

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О генерации четных гармоник в плоских и эллиптических ондуляторах лазеров на свободных электронахК. Жуковский,^{1,а} И. Федоров¹¹ *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

Поступила в редакцию 12.12.2021, после доработки 03.02.2022, принята к публикации 04.02.2021.

Теоретически исследуется генерация гармоник спонтанного и вынужденного ондуляторного излучения (ОИ) в ондуляторах, используемых в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ). Исследование проводится аналитически и численно. Детально исследуется генерация второй гармоники спонтанного и вынужденного излучения эллиптического и плоского и ондуляторов с учётом характеристик установок. Анализируется влияние на генерацию гармоник ОИ таких параметров как сечение пучка электронов, эмиттанс, отклонение пучка от оси, разброса энергий и др. факторов по отдельности и в совокупности. Проводится теоретическое исследование и сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов и с имеющимися данными генерации гармоник, включая вторую гармонику на ЛСЭ LEUTL.

Ключевые слова: ондулятор, генерация гармоник, магнитное поле, лазер на свободных электронах.
УДК: 535.3. **PACS:** 41.60 m, 41.60. Ap, 41.60. Cr.

ВВЕДЕНИЕ

О возможности излучения электронов в пространственно–периодическом магнитном поле впервые сказал Гинзбург [1] в середине 20 в. Эта гипотеза была реализована Мотцем [2], который первым построил ондулятор и получил спонтанное ондуляторное излучение (ОИ). Мотц впоследствии показал, что электроны, сгруппированные в сгустки (банчи), размером меньше длины волны излучения, могут излучать когерентно; сама идея когерентного ОИ была выдвинута Гинзбургом [3]. Мадэй развил теорию взаимодействия электронов с электромагнитной волной [4] и продемонстрировал на практике генерацию когерентного излучения в миллиметровом диапазоне вследствие группировки электронов в ондуляторе. В 21 в. ЛСЭ продвинулись в ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны [5–13]. Группировка электронов в ЛСЭ происходит под действием силы Лоренца, которая ускоряет электроны, отстающие от узлов электромагнитной волны в ондуляторе, и замедляет электроны, которые опережают узлы волны; таким образом, электроны группируются на длине волны излучения. Группировка, хотя и более слабая, происходит и на длинах волн гармоник излучения ЛСЭ [14]. Резонансные длины волн гармоник ОИ под углом θ к оси ондулятора с периодом λ_u и параметром дипольности k таковы:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left(1 + \frac{k_{eff}^2}{2} + (\gamma\theta)^2 \right), \quad (1)$$

$$k_{eff}^2 = k^2 \varpi, \quad \varpi = 1 + (d/h)^2.$$

где $k = H_0 \lambda_u e / 2\pi m c^2 \approx 0.9337 H_0 [\text{T}] \lambda_u [\text{см}]$ — параметр дипольности, H_0 — амплитуда основного поля на оси ондулятора, γ — релятивистский

фактор электронов, $\varpi > 1$ учитывает возможное присутствие гармоники магнитного поля с номером h и амплитудой dH_0 . Для заданной длины волны (1) снижение энергии электронов и уменьшение γ может быть скомпенсировано до определенной степени более коротким периодом ондулятора λ_u , и меньшим значением k . Однако значительно уменьшить период ондуляторов менее < 1 см технически представляется невозможным. Использование гармоник позволяет при относительно низкой энергии электронов получить значительно более короткую длину волны (1). При этом излучение гармоник более чувствительно к дифракции, эмиттансу пучков, разбросу энергии электронов и др.; чем выше номер гармоники n , тем больше потери. Для вынужденного излучения электрон–фотонное взаимодействие на длинах волн гармоник еще сильнее подвержено влиянию разного рода потерь. Ниже мы исследуем генерацию гармоник в ондуляторах — плоском LEUTL и эллиптическом KAERI — и влияние основных параметров установок на излучение гармоник. Мы сравним наши результаты с теоретическими оценками в других работах и с известными данными излучения ондуляторов KAERI и LEUTL. Мы также проанализируем возможность использования гармоник в ЛСЭ с этими ондуляторами.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОИ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЕССЕЛЯ

Простейшей аппроксимацией магнитного поля по длине ондулятора вдоль оси z является чисто синусоидальная зависимость $H = H_0 \sin(k_\lambda z)$, $k_\lambda = 2\pi/\lambda_u$. В реальности поле ондулятора более сложное, в нём могут присутствовать гармоники, пучок электронов имеет конечный размер, и простейшая гармоническая форма поля не удовлетворяет уравнениям Максвелла во всем зазоре ондулятора (см. [15, 16] и др.). Вблизи оси ондулятора магнитное поле близко к идеальному и может быть представлено единственной

^а E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

гармоникой. В ультрафиолетовых и рентгеновских ЛСЭ используют узкие пучки электронов с энергией $E \sim 10^2 - 10^4$ МэВ малого сечения: в UV-диапазоне: $\sigma_{x,y} \sim 0.2 - 0.5$ мм, в рентгеновском: $\sigma_{x,y} \sim 10 - 50$ мкм. В ЛСЭ обычно используется фокусировка пучка магнитными квадрупольными линзами, которые задают фокусные расстояния $\beta_{x,y}$. В пучке электронов конечного сечения $\sigma_{x,y}$ и эмиттанса $\varepsilon_{x,y}$ происходят бетатронные колебания. В результате резонанс n -й гармоники ОИ на частоте $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$ (1) расщепляется на бетатронные гармоники p , отстоящие друг от друга на частоте, которая записывается следующим образом [17]: $\omega_\beta \cong \frac{\omega_n k \delta}{\sqrt{2n\gamma}}$, где параметр $\delta = \sqrt{1+d^2}$ учитывает возможную гармонику поля ондулятора с амплитудой d . В релятивистских пучках $\gamma \gg 1$, $\omega_\beta \propto \omega_n/\gamma$, так что $\omega_\beta \ll \omega_n$ и линия излучения расщепляется на бетатронные гармоники, расположенные очень близко друг к другу. В то же время, так как длина волны излучения λ_n мала, то уширение расщепленной линии излучения может быть заметно.

Напомним, что в плоском ондуляторе с идеально узким пучком электронов на оси излучаются только нечетные гармоники. Четные гармоники возникают под углом к оси, например в случае неидеальной центровки пучка, а также в реальном пучке конечного размера. Бетатронные колебания в пучке конечного размера также вызывают четные гармоники ОИ на оси (см. [15–19] и др.). Возможное присутствие дипольных магнитных компонент вызывает расстройку когерентности осцилляций электрона по длине ондулятора и индуцирует угол изгиба, уводя пучок с оси. Это также вызывает четные гармоники на оси [20, 21], ослабляет нечетные гармоники, а также уширяет и изменяет форму линии спектра, которая в этом случае описывается обобщением функции Эйри (см., например, [22] и работу К.В.Жуковского в этом журнале (2020), № 4) вместо обычной функции $\text{sinc}(\nu_n/2) = \sin(\nu_n/2)/(\nu_n/2)$, где $\nu_n = 2\pi nN((\omega/\omega_n) - 1)$ — параметр расстройки относительно резонансов ОИ $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$. Вблизи оси плоский ондулятор излучает в основном нечетные гармоники, спиральный ондулятор — основной тон. Присутствие гармоник поля ондулятора может усилить или ослабить излучение гармоник ОИ в зависимости от фазы гармоник поля. Численное моделирование спектрально-угловых характеристик ОИ проведем с помощью программы СPECTRA [23]. Аналитический расчет основан на вычислении коэффициентов Бесселя $f_{n;x,y}$; интенсивность x - и y -поляризации n -й гармоники ОИ записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 N^2 k^2 \gamma^2}{c \left(1 + \left(k_{eff}^2/2\right) + (\gamma\Theta)^2\right)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left(\frac{\sin(\nu_n/2)}{\nu_n/2}\right)^2 (f_{n;x}^2 + f_{n;y}^2). \quad (2)$$

