \leqslant x < \overline{x}_s$, $\overline{x}_s \leqslant x < \overline{x}(t)$, $\overline{x}(t) \leqslant x \leqslant 1$.

1. На промежутке $\overline{x}(t) \leqslant x \leqslant 1$ для этой разности имеем:

$$\beta_s^{(+)}(x,\varepsilon) - \hat{\beta}^{(+)}(x,t,\varepsilon) = \\ = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon^i \left(Q_{si}^{(+)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) - Q_i^{(+)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W}) \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(Q_{s\beta}^{(+)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) - Q_\beta^{(+)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W}) \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\mu_s^{(+)} - \mu^{(+)} \right).$$

Учтем далее, что

$$Q_0^{(+)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W}) = Q_{s0}^{(+)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) + \chi_0(\overline{\xi}_s, t) + \\ + \Phi^{(+)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s, 0)\frac{\Delta(t)}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$Q_1^{(+)}(\overline{\xi}, \overline{x}, \overline{W}) = Q_{s1}^{(+)}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s) + \chi_1(\overline{\xi}_s, t) + \\ + \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \overline{\xi}}(\overline{\xi}_s, \overline{x}_s)\frac{\Delta(t)}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Функция $\Phi^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s, 0)$ строго положительна (см. (4)) и имеет оценку $|\Phi^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s, 0)| \geqslant \geqslant C e^{-\bar{\kappa}_0 \bar{\xi}_s}$, где C, $\bar{\kappa}_0 > 0$ (см. [18]), а функции $\dfrac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \bar{\xi}}$, $Q_\beta^{(+)}$, $Q_{s\beta}^{(+)}$, $Q_2^{(+)}$, $Q_{s2}^{(+)}$ имеют оценки типа (16). Поскольку в рассматриваемые моменты времени $\Delta = O(\varepsilon^2)$, то $|\chi_i(\bar{\xi}_s, t)| \leqslant C\varepsilon^2 e^{-\kappa_i \bar{\xi}_s}$, $i = 0, 1$, $C > 0$ (при $t > T_0$). Примем еще во внимание неравенство $\Delta(t) < 0$. Тогда для разности верхних решений получим оценку:

$$\beta_s^{(+)}(x,\varepsilon) - \hat{\beta}^{(+)}(x,t,\varepsilon) > \\ > \varepsilon C_0 e^{-\bar{\kappa}_0 \bar{\xi}_s} - \varepsilon^2 C_1 e^{-\bar{\kappa}_1 \bar{\xi}_s} + \\ + \varepsilon^2 \left(\mu_s^{(+)} - \mu^{(+)} \right) + O\left(\varepsilon^3\right), \quad (42)$$

где C_i и $\bar{\kappa}_i$ $(i = 0, 1)$ — положительные величины. Выберем теперь положительную константу μ_s таким образом, чтобы $\mu_s^{(+)} > 2\mu^{(+)}$.

При выбранных значениях параметров, входящих в верхние решения, можно точно так же, как это сделано в работе [15], доказать, что правая часть (42) принимает положительные значения при достаточно малых ε.

2. Рассмотрим выражение для разности верхних решений на отрезке $\bar{x}_s \leqslant x < \bar{x}(t)$:

$$\beta_s^{(+)}(x,\varepsilon) - \hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon) = \varphi^{(+)}(x) + Q_{s0}^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) - \\ - \varphi^{(-)}(x) - Q_0^{(-)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \overline{W}) + \\ + \varepsilon \left(\bar{v}_1^{(+)}(x) + Q_{s1}^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) - \bar{v}_1^{(-)}(x) - Q_1^{(-)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \overline{W}) \right) + \\ + O\left(\varepsilon^2\right). \quad (43)$$

Рассмотрим отдельно разность функций нулевого приближения:

$$\varphi^{(+)}(x) + Q_{s0}^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) - \varphi^{(-)}(x) - Q_0^{(-)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \overline{W}) = \\ = \varphi^{(+)}(x_{s0}) + Q_{s0}^{(+)}(0, x_{s0}) - \varphi^{(-)}(x_{s0}) - Q_{s0}^{(-)}(0, x_{s0}) - \\ - \Phi(\varphi^{(0)}(x_{s0}), x_{s0}, 0)\frac{\Delta(t)}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right) = \\ = -\Phi(\varphi^{(0)}(x_{s0}), x_{s0}, 0)\frac{\Delta(t)}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Здесь мы использовали обозначение (6), представление (39), где учли оценку $\Delta(t) = O\left(\varepsilon^2\right)$, справедливую при $t > T_0$, а также непрерывность функции $\widetilde{v}_s$ (см. (14)).

С учетом представления (41), а также справедливых на рассматриваемом отрезке оценок $|\bar{\xi}| = O(\varepsilon)$, $|\bar{\xi}_s| = O(\varepsilon)$, преобразуем разность функций первого приближения в (43) как

$$\bar{v}_1^{(+)}(x) + Q_{s1}^{(+)}(\bar{\xi}_s, \bar{x}_s) - \bar{v}_1^{(-)}(x) - \\ - Q_1^{(-)}(\bar{\xi}, \bar{x}, \overline{W}) = O(\varepsilon).$$

Подставив в (43) полученные выражения, окончательно получим

$$\beta_s^{(+)}(x,\varepsilon) - \hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon) = \\ = -\Phi(\varphi^{(0)}(x_{s0}), x_{s0}, 0)\frac{\Delta(t)}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

При указанном выборе $\Delta(t)$ правая часть этого выражения положительна.

