

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## Обобщение сверхбыстрых алгоритмов LayerPeeling для системы уравнений Манакова

А. Р. Долматов,<sup>1, а</sup> Д. А. Коняев<sup>1, б</sup><sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Поступила в редакцию 03.12.2021, после доработки 31.01.2022, принята к публикации 01.02.2022.

При практическом проектировании волоконно–оптических линий связи важным параметром является вычислительная сложность используемого метода, так как от этого параметра напрямую зависят быстродействие и энергоэффективность приемного устройства. С инженерной точки зрения методы должны быть сравнимы по скорости с линейным эквалайзером, вычислительная сложность которого составляет  $\Theta(N \log_2 N)$  операций, где  $N$  — число узлов сетки по времени. Предметом данной работы является обобщение сверхбыстрых ( $\Theta(N \log_2^2 N)$  арифметических операций) методов LayerPeeling и InverseLayerPeeling, разработанных для нелинейного уравнения Шредингера, на случай системы уравнений Манакова.

**Ключевые слова:** волоконно–оптические линии связи, сверхбыстрые алгоритмы, система уравнений Манакова.

УДК: 537.876. PACS: 42.65.-k.

## ВВЕДЕНИЕ

Передача информации является одной из ключевых проблем в современном обществе. Одно из основных направлений развития средств связи — волоконно–оптические линии связи (ВОЛС) [1–3]. В последнее время наблюдается взрывной рост объемов передаваемой информации. Это связано с возрастающей автоматизацией и информатизацией как процессов производства, так и общественных отношений. Поэтому остро стоит вопрос о повышении пропускной способности, а также дальности передачи ВОЛС. При повышении дальности передачи и плотности передаваемых данных неизбежно растет амплитуда распространяемого в ВОЛС сигнала. Увеличение мощности сигнала приводит к необходимости учета нелинейных искажений в линии связи. В связи с этим большое количество работ посвящено разработке методов решения нелинейных задач волоконной оптики [4–7].

Распространенной в волоконной оптике моделью является начальная задача для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью [3]. В безразмерных переменных ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} i \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2|q|^2 q = 0, & x > 0, t \in \mathbb{R}, \\ q(0, t) = q_0(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Непосредственным обобщением этой модели является начальная задача для системы уравнений Манакова:

$$\begin{cases} i \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} + 2q_1 (|q_1|^2 + |q_2|^2) = 0, \\ i \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2} + 2q_2 (|q_1|^2 + |q_2|^2) = 0, \\ q_i(t, 0) = q_{i0}(t), & i = 1, 2, \\ q_i(t, x) \rightarrow 0, & t \rightarrow \infty, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $x$  — координата вдоль волокна,  $t$  — время, а  $q_i$  — комплексные огибающие соответствующих компонент сигнала. Система Манакова описывает конкуренцию двух процессов: линейного процесса дисперсии, то есть распыливания волны, и нелинейного процесса фокусировки. Если оба процесса компенсируют друг друга, возникают решения в виде уединенных волн — солитонов. Они распространяются в нелинейной среде с неизменной формой, а при взаимодействии друг с другом или другим возмущением не разрушаются, а продолжают двигаться, сохраняя свою структуру.

Существуют различные численные методы решения этой задачи, такие как ряды Вольтера [8, 9], теория возмущений [4], конечно–разностные методы [10], метод расщепления по физическим параметрам (англ. Split Step Fourier Method, далее SSFM) [11] и метод обратной задачи рассеяния (англ. Nonlinear Fourier Transform, далее NFT) [5–7].

На практике очень важным параметром является вычислительная сложность используемого метода, так как от этого параметра напрямую зависят быстродействие и энергоэффективность приемного устройства. С инженерной точки зрения методы должны быть сравнимы по скорости с линейным эквалайзером (англ. Chromatic Dispersion Compensation, CDC). По сути, CDC представляет собой решение задачи (2) с отброшенным нелинейным слагаемым. Поэтому для его применения достаточно

<sup>а</sup> E-mail: dolmatov.as16@physics.msu.ru

<sup>б</sup> E-mail: konyaev@physics.msu.ru

$\Theta(N \log_2 N)$  операций. Здесь и далее  $N$  — число узлов сетки по переменной  $t$ . При этом, в таких методах, как SSFM и других разностных схемах, число операций принципиально зависят от длины волокна, а, в связи с нелинейностью рассматриваемой модели, еще и от амплитуды сигнала. Их вычислительная сложность асимптотически не улучшаема.