Влияние разброса энергий в реальном пучке электронов описывается свёрткой $\int_{-\infty}^{+\infty} d^2 I(\nu_n + 4\pi nN\varepsilon) e^{-\varepsilon^2/2\sigma_\varepsilon^2} d\varepsilon / d\omega d\Omega \sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon$,

где N — число периодов ондулятора, а угловые и бетатронные эффекты учитываются в коэффициентах Бесселя $f_{n;x,y}$ в интегралах от элементарных функций. Соответствие аналитического расчёта излучения гармоник численному моделированию СPECTRA было показано для различных ондуляторов в [24]; там же была подтверждена справедливость аналитических результатов и коэффициентов Бесселя для ондуляторов с гармониками поля. Наиболее общее выражение для коэффициентов Бесселя ондулятора с четырьмя гармониками поля в двух ортогональных плоскостях дано в [24], выражения для эллиптического и для плоского ондуляторов с гармониками поля приведены, например, в [25–32]. Для плоского ондулятора в приближении узких пучков релятивистских электронов, коэффициенты Бесселя учитывают угловые и бетатронные эффекты следующим образом [33–36]:

$$f_{n;x} = \sum_p \tilde{J}_p \left| (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{2}{k} \gamma \theta \cos \phi J_n^n \right|, \\ f_{n;y} = \sum_p \left(\tilde{J}_p \left| \frac{2}{k} \gamma \theta \sin \phi J_n^n \right| + J_n^n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u} (\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1}) \right), \quad (3)$$

где y_0 — среднее сечение пучка, p — номер бетатронной гармоники, φ — полярный угол вокруг оси, θ — азимутальный угол отклонения от оси, J_n^n и \tilde{J}_p — обобщённые функции Бесселя:

$$J_n^m \equiv J_n^m(\zeta, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \exp[i(n\alpha + m\zeta \sin \alpha + m\xi \sin(2\alpha))], \quad (4) \\ \tilde{J}_p \equiv J_p^1(-\kappa, -\eta),$$

$$\zeta = \theta \cos \phi \frac{\lambda_u k}{n\lambda_n \gamma}, \quad \xi = \frac{\lambda_u k^2}{8n\lambda_n \gamma^2}, \\ \kappa = \frac{4\pi\theta y_0 \gamma^2}{\lambda_u (1 + (k^2/2))}, \quad \eta = \frac{\pi^2 \gamma y_0^2 k}{\sqrt{2}\lambda_u^2 (1 + (k^2/2))}. \quad (5)$$

Коэффициенты Бесселя (3) нечётных гармоник ОИ описываются членом $\sim (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n)$ в $f_{n;x}$, чётных — членом $\sim J_n^n$ в обеих поляризациях; y -поляризация содержит только чётные гармоники; угловой вклад учитывается как явно в (3), так и неявно в аргументах ζ и κ (5) функций (4); вклад бетатронных колебаний в пучке конечного эмиттанса даёт вклад в последнем слагаемом $\sim y_0$ в (3).

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МОЩНОСТИ ОДНОПРОХОДНОГО ЛСЭ

В ЛСЭ электромагнитная волна ОИ взаимодействует с электронами банча в ондуляторе. За время прохода электроном одного периода ондулятора со

скоростью, близкой к скорости света, излучение проходит со скоростью света период ондулятора и ещё одну длину волны излучения. Небольшая разница в скоростях приводит к тому, что электроны отстают от фотонов на половину периода волны на каждой половине периода ондулятора. Возникающая сила Лоренца направлена так, что электроны позади узлов электромагнитной волны ускоряются, а электроны впереди узлов замедляются при взаимодействии с излучением. В результате электроны группируются около узлов волны в банчи размером менее длины волны излучения, и излучение становится близким к когерентному (см. [4–13]). В начале ондулятора происходит квадратичный рост напряженности поля и мощности излучения; процессы модуляции энергии электронов приводят к модуляции электронной плотности банча и это вызывает экспоненциальный рост мощности по длине $P(z) \propto P_0 e^{z/L_{g0}}$, где L_{g0} — длина усиления ЛСЭ, на которой мощность $P(z)$ возрастает в e раз. Длина усиления $L_{g0} = 1/\sqrt{3}g_0$ связана с коэффициентом усиления g_0 и безразмерным параметром Пирса $\rho = (\lambda_u g_0)/4\pi$ [5–8], который играет фундаментальную роль в ЛСЭ. Параметр Пирса n -й гармоники ЛСЭ определяется параметрами ондулятора в множителе κ_n и плотностью тока J (см., например, [5–11, 37]):

$$\rho_n = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{J}{4\pi i} \right)^{1/3} \kappa_n, \kappa_n = (\lambda_u k_{eff} |f_n|)^{2/3}, \quad (6)$$

где $J = I_0/\Sigma$ — плотность тока, I_0 — ток, $\Sigma = 2\pi\sqrt{\beta_x \varepsilon_x \beta_y \varepsilon_y}$ — сечение пучка, $\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \theta_{x,y}$ — эмиттансы, $\beta_{x,y} = \varepsilon_{x,y}/\theta_{x,y}^2$ — параметры Твисса, $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}}$ — поперечные сечения, $\theta_{x,y}$ — расходимости пучка, f_n — коэффициент Бесселя n -й гармоники, λ_u — период ондулятора, $i = 4\pi\varepsilon_0 mc^3/e \cong 1.7045 \times 10^4$ — размерная постоянная тока Альфвена [А]. Параметр Пирса ρ_n определяет основные параметры излучения ЛСЭ: максимальную теоретическую мощность гармоники $P_{F,n} \approx \sqrt{2}\rho_n P_{beam}$, где $P_{beam} = EI_0$ — мощность электронного пучка, длину усиления $L_{n,g} \cong \lambda_u / (4\pi\sqrt{3}n^{1/3}\rho_n)$, длину насыщения $L_s \sim \lambda_u/\rho_1$, приближенное выражение для которой $L_s \cong 1.07L_{1,g} \ln(9\eta_1 P_{1,F}/P_{1,0})$ дано в [38, 39], где $P_{1,0}$ — начальная мощность. Дифракция, разброс энергий электронов и эмиттанс пучка, увеличивают длину усиления и насыщения ЛСЭ и уменьшают максимальную мощность гармоник в режиме их независимого роста в однопроходном ЛСЭ. Дифракция уменьшает параметр Пирса и дает поправку, которая может быть записана следующим образом (см. [38], [39]):

$$\rho_n \rightarrow \rho_n/\kappa, \quad \kappa = \sqrt[3]{1 + \frac{\lambda_u \lambda_n}{16\pi\rho_n \Sigma}}. \quad (7)$$

Разброс энергий и эмиттанс феноменологически учитываются коэффициентами Φ и η следующим образом [38, 39]:

$$L_{n,g} \rightarrow L_{n,g} \kappa \Phi_n, \quad (8)$$

$$P_{n,F} \cong \sqrt{2}\rho_n P_{beam} \left(\eta_1 \frac{1}{\kappa^2} \right). \quad (9)$$