3. На интервале $0 \leqslant x < \overline{x}_s$ выполнение неравенства $\beta_s^{(-)}(x,\varepsilon) - \hat{\beta}^{(-)}(x,t,\varepsilon) > 0$, доказывается аналогично пункту 1.

Таким образом, $\hat{\beta}(x,t,\varepsilon) < \beta_s(x,\varepsilon)$ при $t > T_0$. Оба этапа доказательства **Теоремы 3** завершены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен процесс стабилизации решения начально-краевой задачи вида фронта для уравнения реакция—диффузия к стационарному решению этой задачи. Исследования, проведенные в работе, уточняют полученный ранее результат работы [8], в которой использовался метод параметрических барьеров, построенных как модификации асимптотического приближения решения стационарной задачи.

В настоящей работе в роли таких барьеров выступают верхнее решение вида фронта исходной начально-краевой задачи и непосредственно решение стационарной задачи. Известные из работы [10] методы асимптотического анализа позволяют получить приближенное выражение для скорости движения фронта, поэтому такой подход позволяет уточнить время, за которое решение вида движущегося фронта окажется в локальной области притяжения асимптотически устойчивого стационарного решения. Этот результат является практически важным для применения численных методов стационирования при решении эллиптических задач. В частности, его можно использовать в ходе реализации алгоритмов решения обратных задач [19–21].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 18-11-00042П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* // Математическая теория горения и взрыва. М., 1980. (*Zeldovich Y., Barenblatt G., Librovich V., Makhviladze G.* The Mathematical Theory of Combustion and Explosions; Plenum: New York, NY, USA, 1985.)
2. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* // Автоволновые процессы. М., 1987.
3. *Murray J. D.* // Mathematical biology. 2002.
4. *Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В.* // Биофизика. 2015. **60**, № 3. С. 574. (*Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Yakovenko L. V.* // Biophysics, 2015. 60, N 3. P. 466.)
5. *Калиткин Н. Н., Карякин П. В.* // Численные методы. Кн. 2. М., 2013.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990. (*Vasilieva A., Butuzov V., Kalachev L.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems; SIAM: Philadelphia, PA, USA, 1995.)
7. *Васильева А. Б.* Матем. моделирование. 1991. **3**, № 4. С. 114.
8. *Бутузов В. Ф., Неделько И. В.* // Матем. сб. 2001. **192**, № 5. С. 13. (*Butuzov V. F. Nedelko I. V.* // Sb. Math. 2001. **192**, N 5. P. 651.)
9. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Шнайдер К. Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 1. С. 9. (*Butuzov V. F., Nefedov N. N., Schneider K. R.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **60**. N 1. P. 8.)
10. *Божевольнов Ю. В., Нефёдов Н. Н.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 2. С. 276. (*Bozhevol'nov Y. V., Nefedov N. N.* // Comput. Math. and Math. Phys. 2010. 50. P. 264.)
11. *Pao C. V.* // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.
12. *Volpert A. I., Volpert V. A.* // American Mathematical Soc. 1994. **140**.
13. *Fife Paul C., McLeod J. B.* // Arch. ration. mech. anal. 1977. **65**, N 4. P. 335.
14. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* // Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. 1973.
15. *Левашова Н. Т., Петровская Е. С.* // Ученые записки физ. ф-та Моск. ун-та. 2014. № 3. 143101.
16. *Нефедов Н. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. **31**, № 4. С. 719. (*Nefedov N. N.* // Differ. Equ. 1995. **31**, N 4. P. 668.)
17. *Давыдова М. А., Захарова С. А.* // Дифференциальные уравнения. 2020. **56**, № 7. С. 849. (*Davydova M. A., Zakharova S. A.* // Differ. Equ. 2020. **56**, N 7. P. 819.)
18. *Давыдова М. А., Захарова С. А., Левашова Н. Т.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. **57**, № 9. С. 1548. (*Davydova M. A., Zakharova S. A., Levashova N. T.* // Comput. Math. and Math. Phys. 2017. **57**, N 9. P. 1528.)
19. *Lukyanenko D. V., Borzunov A. A., Shishlenin M. A.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. **99**. P. 105824.
20. *Lukyanenko D. V., Prigorniy I. V., Shishlenin M. A.* // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2020. **28**, N 5. P. 641.
21. *Levashova N., Gorbachev A., Argun R., Lukyanenko D.* // Symmetry. 2021. **13**, N 5. P. 680.

Stabilization of a Traveling Front Solution in a Reaction–Diffusion Equation

K. A. Kotsubinsky[a], **N. T. Levashova**[b], **A. A. Melnikova**

Department of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*kkotsubinsky@gmail.com,* [b]*natasha@wanaku.net*

This paper investigates issues related to the stabilization of a front-type solution of a parabolic problem for a one-dimensional reaction–diffusion equation to the solution of the corresponding stationary problem with an interior transition layer. The stabilization result obtained earlier by V.F. Butuzov and I.V. Nedel'ko using the method of parametric barriers is extended in our study by taking the front velocity into account, which allows us to evaluate the time it takes for the solution of the parabolic problem to be in a small neighborhood of the stationary solution. This result is practically important for the application of numerical stabilization methods to solve elliptical problems.

Keywords: reaction–diffusion equation, singularly perturbed system of second-order differential equations, small parameter, solution stabilization, asymptotic method.
PACS: 02.30.Jr.

Received 28 July 2021.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2021. **76**, No. 6. Pp. 413.

Сведения об авторах

1. Коцюбинский Константин Алексеевич — студент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: kkotsubinsky@gmail.com.
2. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: natasha@wanaku.net.
3. Мельникова Алина Александровна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: aa-melnikova@yandex.ru.