Поэтому в последнее время большой интерес представляют методы на основе метода обратной задачи рассеяния. Их существенным преимуществом является формальное отсутствие зависимости трудоемкости метода от расстояния передачи, так как по  $x$  не вводится расчетная сетка. Решение уравнения (2) методом NFT сводится к решению трех линейных вспомогательных задач: нахождение коэффициентов рассеяния  $a(k), b_1(k), b_2(k)$ , где  $k$  — спектральный параметр; поиск дискретных собственных значений и восстановление сигнала по эволюционированным данным рассеяния.

Для эффективного использования NFT необходимо построить быстрые методы решения указанных задач. Предметом данной работы является обобщение быстрых ( $\Theta(N \log_2^2 N)$  арифметических операций) методов LayerPeeling и InverseLayerPeeling [12] на случай системы уравнений Манакова.

## 1. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

### 1.1. Задача Захарова–Шабата и данные рассеяния

Система Манакова так же, как и нелинейное уравнение Шредингера, является интегрируемой и может быть решена с помощью метода обратной задачи рассеяния [13]. Соответствующая система Захарова–Шабата (ЗШ) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik & q_1 & q_2 \\ -q_1^* & ik & 0 \\ -q_2^* & 0 & ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

или в блочном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ik & \mathbf{q}^T \\ -\mathbf{q}^* & ik\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где введены матричные обозначения  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ ,  $\mathbf{I}_2$  — единичная матрица  $2 \times 2$ . Для этой системы необходимо решить задачи поиска амплитуд рассеяния  $a(k), b_1(k), b_2(k)$  и дискретного спектра, состоящего из собственных значений  $k_i$  и нормировочных констант  $C_i : \mathfrak{S} = \{k_i, C_i : a(k_i) = 0\}$ . Для введения данных рассеяния обычно рассматриваются так называемые решения Йоста. Они определяются как частные решения задачи ЗШ с определенными асимптотиками:

$$\phi(t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikt}, \quad \tilde{\phi}(t, k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{ikt}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

$$\psi(t, k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{ikt}, \quad \tilde{\psi}(t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikt}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

ФСР задачи ЗШ состоит из трех решений, так что один из наборов можно выразить через другой. Выражая  $\phi, \tilde{\phi}$  через  $\psi, \tilde{\psi}$ , получим:

$$\begin{aligned} \phi(t, k) &= \psi(t, k)\mathbf{b}(k) + \tilde{\psi}(t, k)a(k), \\ \tilde{\phi}(t, k) &= \psi\tilde{a}(t, k)(k) + \tilde{\psi}(t, k)\tilde{\mathbf{b}}(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $a(k)$  — скаляр,  $\tilde{a}$  — матрица  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{b}(k)$  — столбец высоты 2,  $\tilde{\mathbf{b}}(k)$  — строка длины 2.

Обозначим  $\mathbf{b}(k) = (b_1(k), b_2(k))^T$ . Устремим в первой формуле  $t$  к  $\infty$ . При больших  $t$  получим:

$$\phi(t, k) \approx \begin{pmatrix} ae^{-ikt} \\ b_1 e^{ikt} \\ b_2 e^{ikt} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Откуда для данных рассеяния можно получить расчетные формулы:

$$\begin{aligned} a(k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_0 e^{ikt}, \\ b_1(k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1 e^{-ikt}, \\ b_2(k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2 e^{-ikt}. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае финитного потенциала  $\text{supp}(\mathbf{q}) \subset [t_1, t_2]$  эти формулы можно записать в виде:

$$a(k) = v_0(t_1) e^{ik(t_1 - t_0)}, \quad (10)$$

$$b_1(k) = v_1(t_1) e^{-ik(t_1 + t_0)}, \quad (11)$$

$$b_2(k) = v_2(t_1) e^{-ik(t_1 + t_0)}, \quad (12)$$

где  $v_0, v_1, v_2$  удовлетворяет задаче З-Ш с начальными условиями:

$$\begin{pmatrix} v_0(t_1) \\ v_1(t_1) \\ v_2(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Таким образом, задача на поиск данных рассеяния сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем будем решать именно эту задачу.