Феноменологические коэффициенты Φ и η в (8), (11) были откалиброваны нами в ходе сравнительного анализа аналитических результатов, численных моделей и известных данных ЛСЭ в диапазоне от видимого до рентгеновского [28–35]:

$$\begin{aligned} \Phi_n &\cong \left(\zeta \sqrt{n} + 0.165 \mu_{\varepsilon,n}^2 \right) e^{0.034 \mu_{\varepsilon,n}^2}, \quad \mu_{\varepsilon,n} \cong \frac{2\sigma_{\varepsilon}}{n^{1/3}\rho_n}, \\ \eta_n &\cong 0.942 \left(e^{-\Phi_n(\Phi_n-0.9)} + \frac{1.57(\Phi_n-0.9)}{\Phi_n^3} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где σ_{ε} — разброс энергий электронов, коэффициент ζ имеет сложное выражение [39]; для согласованного пучка в зависимости от эмиттанса $\zeta \approx 1 - 1.3$ и влияние ζ мало, а для рентгеновского ЛСЭ оно пренебрежимо: $\zeta \cong 1 - 1.03$. В ЛСЭ, кроме независимого роста гармоник $\propto e^{z/L_{n,g}}$, n -я гармоника нелинейно индуцируется основным тоном; при этом её мощность растёт быстрее: как n -я степень основного тона, $\propto e^{nz/L_g}$ [7–11, 37, 39–41, 54]. Насыщение индуцированной основным тоном ЛСЭ n -й гармоники наступает прежде её длины насыщения в режиме независимой генерации из-за более раннего насыщения основного тона. Из различных теоретических подходов к описанию мощности гармоник однопроходных ЛСЭ с данными реальных установок хорошо согласуется следующая формула для мощности гармоники n [38, 39]:

$$P_{n,F} = \eta_n \frac{P_{1,F}}{\sqrt{n}} \left(\frac{f_n}{nf_1} \right)^2. \quad (11)$$

В начале ЛСЭ присутствует сильная некогерентная составляющая излучения шума электронного банча; в ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения SASE она задаёт начальную мощность $P_{n,noise} \approx 1.6\rho_n^2 e 4\pi c P_{beam}/(I_0 \lambda_n)$ [42], которая сначала квадратично растёт по длине ондуляторов. Модуляция энергии электронов в ЛСЭ приводит к модуляции плотности электронного банча, и степенной рост мощности сменяется экспоненциальным, который продолжается до насыщения ЛСЭ, где рост плавно переходит в осцилляции около мощности насыщения. Насыщение гармоник в процессе их нелинейной генерации начинается чуть раньше насыщения основного тона и происходит постепенно. Феноменологическое описание этих процессов дано в [33, 34] и работе Жуковского в этом журнале (2019. № 5).

Наиболее известное феноменологическое описание влияния всех потерь в ЛСЭ предложено Мингом Кси (Ming Xie) [43, 44] в виде коррекции Λ к длине усиления: $L_g = L_{g0}(1 + \Lambda)$. Слагаемое Λ описывает поправки за счёт дифракции, разброса энергий и эмиттанса и представляет полином нецелой степени из семи слагаемых и девятнадцати численных коэффициентов и степеней (не приводим для краткости). Предложенные выше формулы (7), (8), (10) хорошо согласуются с высокоточной аппроксимацией в [43, 44]. Для оценки мощности гармоник в режиме нелинейной генерации предложены различные теоретические подходы. Так, Huang

с соавторами предложили в [45] выражение для мощности третьей гармоники P_3 , индуцированной основным тоном мощностью P_1 :

$$P_{Huang3} = \Theta \rho P_{beam} \left(\frac{P_1}{\rho P_{beam}} \right)^3, \quad (12)$$

где численный множитель Θ определяется сложным тройным интегралом и дает значение порядка 10^{-1} . Для четных гармоник, например, $n=2$, в [45] предложена формула, учитывающая сечение пучка $\sigma_{x,y}$, мощность P_n и банчинг b_2 второй и b_n соседней нечетной гармоник $n = 1, 3$ около насыщения:

$$P_{Huang2} = P_n \left(\frac{\lambda_u k f_2}{\gamma 2\pi \sigma_{x,y} f_n} \frac{b_2}{b_n} \right)^2, \quad n = 1, 3. \quad (13)$$

Оценка (13) мощности четных гармоник таким образом зависит от мощности соседних нечетных референтных гармоник и от того, какую из них, например $n = 1$ или $n = 3$, выбрать в качестве референтной для второй гармоники. В принципе, мощности гармоник должны быть согласованы, но теоретические оценки мощности, например, третьей гармоники, полученные с помощью формул в [45], отличаются от экспериментальных значений в десятки раз в зависимости от ЛСЭ; оценки мощности второй гармоники также отличаются от измеренных на один-два порядка величины. В рамках этого подхода, оценка мощности второй гармоники может меняться на порядок, в зависимости от того используется ли в (13) значения мощности первой или третьей гармоники. В следующих разделах мы покажем это для ЛСЭ LEUTL.

Независимо от этих исследований Geloni и соавторы предложили другой формализм [46] для расчета мощности четных гармоник. Опуская детали в [46], приведем формулу мощности второй гармоники P_2 через мощность первой P_1 , преобразованную нами к следующему виду:

$$P_2 \approx \frac{P_1}{(24\pi)^2} \frac{2+k^2}{k^2} \frac{A^2+B^2}{C^2} \frac{1}{\Gamma}, \quad (14)$$

в котором фигурирует число Френеля [46] электронного пучка сечения $\sigma_{x,y}$ на длине ондулятора L_u , т.е. учитывается соотношение между размером

объекта Σ , длиной волны λ_1 и расстоянием L_u :

$$\Gamma = \Sigma / L_u \lambda_1, \quad (15)$$

что характеризует разность фаз вторичных волн, приходящих с краев и с центра пучка в осевую точку на длине ондулятора. Коэффициенты A, B, C в формуле (14) содержат обычные функции Бесселя J_n [46]:

$$A = \frac{2k^2}{2+k^2} \left(J_0 \left(\frac{k^2}{2+k^2} \right) - J_2 \left(\frac{k^2}{2+k^2} \right) \right) + J_1 \left(\frac{k^2}{2+k^2} \right), \\ B = J_1 \left(\frac{k^2}{2+k^2} \right), \quad C = J_0 \left(\frac{k^2}{4+2k^2} \right) - J_1 \left(\frac{k^2}{4+2k^2} \right), \quad (16)$$

и не имеют прямого отношения к коэффициентам Бесселя (3) $f_{n;x,y}$. Последние, в отличие от (16), фактически дают нормированные амплитуды гармоник ОИ. В следующих разделах мы представим сравнительные анализ мощности гармоник ЛСЭ, рассчитанных по формуле (11), по формулам (12), (13) (Huang) и по формуле (14) (Geloni) с экспериментальными данными ЛСЭ LEUTL.

Точный расчет излучения ЛСЭ обычно выполняется с помощью численного моделирования программами, которые решают весь комплекс уравнений движения и взаимодействия электронов с излучением. Разброс результатов численных моделей для гармоник излучения в начале ЛСЭ может составлять до двух порядков мощности (см. например, результаты в [47–52] и др.); разброс результатов для мощности в режиме экспоненциального роста обычно не превышает нескольких раз, а мощность насыщения вычисляется ещё точнее. Результаты аналитического расчёта мощности с предложенным нами формализмом подтверждаются численными симуляциями [54–56] и данными известных ЛСЭ, как показано в [29, 32, 33, 35, 57] и др.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОНДУЛЯТОРА КАЕРИ

В работе [58] рассмотрено излучение эллиптических ондуляторов КАЕРИ с тестовым пучком слабо-релятивистских электронов с энергией $E = 6.5$ МэВ. В [58] отмечена третья гармоники поля на оси ондуляторов с содержанием $\sim 8\%$:

$$\mathbf{H} = H_0 (\sin(k_\lambda z) - d \sin(hk_\lambda z), \cos(k_\lambda z) + d \cos(hk_\lambda z), 0), \quad h \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

где номер гармоники $h = 3$, период $\lambda_u = 2.3$ см, ондуляторный параметр $k = 2.216$, амплитуда третьей гармоники: $d = 0.0825$. Излучение фотонов с энергией ≈ 0.003 эВ наблюдалось в миллиметровом диапазоне на длине волны основного тона $\lambda = 0.42$ мм. Основные данные пучка и ондуляторов представлены в табл. 1.

Представляет интерес излучение пятой гармоники эллиптического ондулятора с полем (17): на оси она была обнаружена [58] с содержанием $\approx 2\%$; её излучение является следствием наличия третьей

гармоники поля в (17); наш расчет подтвердил это в [24]. Под углом к оси, появляются вторая и третья гармоники. Так под углом $1/\gamma\sqrt{N} \approx 1^\circ$ содержание второй гармоники ОИ $\sim 10\%$ и третьей $\sim 1\%$ (см. зеленую линию на рис. 1); под углом 0.5° содержание второй гармоники $\sim 2\%$ (см. синюю линию на рис. 1). Численный расчет в SPECTRA согласуется с имеющимися в [58] данными для углов 2° и 4° . В отличие от результатов в [58], мы получили меньше шума и более чистые спектральные линии на рис. 1.

Таблица 1. Параметры электронного пучка и эллиптического ондулятора КАЕРИ с полем (17) [58]

Пучок электронов				Ондулятор	
Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
γ	12.72	σ	4×10^{-3}	λ_u , см	2.3
E , МэВ	6.5	β_x , м	0.4366	L , см	69
ε_x , м×рад	1.5×10^{-6}	β_y , м	0.2875	N	30
ε_y , м×рад	0.35×10^{-6}	α_x	2.223	k	2.21622
I_{peak} , А	15.95	α_y	1.053	k_{Effx}	2.21706
				k_{Effy}	2.21706

Коэффициенты Бесселя для ОИ в поле (17) приведены, например, в [59] (см. также [28, 31]); результаты аналитического расчета согласуются с результатами численного моделирования и не приводятся.

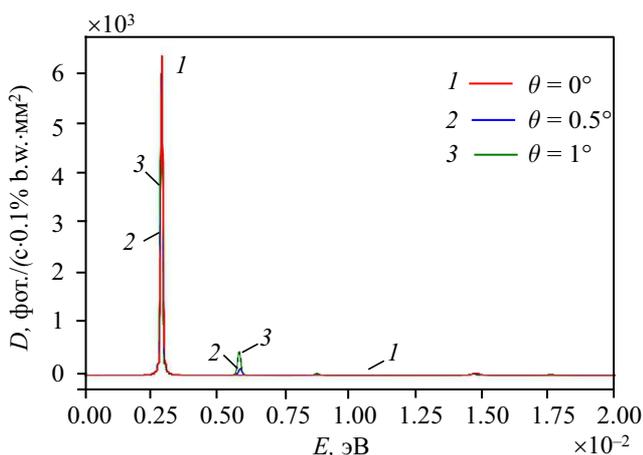


Рис. 1. Спектр спонтанного излучения ондулятора КАЕРИ с полем (17) при $d = 0.0825$ с пучком электронов энергии $E = 6.5$ МэВ [58] (см. табл. 1); излучение на оси — красная линия, под углом 0.5° — синяя линия, под углом 1° — зеленая линия; численное моделирование в программе SPECTRA

С увеличением доли третьей гармоники эллиптического поля (17) до максимально достижимого в специально устроенных ондуляторах значения $d \approx 0.3$, получаем в излучении такого ондулятора содержание пятой гармоники ОИ $\approx 20\%$; при этом другие гармоники в спектре ОИ практически отсутствуют, (см. рис. 2). Численное моделирование с программой SPECTRA согласуется с результатами аналитического расчета (ср. рис. 2,б и рис. 2,а).

Отметим, что в моделирование проводилось с пучком установки LEUTL и в сравнении со спектром ОИ плоского ондулятора LEUTL, в КАЕРИ излучение четных гармоник сильно подавлено. В следующем разделе показано, что четные гармоники спонтанного ОИ ондулятора LEUTL значительно сильнее при том же пучке электронов; разница в интенсивности гармоник $n=6,8$ составляет десятки раз. Это говорит о том, что спонтанное ОИ четных гармоник определяется как ондулятором, так и пучком электронов.

Несмотря на значительное присутствие пятой гармоники спонтанного излучения, её генерация в однопроходном ЛСЭ малоэффективна. Оценку этого можно проделать с помощью параметра Пирса (6)

и входящей в него величины $\kappa_n = (\lambda_u k_{eff} |f_n|)^{2/3}$, характеризующей вклад параметров ондулятора. Положим для определенности большое значение амплитуды гармоники поля, $d = 0.3$, в (17). Тогда для основного тона и для пятой гармоники, $n = 1, 5$, имеем соответственно $\kappa_{n=1,5}^{KAERI} = \{0.173, 0.037\}$. Параметр Пирса пятой гармоники ЛСЭ ρ_5 почти в пять раз меньше, чем параметр Пирса основного тона ρ_1 . Эта оптимистичная оценка не учитывает потери и большую чувствительность к ним электрон-фотонного взаимодействия на длине волны высших гармоник. Мы смоделировали эволюцию мощности гармоник в однопроходном ЛСЭ с ондулятором с эллиптическим полем (17), используя феноменологические формулы в [33, 34]; результат показан на рис. 3; при этом в расчёте полагаем ондулятор типа КАЕРИ со значения $d = 0.0825$ и $d = 0.3$ в (17); значение $d = 0.3$ усиливает пятую гармонику ОИ (см. рис. 2) и немного увеличивает эффективный параметр дипольности от $k_{eff} = 2.217$ (см. табл. 1) до $k_{eff} = 2.227$. Электронный пучок полагаем как в ЛСЭ LEUTL [47, 48] для удобства сравнения с последним.

За счет более короткого периода ондулятора КАЕРИ длина волны основного тона ЛСЭ с таким ондулятором $\lambda = 380$ нм, она короче, чем длина волны $\lambda = 530$ нм ЛСЭ с плоским ондулятором LEUTL с тем же пучком электронов. Мощность такого ЛСЭ с эллиптическим ондулятором КАЕРИ примерно та же, что в ЛСЭ LEUTL: ≈ 1 ГВт, а насыщение достигается раньше, на длине $L_s = 8$ м. Пятая гармоника ЛСЭ индуцируется основным тоном в нелинейном режиме; её содержание оказывается очень малым: $\sim 0.003\%$. Таким образом, использование эллиптического ондулятора (17) даже с сильной третьей гармоникой поля для генерации пятой гармоники излучения в ЛСЭ не представляет практического интереса, а в спонтанном ОИ, напротив, пятая гармоника сильная (см. рис. 2).

Отметим, что при всей разнице ондуляторов, эллиптического КАЕРИ и плоского LEUTL, в ЛСЭ с пучком электронов, например, LEUTL, содержание второй гармоники излучения ЛСЭ составляет $\sim 0.2\%$ и мало зависит от того, какой используется ондулятор: LEUTL или КАЕРИ. Напротив, для спонтанного излучения с одинаковым пучком электронов, содержание четных гармоник ОИ с ондулятором LEUTL в десятки раз больше, чем ОИ с ондулятором КАЕРИ. Гармоника поля ондулятора КАЕРИ не оказывает никакого влияния на вторую гармонику