### 1.2. Зависимость от эволюционной переменной

Можно показать [11, 13], что зависимость данных рассеяния от переменной  $x$  удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} &= 4ik^2 \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Их можно аналитически проинтегрировать:

$$\begin{aligned} a(k; x) &= a(k; 0), \\ \mathbf{b}(k; x) &= \mathbf{b}(k; 0) e^{4ik^2 x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальные значения для амплитуд рассеяния могут быть вычислены из начальных данных  $q_0(t)$ .

Оказывается, введенных выше данных рассеяния достаточно, чтобы восстановить исходный потенциал. Делается это с помощью системы интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко [7, 13].

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

### 2.1. Прямой LayerPeeling

В интегральном виде систему ЗШ можно записать как

$$\begin{cases} v_0(t+h) = v_0(t)e^{-ikh} + \int_t^{t+h} e^{-ik(t+h-s)} \mathbf{q}^T(s) \mathbf{v}(s) ds, \\ \mathbf{v}(t+h) = \mathbf{v}(t)e^{ikh} - \int_t^{t+h} e^{ik(t+h-s)} \mathbf{q}^*(s) v_0(s) ds. \end{cases} \quad (16)$$

Введем постоянную сетку  $t_n = t_0 + nh$ , где  $h = \frac{t_1 - t_0}{N}$  — шаг сетки,  $N$  — число узлов, а также сеточные функции  $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(t_n)$ ,  $v_n = v(t_n)$ . Аппроксимируя интегралы формулой левых прямоугольников, получим явную схему Эйлера:

$$\begin{cases} v_0^{n+1} = v_0^n e^{-ikh} + e^{-ikh} \mathbf{q}_n^T \mathbf{v}^n h, \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n e^{ikh} - e^{ikh} \mathbf{q}_n^* v_0^n h. \end{cases} \quad (17)$$

Если обозначить  $z = e^{ikh}$  получим, что:

$$\begin{cases} v_0^{n+1} = z^{-1} (v_0^n + \mathbf{q}_n^T \mathbf{v}^n), \\ \mathbf{v}^{n+1} = z (\mathbf{v}^n - \mathbf{q}_n^* v_0^n) \end{cases} \quad (18)$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} v_0^{n+1} \\ \mathbf{v}^{n+1} \end{pmatrix} = z^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{q}_n^T \\ -\mathbf{q}_n^* z^2 & \mathbf{I}_2 z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^n \\ \mathbf{v}^n \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Обозначим матрицу перехода через  $T_n$ , т.е.

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{q}_n^T \\ -\mathbf{q}_n^* z^2 & \mathbf{I}_2 z^2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

тогда

$$v^{n+1} = z^{-(n+1)} T_n T_{n-1} \dots T_0 v^0. \quad (21)$$

Рассмотрим векторы  $u^{n+1} = v^{n+1} z^{n+1}$ . Очевидно, что они удовлетворяют соотношению:

$$u^{n+1} = T_n T_{n-1} \dots T_0 u^0. \quad (22)$$

Таким образом, задача поиска дискретных амплитуд рассеяния сводится к умножению  $N$  матриц-полиномов первой степени. Последовательное умножение матриц требует  $\Theta(N^2)$  арифметических операций. Нетрудно видеть, что эту процедуру можно ускорить, используя, например, рекурсивный алгоритм **Algorithm 1**.