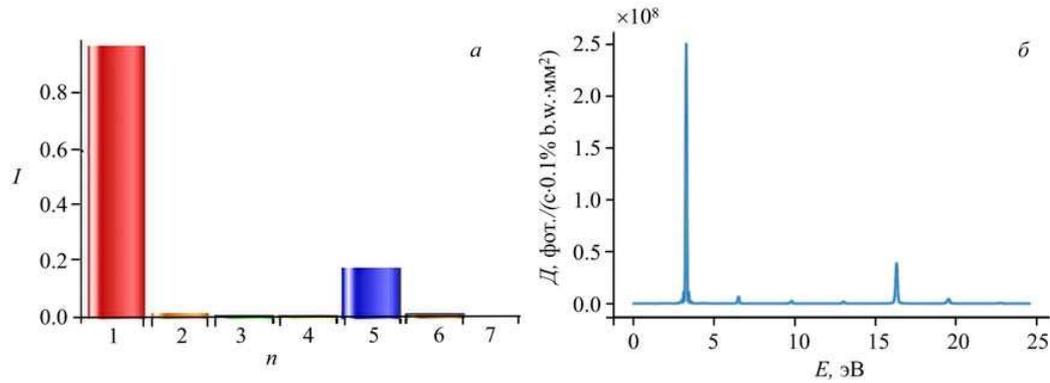


Рис. 2. Спектр ОИ в эллиптическом поле (17) с $d = 0.3$ с пучком аналогичным ЛСЭ LEUTL: энергия $E = 217$ МэВ, разброс энергий $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, ток $I_0 = 505$ А, эмиттанс $\gamma_e = 8.5\pi$ мкм, $\beta_{x,y} = 1.5$ м; *a* — аналитический результат, *б* — численное моделирование SPECTRA

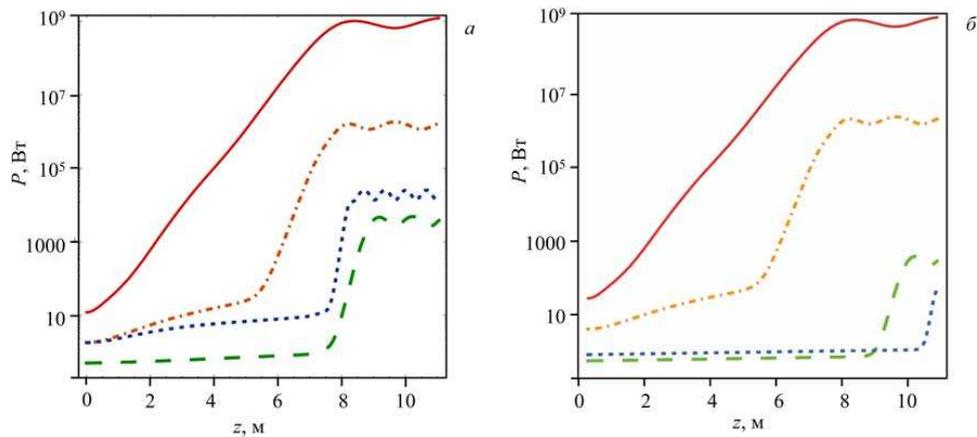


Рис. 3. Эволюция мощности гармоник в однопроходном ЛСЭ с ондулятором типа КАЕРИ с эллиптическим полем (17) с пучком аналогичным ЛСЭ LEUTL: энергия $E = 217$ МэВ, разброс энергий $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, ток $I_0 = 505$ А, эмиттанс $\gamma_{ex} = 8.5\pi$ мкм, $\beta_{x,y} = 1.5$ м; содержание третьей гармоники поля dH_0 : *a* — $d = 0.3$, *б* — $d = 0.0825$

ЛСЭ. Причиной является то, что в ЛСЭ излучение четных гармоник определяется эффективным углом электрон-фотонного взаимодействия в ЛСЭ на длине усиления. Длина усиления практически не зависит от гармоник поля и угол $\gamma\theta \approx 0.2$ примерно одинаков в ЛСЭ с ондуляторами LEUTL и КАЕРИ с одинаковым пучком, он и вызывает сильную вторую гармонику (см. рис. 3).

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ОНДУЛЯТОРА LEUTL

В ЛСЭ LEUTL генерировалось излучение на длинах волн $\lambda = 530$ нм и $\lambda = 385$ нм [47, 48]. Для определённости рассмотрим эксперимент с $\lambda_1 = 530$ нм от 30 марта 2001 г. В нем были измерены мощности первой, второй и третьей гармоник ЛСЭ [47]. Основные параметры ондуляторов и пучков представлены в табл. 2; другие эксперименты LEUTL описаны в [47, 48]. Излучение гармоник ОИ и ЛСЭ LEUTL аналитически рассчитано и представлено на рис. 4 с учётом реальных характеристик пучка: эмиттанса, разброса энергий и др., и установки.

Отметим заметное присутствие четных гармоник ОИ, особенно высших; оно существенно больше с плоским ондулятором LEUTL, чем с эллиптическим ондулятором типа КАЕРИ с полем (17) (ср. рис. 4,а,б с рис. 2) с тем же пучком. Это показывает, что четные гармоники

ОИ определяются как параметрами пучка, так и ондулятора. Для гармоник $n=1,2,3,4,5$ учёт только эмиттанса даёт следующие значения коэффициентов Бесселя: $f_{emittance} = \{0.752, 0.113, 0.325, 0.121, 0.202\}$. Вклад бетатронных колебаний в коэффициенты Бесселя нечетных гармоник пренебрежимо мал; для четных гармоник он составляет ~ 0.02 , что существенно меньше значений четных коэффициентов: $f_{2,4} \sim 0.1$. Интенсивность гармоник спонтанного излучения LEUTL без учета бетатронных колебаний показана на рис. 4,а, с учетом всех эффектов — на рис. 4,б. Сравнивая рис. 4,а с рис. 4,б, видим, что учёт бетатронных колебаний не меняет интенсивность нечетных гармоник и увеличивает интенсивность четных гармоник на $\sim 1/4$. Подобный вклад бетатронных колебаний получен также для ОИ ондулятора КАЕРИ. Таким образом, (ср. ис. 4,а с рис. 4,б) четные гармоники спонтанного ОИ происходят в основном из-за угловых, а не бетатронных эффектов.

Однако расчет мощности второй гармоники ЛСЭ с учетом эмиттанса и бетатронных колебаний даёт значение меньше экспериментального на порядок. Правильный результат мощности гармоник ЛСЭ получается, если учесть, что электроны взаимодействуют с фотонами в пучке конечного сечения. Учёт

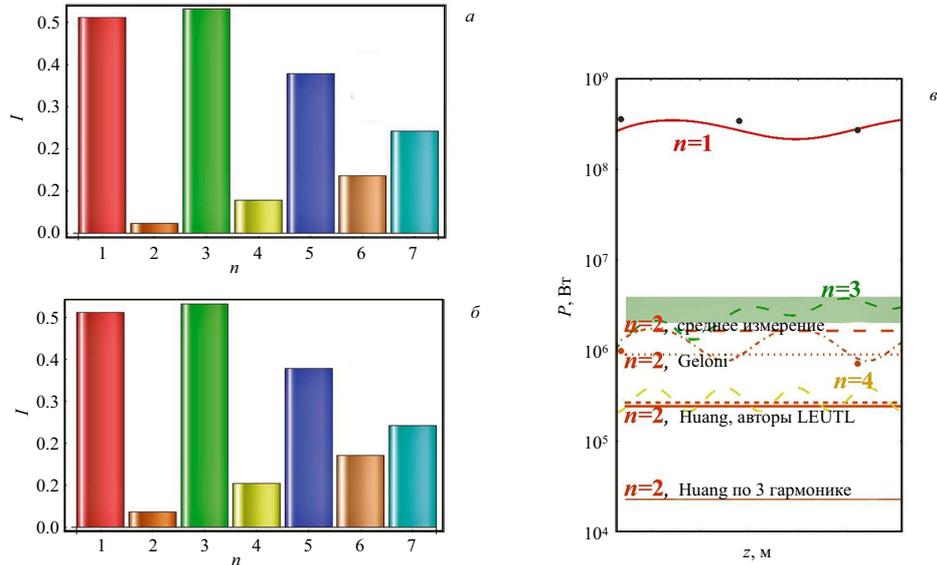


Рис. 4. Излучение гармоник плоского ондулятора LEUTL; $E = 217$ МэВ, разброс энергий $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$ э, ток $I_0 = 505$ А, эмиттанс $\gamma\varepsilon_x = 8.5\pi$ мкм, $\beta_{x,y} = 1.5$ м; *a* — спектр ОИ с учётом конечного эмиттанта, но без учета бетатронных колебаний, *б* — спектр ОИ с учетом всех эффектов, *в* — мощности излучения гармоник в однопроходном ЛСЭ. Гармоники показаны цветными линиями и обозначены номерами

Таблица 2. Параметры электронного пучка и плоского ондулятора LEUTL от 30 марта 2001г [47]

Пучок электронов				Ондулятор	
Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
γ	425	σ	1×10^{-3}	λ_u , см	3.3
E , МэВ	217	β_x , м	1.5	L , см	248
$\gamma\varepsilon_x$, м×рад	$8\pi \times 10^{-6}$	β_y , м	1.5	N	75
$\gamma\varepsilon_y$, м×рад	$9\pi \times 10^{-6}$	α_x	0	k	3.1
I_{peak} , А	505	α_y	0	k_{Effx}	3.1

угла $\gamma\theta \approx 0.16$ электрон–фотонного взаимодействия на длине усиления, даёт значения коэффициентов Бесселя: $f_{e\gamma,emit} = \{0.742, 0.189, 0.290, 0.200, 0.140\}$, и мощность гармоник ЛСЭ, как показано на рис. 4,в. При этом излучение четных гармоник в основном вызвано угловыми эффектами, а не бетатронными колебаниями.

Бетатронные колебания могут влиять на ширину линии излучения, расщепляя её на бетатронные гармоники. Мы провели теоретическую оценку этого эффекта. Основной вклад в расщепление линии дают три бетатронные гармоники с номерами $p = -1, 0, 1$, разделённые $\delta\lambda \cong k\lambda/n\sqrt{2}\gamma|_{n=1} \cong 2.7$ нм; вклад гармоники с $p = 0$ составляет почти 90%, полная ширина расщепления $\Delta \approx 5$ нм и спектральная плотность $\Delta/\lambda \approx 1\%$. При этом спектральная плотность ОИ на полувысоте линии спектра: $0.9/N|_{N=75} = 0.012$, а естественная ширина линии ОИ у её основания: $2/N|_{N=75} = 0.027$. Таким образом, расщепление, связанное с бетатронными колебаниями, меньше естественной ширины линии спектра.

Описание экспериментов с однопроходным ЛСЭ LEUTL дано в [47, 48]; теоретические оценки для гармоник сделаны независимо в [45]. Мы рассчитали теоретически мощности гармоник с учётом осцилляций в режиме насыщения, показанные цвет-

ными извилистыми линиями на рис. 4,в. Мощность третьей гармоники полностью соответствует измеренной: $\sim 0.5 - 1\%$ [47] (зелёная линия в зеленом диапазоне измеренных значений на рис. 4,в). Рассчитанная нами мощность второй гармоники (извилистая оранжевая линия $n = 2$) соответствует средней мощности во всех экспериментах $P_2 = P_2/240$ (оранжевая длинная штриховая линия $n = 2$) [47, 48] и результатам от 30 марта 2001г, показанным оранжевыми точками (см. [47]). Пучок электронов ЛСЭ LEUTL [47, 48] имеет сечение $\sigma_{x,y} \approx 0.3$ мм и большой эмиттанс $\gamma\varepsilon \approx 8.5\pi$ мкм; сечение фотонного пучка: $\sigma_{photon} \approx \sqrt{\sigma_{x,y}\sqrt{\lambda_1 L_g/4\pi}} \approx 0.23$ мм. С учётом вклада всех бетатронных гармоник p , для второй гармоники излучения $n = 2$ получаем вклад бетатронных колебаний в коэффициенты Бесселя $f_{n,p,y}^\beta \approx 0.02$, что даёт мощность второй гармоники почти на два порядка ниже измеренной. Оценим угловые вклады: в пучке LEUTL на длине усиления ЛСЭ $L_{gain} \approx 0.66$ м, эффективный угол электрон–фотонного взаимодействия: $\theta \approx \sigma_\gamma/L_{gain} \approx 0.38$ мрад даёт соответствующие ему коэффициенты Бесселя $f_2 = 0.189$ второй гармоники ЛСЭ; они больше, чем вклад угла расходимости $\theta \sim 0.2$ мрад, который даёт $f_2 = 0.113$. С учётом этого получаем расчётную мощность второй гар-

моники ЛСЭ в соответствии с измерениями, как видно на рис. 4,в. Также возможно довольно сильное излучение четвертой гармоники ЛСЭ с мощностью до ~ 0.5 МВт (см. рис. 4,в).

Теоретические оценки мощности второй гармоники ЛСЭ LEUTL проводились также независимыми авторами. В [47] авторами эксперимента было получено теоретическое значение мощности второй гармоники $P_2 \approx P_1/1500$ (оранжевая короткая штриховая линия), которое оказалось значительно меньше измеренного в эксперименте, что было отмечено в самой работе [47]. Huang и соавторы провели в [45] теоретические оценки, которые давали содержание третьей гармоники LEUTL (см. (12)) $\approx 5\%$, т.е. на порядок выше экспериментального значения, а оценка мощности основного тона была ниже измеренной [47]. Мощность второй гармоники, рассчитанная на основе этих неверных оценок, оказалась реалистичной: $\sim 0.8\%$. Однако, поскольку оценки мощности третьей и первой гармоник в [45] на порядок отличались от экспериментальных значений [47], то и оценка для $n = 2$ в [45] неверная. Мы пересчитали по формуле (13) (см. [45]) мощность второй гармоники на основе реальных мощностей первой P_1 и третьей P_3 гармоник. Полученные результаты показаны на рис. 4,в тонкой сплошной оранжевой линией для P_2 на основе P_3 , и жирной сплошной оранжевой линией для мощности P_2 на основе P_1 . Видно, что мощность P_2 на основе P_3 (тонкая штриховая оранжевая линия) почти на два порядка ниже измеренной, а P_2 на основе P_1 (жирная штриховая оранжевая линия) почти на порядок ниже измерений. Таким образом, по теории [45] оценки мощности второй гармоники ЛСЭ занижены на один-два порядка, а оценки мощности третьей гармоники завышены на порядок.

Другие авторы [46] предложили сложный теоретический расчет мощности излучения чётных гармоник в ЛСЭ. Мы выделили квинтэссенцию [46] в виде формул (15)–(14) и применили их к ЛСЭ LEUTL, рассчитав мощность второй гармоники по теории [46, 53]. Результат обозначен оранжевой пунктирной линией на рис. 4,в, и он хорошо соответствует эксперименту от 30 марта 2001 г (оранжевые точки на рис. 4,в) и в два раза ниже заявленной экспериментаторами средней измеренной мощности (оранжевая штриховая линия). Таким образом, теоретический подход в [46, 53] даёт правильные результаты. Однако расчёт в [46] использует специфические параметры, такие как глубина модуляции электронного пучка и др., которых нет в широко доступных работах. В [46, 53] вычисляются электрические поля в различных направлениях и другие характеристики излучения; авторы исследования заключают, что «полная мощность второй гармоники не зависит от углов отклонения пучка от оси, и даже может уменьшиться при наличии этих углов отклонения». Этот вывод представляется, по крайней мере, спорным, так как характеристики ОИ зависят от свойств физической системы зарядов и поля, и нами показано, что именно угловые вклады вызывают четные гармоники ОИ на оси. В то же время, мощность четных гармоник в ЛСЭ определяется

не только размером пучка и расходимостью, как считается в [45], но и интенсивностью излучения вблизи оси ондулятора, центровкой пучка электронов и шириной пучков фотонов. В нашей теории (см. разд. 3) принимаются во внимание углы электрон-фотонного взаимодействия на характерной длине усиления в ЛСЭ, которые обычно больше расходимости. Углы электрон-фотонного взаимодействия дают вторую гармонику значительно большей мощности, чем от эмиттанта и бетатронных колебаний в пучке конечного размера. Результаты соответствуют всем экспериментам LEUTL и другим ЛСЭ. Таким образом, мы в определённом смысле подтверждаем вывод Huang и соавторов в [61] о том, что «угол отклонения увеличивает излучение второй гармоники в ЛСЭ», с замечанием, что нужно учитывать эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления ЛСЭ.