В данном алгоритме вначале умножаются первые  $N/2$  матриц, потом последние  $N/2$  матриц, а затем полученные матрицы между собой. Каждый шаг алгоритма состоит из двух рекурсивных вызовов и одной операции по умножению матриц-полиномов. В 6 строчке умножаются матрицы-полиномы степени  $N/2$ ; с помощью быстрого преобразования Фурье это можно сделать за  $\Theta(N \log N)$  арифметических операций. Пусть  $T(N)$  — время работы алгоритма на массиве входных данных длины  $N$ . Тогда  $T(N)$  удовлетворяет следующему рекурсивному соотношению:

$$T(N) = 2T(N/2) + f(N), \quad (23)$$

---

### Algorithm 1. Fast Layer Peeling

---

Input:  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$  — сеточные значения  
Output:  $T^{0 \rightarrow N} = T_{N-1} \dots T_0$  — произведение матриц перехода

```

1: if  $N = 1$  then
2:   return  $T_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{q}_0^T \\ -\mathbf{q}_0^* z^2 & \mathbf{I}_2 z^2 \end{pmatrix}$ 
3: else
4:    $D = \text{FastLP}(\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N/2-1})$ 
5:    $U = \text{FastLP}(\mathbf{q}_{N/2}, \dots, \mathbf{q}_{N-1})$ 
6:   return  $U * D$ 
7: end if
    
```

---

где  $f(N) = \Theta(N \log N)$  — время, затраченное на умножение матриц-полиномов  $U$  и  $D$ . Используя основную теорему о рекуррентных соотношениях, можно показать, что сложность такого алгоритма будет

$$T(N) = \Theta(N \log^2 N), \quad (24)$$

что асимптотически лучше, чем в простой реализации.

### 2.2. Обратный LayerPeeling

Учитывая, что  $v^0 = u^0 = (1 \ 0 \ 0)^T$ , докажем по индукции, что вектор  $u^{n+1}$  имеет следующую структуру:

$$u^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 + z^2 p(z^2) \\ [3pt] -z^2 \mathbf{q}_n^* + z^4 \mathbf{r}(z^2) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где  $p, \mathbf{r}$  — некоторые полиномы от переменной  $z^2$ . Для  $u^1$  соотношение верно, так как  $u^1$  есть первый столбец матрицы  $T_0$ . Пусть верно для всех  $k < n$ . Тогда

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= T^n u^n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{q}_n^T \\ -\mathbf{q}_n^* z^2 & \mathbf{I}_2 z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + z^2 p \\ -z^2 \mathbf{q}_{n-1}^* + z^4 \mathbf{r} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + z^2 p(z^2) + \dots \\ -\mathbf{q}_n^* z^2 - z^4 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + z^2 \tilde{p} \\ -\mathbf{q}_n^* z^2 + z^4 \tilde{\mathbf{r}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

В частности, это означает, что, зная  $u^{n+1}$ , можно найти коэффициент  $q_n$ , а значит, и матрицу  $T_n$ , и обратную к ней  $T_n^{-1}$ . Но тогда можно найти  $u^n = T_n^{-1} u^{n+1}$  и, продолжив эту процедуру, можно восстановить все числа  $q_i$ . Нетрудно понять, что вычислительная сложность такой процедуры составит  $\Theta(N^2)$  арифметических операций, так как на каждой итерации нам нужно будет умножать полиномы первой степени на полиномы степени  $N$ , а также складывать полиномы степени  $N$ .

Обратная матрица имеет вид:

$$T_n^{-1} = \frac{z^{-2}}{\Delta} \begin{pmatrix} z^2 & -q_1 & -q_2 \\ z^2 q_1^* & 1 + |q_2|^2 & -q_1^* q_2 \\ z^2 q_2^* & -q_1 q_2^* & 1 + |q_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где  $\Delta = 1 + |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1 + \mathbf{q}_n^T \mathbf{q}_n^*$ . Нетрудно показать, что произведение обратных матриц перехода будет иметь следующий вид:

$$T_{N-n}^{-1} \cdots T_{N-1}^{-1} = z^{-2n} \begin{pmatrix} z^2 t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ z^2 t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ z^2 t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где  $t_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} z^{2\alpha} t_{ij}^{(\alpha)}$  — полиномы степени  $n-1$  от переменной  $z^2$ ,  $t_{ij}^{(\alpha)}$  — числовые коэффициенты.