В заключение отметим, что соответствие рассчитанной нами мощности гармоник экспериментальным значениям подтверждено также для LCLS [60] и других ЛСЭ, как показано, например, в [57].

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Проведён теоретический анализ спонтанного ондуляторного излучения (ОИ) и вынужденного излучения однопроходного ЛСЭ с плоским ондулятором LEUTL и эллиптическим ондулятором КАЕРИ с третьей гармоникой поля. Для спонтанного излучения проведено сравнение полученных аналитических результатов с численным моделированием с программой SPECTRA; для вынужденного излучения проведено сравнение с данными излучения гармоник ЛСЭ LEUTL. Смоделировано также излучение эллиптического ондулятора с сильной третьей гармоникой поля, с целью установить возможность и эффективность генерации в нём пятой гармоники ОИ. Установлено, что

1. Аналитический расчёт спектрально-угловых характеристик спонтанного ОИ согласуется с результатами численного моделирования SPECTRA. Это подтверждается также данными излучения эллиптического ондулятора КАЕРИ с гармоникой поля и говорит о верности аналитического подхода. Показано, что генерация четных гармоник излучения возникает вследствие угловых вкладов в пучке конечного сечения и расходимости, а бетатронные колебания лишь незначительно увеличивают мощность четных гармоник.
2. Эллиптический ондулятор с третьей гармоникой поля генерирует пятую гармонику ОИ; её вклад в интенсивность спонтанного излучения может достигать $\sim 20\%$ при амплитуде третьей гармоники поля $\sim 30\%$. Однако, в ЛСЭ с таким ондулятором, генерация пятой гармоники неэффективна; она происходит в нелинейном режиме и её содержание очень мало: $\sim 0.003\%$. Таким образом, эллиптический ондулятор даже с сильной гармоникой поля не представляет практического интереса для генерации гармоник ЛСЭ. Смоделированное содержание второй гармоники в ЛСЭ с эллиптическим ондулятором КАЕРИ: $\sim 0.17\%$, сравнимо с её содержанием в ЛСЭ LEUTL с плоским

ондулятором и тем же пучком. Смоделированная длина насыщения ЛСЭ с ондулятором KAERI в полтора раза меньше, чем в ЛСЭ с тем же пучком и плоским ондулятором LEUTL.

3. В плоском ондуляторе LEUTL происходит эффективная генерация гармоник. Показано, что основной вклад в коэффициенты Бесселя f_n четных гармоник и в мощности их излучения с пучком релятивистских электронов приходит от угловых эффектов: $f_{2,4}^{angular} \sim 0.1$, а вклад бетатронных колебаний мал: $f_{n,p}^{\beta} \sim 10^{-2}$; коэффициенты Бесселя нечетных гармоник $n = 1, 3, 5$ таковы: $f_{n=1,3,5} \sim 0.7, 0.3, 0.15$. Вклад бетатронных колебаний в излучение нечетных гармоник пренебрежимо мал, их вклад в мощность спонтанного излучения четных гармоник составляет до $\sim 1/4$ их мощности.
4. Содержание гармоник в излучении однопроходного ЛСЭ LEUTL, рассчитанное нами с привлечением обобщенных функций Бесселя, хорошо согласуется с известными экспериментальными данными: содержание третьей гармоники $\sim 0.5 - 1\%$, второй $\sim 0.6\%$. Это подтверждает правильность теоретического подхода и расчёта; возможное теоретическое содержание четвертой гармоники $\approx 0.1\%$. В отличие от спонтанного ОИ, высшие гармоники ЛСЭ подавлены, так как электрон-фотонное взаимодействие на их длинах волн слабое. Вклад бетатронных колебаний в мощность четных гармоник ЛСЭ крайне незначителен, а для нечетных он пренебрежимо мал.
5. Независимые оценки мощности гармоник ЛСЭ в [45], и оценки, сделанные нами, следуя теории в [45], меньше измеренных значений на один-два порядка. В то же время мы подтверждаем вывод авторов [45] и [61]: «сечение пучка и углы отклонения вызывают генерацию четных гармоник на оси», с той разницей, что кроме угла отклонения пучка нужно учитывать и угол электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления. Мы также сделали оценки мощности четных гармоник ЛСЭ, следуя другой теории в [46, 53]; результаты согласуются с данными экспериментов ЛСЭ. Однако мы не подтверждаем вывод авторов [46, 53] о том что «полная мощность второй гармоники не зависит от углов отклонения пучка от оси, и может даже уменьшиться при наличии углов отклонения». Он представляется необоснованным, так как свойства системы зарядов и поля определяют излучение, и нами достоверно показано и подтверждено сравнением с экспериментами ЛСЭ, что напротив, именно угловые вклады электрон-фотонного взаимодействия вызывают четные гармоники излучения ЛСЭ.

Автор благодарит проф. А.В. Борисова, гл. н.с. А.Е. Лобанова и проф. В.Г. Багрова за полезные обсуждения математических и физических аспектов излучения зарядов в магнитных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В.Л. // Изв. АН СССР (Физика). 1947. **11** С. 1651 (Ginzburg V.L. // Izvestia Akademii Nauk SSSR (Fizika). **11**, N 2 (1947) P. 1651).
2. Motz H., Thon W., Whitehurst R. N. J. // Appl. Phys. 1953. **24**. P. 826.
3. Motz H. // J. Appl. Phys. 1951. **22**. P. 527.
4. Madey J. M. // J. Appl. Phys. 1971. **42**. P. 1906.
5. McNeil B. W. J., Thompson N. R. // Nature Photonics. 2010. **4**. P. 814.
6. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. // Rev. Mod. Phys. 2016. **88**. P. 015006.
7. Kim K.-J., Huang Z., Lindberg R. Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers; Principles of Coherent X-Ray Radiation, Cambridge University Press, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom, DOI: 10.1017/9781316677377
8. Huang Z., Kim K. J. // Phys. Rev. ST-AB. 2007. **10**. P. 034801.
9. Saldin E.L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V. The Physics of Free Electron Lasers, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000, X, 470 p. ISBN 978-3-540-66266-2.
10. Schmüser P., Dohlus M., Rossbach J., Behrens C. Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime, Springer Tracts in Modern Physics. **258**, Cham (ZG), Springer International Publishing, 2014, XV, 231p., ISBN 978-3-319-04080-6.
11. Pellegrini C. // Phys. Scr. 2016. **2016**. P. 014004.
12. Багров В.Г., Бисноватый-Коган Г.С., Бордовицын В.А., Борисов А.В., Дорофеев О.Ф., Эпп В.Я., Пивоваров Ю.Л., Шорохов О.В., Жуковский В.Ч. Теория излучения релятивистских частиц. М.: Физматлит, 2002. (Bagrov V.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Bordovitsyn V.A., Borisov A.V., Dorofeev O.F., Epp Ya. V., Pivovarov Y.L., Shorokhov O.V., Zhukovsky V. C. Synchrotron Radiation Theory and Its Development. ed V. A. Bordovitsyn. Singapore: Word Scientific, 1999. P. 447).
13. Margaritondo G., Ribic P. R. // J. Synchrotron Rad. 2011. **18**. P. 101.
14. Colson W. B. // Phys. Rev. A. 1981. **24**, N 1. P. 639.
15. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Черенков П. А. // УФН, 1989. **157**, № 3. С. 389 (Alferov D. F., Bashmakov Yu A., Cherenkov P. A. // Soviet Physics Uspekhi. 1989. **32**, N 3. P. 200).
16. Винокуров Н.А., Левичев Е.Б. // УФН. 2015. **185**. P. 917 (Vinokurov, N. A., Levichev, E. B. // Physics-Uspekhi. 2015. **58**, N 9. P. 850).
17. Prakash B., Huse V., Gehlot M., Mishra G. // Optik. 2016. **127**. P. 1639.
18. Алферов Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г. // ЖТФ. 1973. **10**. С. 2126 (Sov. Phys.-Tech. Phys. 1974. **18**. P. 1336).
19. Bagrov V. G., Zal'mezh V. F., Nikitin M. M., Epp V. Y. // Nucl. Instr. Meth. A. 1987. **261**. P. 54.
20. Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K. // J. Appl. Phys. 2008. **104**. P. 124507.
21. Даттоли Д., Жуковский К.В., Михайлин В.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 5 С. 33 (Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.V. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2009. **64**, N 5. P. 507).
22. Zhukovsky K. // Opt. Laser Technology. 2020. **131**. P. 106311.
23. Tanaka T., Kitamura H. // J. Synchrotron Rad. 2001. **8**. P. 1221.
24. Zhukovsky K., Fedorov I. // SYMMETRY. 2021. **13**, N 1. P. 135.
25. Alexeev V.I., Bessonov E.G. // Nucl. Instr. Meth. A. 1991. **308**. P. 140.
26. Bessonov E.G. // Nucl. Instr. Meth. A. 1989. **282**. P. 405.
27. Жуковский К.В. // Изв. Вузов. Физика. 2019. **62**, № 6. С. 109 (Zhukovsky K. V. // Russ. Phys. J. 2019. **62**,

- N 6. P. 1043).
28. Zhukovsky K. // Results in Physics. 2019. **13**. P. 102248.
 29. Жуковский К.В. // УФН. 2021. **191**, № 3. С. 318 (Zhukovsky K. V. // Physics–Uspekhi 2021. **64**, N 3. P. 304).
 30. Zhukovsky K. // J. Synchrotron Rad. 2020. **27**. P. 1648.
 31. Zhukovsky K.V. // J. Synchrotron Rad. 2019. **26**. P. 1481.
 32. Zhukovsky K. // Eur. Phys. J. Plus. 2021. **136**. P. 714.
 33. Zhukovsky K. // Ann. Phys. 2021. **533**, N 11. P. 2100091.
 34. Zhukovsky K. // Rad. Phys. Chem. 2021. **189**. P. 109698.
 35. Zhukovsky K. // Results in Physics. 2020. **19**. P. 103361.
 36. Zhukovsky K. // SYMMETRY. 2020. **12**. P. 1258.
 37. Bonifacio R., Pellegrini C., Narducci L. // Opt. Comm. 1984. **50**. P. 373.
 38. Dattoli G., Ottaviani P. L., Pagnutti S. // J. Appl. Phys. 2005. **97**. P. 113102.
 39. Dattoli G., Giannessi L., Ottaviani P. L., Ronsivalle C. // J. Appl. Phys. 2004. **95**. P. 3206.
 40. Bonifacio R., De Salvo L., Pierini P. // Nucl. Instrum. A. 1990. **293**. P. 627.
 41. Huang Z., Kim K.-J. // Phys. Rev. E. 2000. **62**. P. 7295.
 42. Giannessi L. Seeding and Harmonic Generation in Free-Electron Lasers in *Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers*. E.J. Jaeschke et al. (eds.). Springer International Publishing Switzerland, 2016. DOI 10.1007/978-3-319-14394-1_3.
 43. Xie M. // Nucl. Instrum. Meth. A. 2000. **445**. P. 59.
 44. Xie M. in Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference (IEEE, Piscataway, NJ, 1995), p. 183.
 45. Huang Z., Kim K.-J. // Nucl. Instrum. Meth. A. 2001. **475**. P. 112.
 46. Geloni G., Saldin E., Schneidmiller E., Yurkov M. // Opt. Comm. 2007. **271**. P. 207.
 47. S.G. Biedron et al. // Nucl. Instrum. Meth. A. 2002. **483**. P. 94.
 48. Milton S.V. et.al. // Science. 2000. **292**. P. 2037.
 49. Freund H.P., van der Slot P.J.M., Grimminck D.L.A.G. et al. // New J. Phys. 2017. **19**. P. 023020.
 50. Henderson J.R., Campbell L.T., Freund H.P. et al. // New J. Phys. 2016. **18**. P. 062003.
 51. Freund, H. P., Van der Slot P. J. M. // New J. Phys. 2018. **20**, N 7. P. 073017.
 52. Giannessi L. et al. // Phys. Rev. ST-AB. 2011. **14**. P. 060712.
 53. Saldin E., Schneidmiller E., Yurkov M. // Nucl. Instr. Meth. A. 2005. **539**. P. 499.
 54. Zhukovsky K., Kalitenko A. // J. Synchrotron Rad. 2019. **26**. P. 159.
 55. Жуковский К.В., Калитенко А.М. // Изв. Вузов Физика. 2019. **62**, № 2. С. 153 (Zhukovsky K., Kalitenko A. // Russ. Phys. J. (2019). **62**, N 2. P. 354).
 56. Жуковский К.В., Калитенко А.М. // Изв. Вузов Радиофизика. 2019. **62**, № 1. С. 58 (Zhukovskiy K.V., Kalitenko A.M. // Radiophys. Quantum Electronics. 2019. **62**, N 1. P. 52).
 57. Жуковский К.В. // ЖТФ. 2021. **91**, № 3. С. 495 (Zhukovskii K.V. // Technical Physics. 2021. **66**, N 3. P. 481).
 58. Lee K., Mun J., Park S.-H, Jang K.-H. et al. // Nucl. Instrum. Meth. A. 2015. **776**. P. 27.
 59. Калитенко А.М., Жуковский К.В. // ЖЭТФ. 2020. **157**, № 1. С. 1 (Kalitenko A.M., Zhukovskii K.V. // J. Exp. Theor. Phys. 2020. **130**, N 3. P. 327).
 60. Ratner D., Brachmann A., Decker F.J. et al. // Phys. Rev. ST-AB. 2011. **14**. P. 060701.
 61. Huang Z., Reiche S. Generation of GW-level, sub-Angstrom radiation in the LCLS using a second-harmonic radiator, in: R. Bakker et al. (Ed.), Proceedings of the FEL 2004 Conference, Trieste, Italy, 2004, p. 201.

On the Generation of Even Harmonics in Planar and Elliptical Undulators of Free Electron Lasers

K.Zhukovsky^a, I. Fedorov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia

E-mail: ^azhukovsk@physics.msu.ru

Generation of spontaneous and stimulated undulator radiation (UR) harmonics in undulators used in free electron lasers (FELs) is studied theoretically. The study is conducted both analytically and numerically. Generation of the second harmonic of spontaneous and stimulated radiation of the elliptical and planar undulators is studied in detail taking the characteristics of the facilities into account. The influence of such parameters as the electron beam cross section, emittance, beam deflection from the axis, energy spread, and other factors on generation of UR harmonics is analyzed both individually and collectively. The results have been studied theoretically and compared with results of other authors and with available data on harmonic generation, including the second harmonic in the LEUTL FEL.

Keywords: undulator, harmonic generation, magnetic field, free electron laser.

PACS: 41.60 m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.

Received 12 December 2021.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 1. Pp. 11-22.

Сведения об авторах

1. Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.
2. Федоров Игорь — магистр, соискатель; e-mail: fedorov.ia15@physics.msu.ru.