Обратный LayerPeeling также можно ускорить. Пусть

$$\begin{pmatrix} u_n^0 \\ u_n^1 \\ u_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n \\ z^2 Q_n \\ z^2 R_n \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $P_n, Q_n, R_n$  — полиномы степени  $n$  от переменной  $z^2$ , т.е. они имеют вид:

$$X_n = \sum_{\alpha=0}^n X_n^{(\alpha)} z^{2\alpha}, \quad (30)$$

где  $X_n^{(\alpha)}$  — числовые коэффициенты,  $X \in \{P, Q, R\}$ .

Как уже показано выше, справедливы равенства  $P_{n+1}^{(0)} = 1$ ,  $Q_{n+1}^{(0)} = -(q_n^1)^*$ ,  $R_{n+1}^{(0)} = -(q_n^2)^*$ . В частности, если  $n = N-1$ , то для вычисления последнего сеточного значения  $\mathbf{q}_{N-1}$  достаточно знать первые коэффициенты полиномов  $P_N, Q_N, R_N$ . Докажем по индукции, что для вычисления последних  $n$  сеточных значений  $\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{q}_{N-2}, \dots, \mathbf{q}_{N-n}$  достаточно знать лишь первые  $n$  коэффициентов  $X_N^{(0)}, X_N^{(1)}, \dots, X_N^{(n-1)}$  при  $X \in \{P, Q, R\}$ . Для  $n=1$  утверждение уже доказано.

Пусть доказано для всех  $k < n$ . Пусть теперь известны первые  $n+1$  коэффициентов полиномов  $P_N, Q_N, R_N$ . По предположению индукции мы можем найти сеточные значения  $\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{q}_{N-2}, \dots, \mathbf{q}_{N-n}$ . Построим по ним матрицы перехода  $T_i$  и обратные матрицы  $T_i^{-1}$ . Если бы были известны все коэффициенты полиномов  $P_N, Q_N, R_N$ , то, умножая их на обратные матрицы перехода, можно было бы вычислить полиномы  $P_{N-n}, Q_{N-n}, R_{N-n}$ . Как было показано, эти полиномы имеют вид:

$$\begin{aligned} P_{N-n}^{(0)} &= 1, & Q_{N-n}^{(0)} &= -(q_{N-n-1}^1)^*, \\ R_{N-n}^{(0)} &= -(q_{N-n-1}^2)^*. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда видно, что для вычисления  $q_{N-n-1}^i$  достаточно знать коэффициенты при нулевой степени у полиномов  $P_{N-n}, Q_{N-n}, R_{N-n}$ . Полиномы вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{N-n} \\ z^2 Q_{N-n} \\ z^2 R_{N-n} \end{pmatrix} &= T_{N-n}^{-1} \cdots T_{N-1}^{-1} \begin{pmatrix} P_N \\ z^2 Q_N \\ z^2 R_N \end{pmatrix} = \\ &= z^{-2n} \begin{pmatrix} z^2 t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ z^2 t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ z^2 t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_N \\ z^2 Q_N \\ z^2 R_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

---

### Algorithm 2. Fast ILP

---

Input:  $\mathbf{u}_N$  — полиномы-амплитуды рассеяния,

Output:  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$  — сеточные значения,

$T_0^{-1} \cdots T_{N-1}^{-1}$  — произведение обратных матриц перехода

```

1: if  $N = 1$  then
2:    $-\mathbf{q}_0^* = (Q_N^{(0)}, R_N^{(0)})^T$ 
3:    $T_0^{-1} = \frac{z^{-2}}{\Delta} \begin{pmatrix} z^2 & -\mathbf{q}_0^T \\ z^2 \mathbf{q}_0^* & \Delta - \mathbf{q}_0^* \mathbf{q}_0^T \end{pmatrix}$ 
4:   return  $\mathbf{q}_0, T_0^{-1}$ 
5: else
6:    $\mathbf{q}_{N/2}, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$ ,
    $D = \text{FastILP}(\mathbf{u}_N^{(0)}, \dots, \mathbf{u}_N^{(N/2-1)})$ 
7:    $\mathbf{u}_{N/2} = D * \mathbf{u}_N$  — пересчитываем данные
   рассеяния
8:    $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N/2-1}$ ,
    $U = \text{FastILP}(\mathbf{u}_{N/2}^{(0)}, \dots, \mathbf{u}_{N/2}^{(N/2-1)})$ 
9:   return  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N-1}, U * D$  — возвращаем
   сеточные коэффициенты и обратную матрицу
   перехода.
10: end if

```

---

Откуда получаем соотношения:

$$\begin{aligned} z^{2(n-1)} P_{N-n} &= t_{11} P_N + t_{12} Q_N + t_{13} R_N, \\ z^{2n} Q_{N-n} &= t_{21} P_N + t_{22} Q_N + t_{23} R_N, \\ z^{2n} R_{N-n} &= t_{31} P_N + t_{32} Q_N + t_{33} R_N. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим, например, второе соотношение. Из него необходимо найти коэффициент  $Q_{N-n}^{(0)}$ . Для этого достаточно вычислить коэффициент при  $z^{2n}$  полинома, стоящего справа. Видно, что члены вида  $P_N^{(i)}$  при  $i > n$  в этом коэффициенте не участвуют, так как степень  $z$  при них будет больше, чем  $2n$ .

Эти рассуждения обосновывают корректность приведенного выше рекурсивного алгоритма **Algorithm 2**.

Его идея в том, чтобы разбить задачу на две подзадачи вдвое меньшего размера. В начале коэффициентам  $\mathbf{u}_N^{(0)}, \dots, \mathbf{u}_N^{(N/2-1)}$  вычисляются сеточные значения  $\mathbf{q}_{N/2}, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$  и произведение обратных матриц  $D = T_{N/2}^{-1} \cdots T_{N-1}^{-1}$  (это можно сделать в силу доказанного выше утверждения), затем с помощью обратной матрицы находятся полиномы  $\mathbf{u}_{N/2}$ , которые являются данными рассеяния для сеточных значений  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N/2-1}$  и по ним восстанавливаются эти сеточные значения.

Каждый шаг алгоритма состоит из двух рекурсивных вызовов, умножения матрицы-полинома на вектор-полином и на другую матрицу-полином. Эти операции сводятся к умножению полиномов степени  $N$  и  $N/2$ , что можно сделать быстро с помощью быстрого преобразования Фурье за  $\Theta(N \log N)$  арифметических операций. Аналогично прямому LayerPeeling получим, что сложность алгоритма есть  $T(N) = \Theta(N \log^2 N)$ . Понятно, что константа амортизации для обратного алгоритма будет больше, так как на каждом шаге рекурсии умножается большее число полиномов.

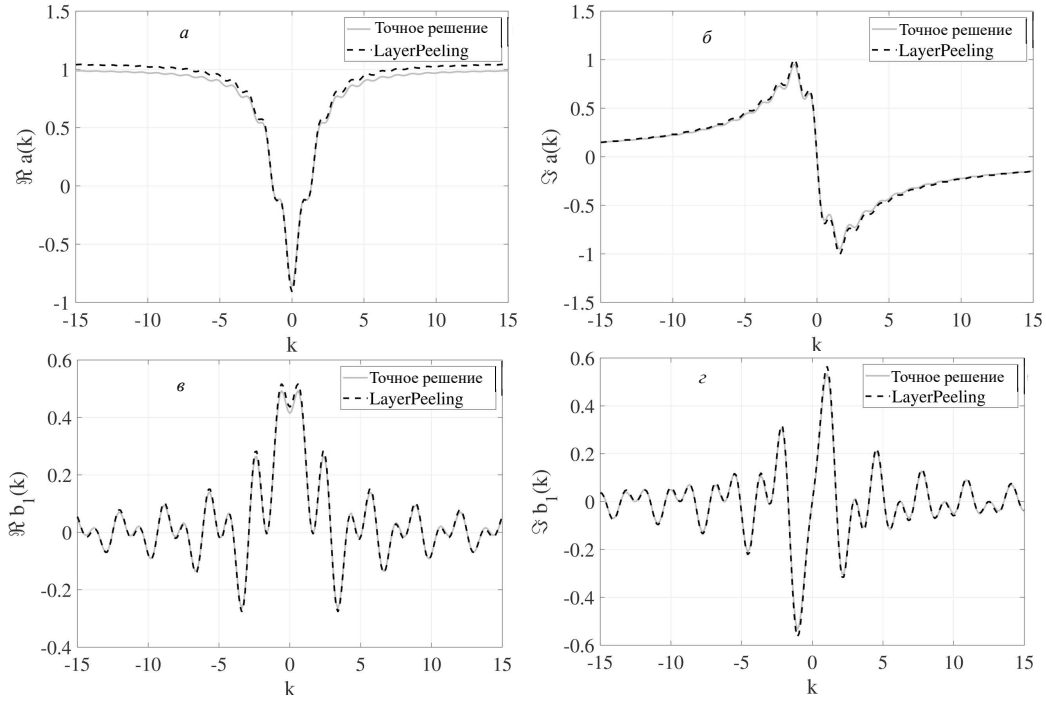


Рис. 1. Зависимость амплитуд рассеяния от спектрального параметра  $k$ :  $a$  — действительная часть  $a(k)$ ,  $б$  — мнимая часть  $a(k)$ ,  $в$  — действительная часть  $b_1(k)$ ,  $г$  — мнимая часть  $b_1(k)$

*Замечание.* В ускоренных алгоритмах выигрыш идет на том, что мы каждый раз умножаем полиномы одинакового размера с помощью быстрой процедуры FFT. На практике оказывается, что при малых длинах полиномов выгоднее их умножить обычным методом «в столбик». Поэтому имеет смысл заканчивать рекурсию при  $N \leq N_0$  и переходить на квадратичный алгоритм. Это не изменит асимптотику при  $N \rightarrow \infty$ , но может несколько снизить константу амортизации, а значит, и реальное время работы.

### 3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Алгоритм будем тестировать на потенциале, для которого данные рассеяния можно найти аналитически. Простейшим примером является сигнал в виде

прямоугольной ступеньки. Пусть сигнал  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$  постоянен на отрезке  $t \in [t_0, t_1]$  и равен нулю вне этого отрезка. Тогда задача на поиски данных рассеяния сведется к линейному ОДУ с постоянной матрицей, а значит, решение можно записать через матричную экспоненту в виде:

$$v(t_1) = e^{Q(t_2-t_1)}v(t_0) = e^{Qh}v(t_0), \quad (34)$$

где  $h = t_2 - t_1$  — ширина ступеньки, а  $Q$  — матрица системы, которая имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -ik & \mathbf{q}^T \\ -\mathbf{q}^* & ik\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Положим  $h = 1$ . Матричную экспоненту можно вычислить явно и прийти к выражению:

$$d = \sqrt{k^2 + |q_1|^2 + |q_2|^2}, \quad (36)$$

$$\xi = d \cos d + ik \sin d, \quad (37)$$

$$e^Q = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \xi^* & q_1 \sin d & q_2 \sin d \\ -q_1^* \sin d & de^{ik} + |q_1|^2 \frac{\xi - de^{ik}}{\|\mathbf{q}\|^2} & q_1^* q_2 \frac{\xi - de^{ik}}{\|\mathbf{q}\|^2} \\ -q_2^* \sin d & q_1 q_2^* \frac{\xi - de^{ik}}{\|\mathbf{q}\|^2} & de^{ik} + |q_2|^2 \frac{\xi - de^{ik}}{\|\mathbf{q}\|^2} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

или в блочном виде:

$$e^Q = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \xi^* & \mathbf{q}^T s \\ -\mathbf{q}^* \sin d & de^{ik} \mathbf{I}_2 + \frac{(\xi - de^{ik})}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q}^* \mathbf{q}^T \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Таким образом, если  $v(t_0)$  столбец единичной матрицы, то

$$v(t_1) = \begin{pmatrix} \cos(d) - ik \operatorname{sinc}(d) \\ -\mathbf{q}^* \operatorname{sinc}(d) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

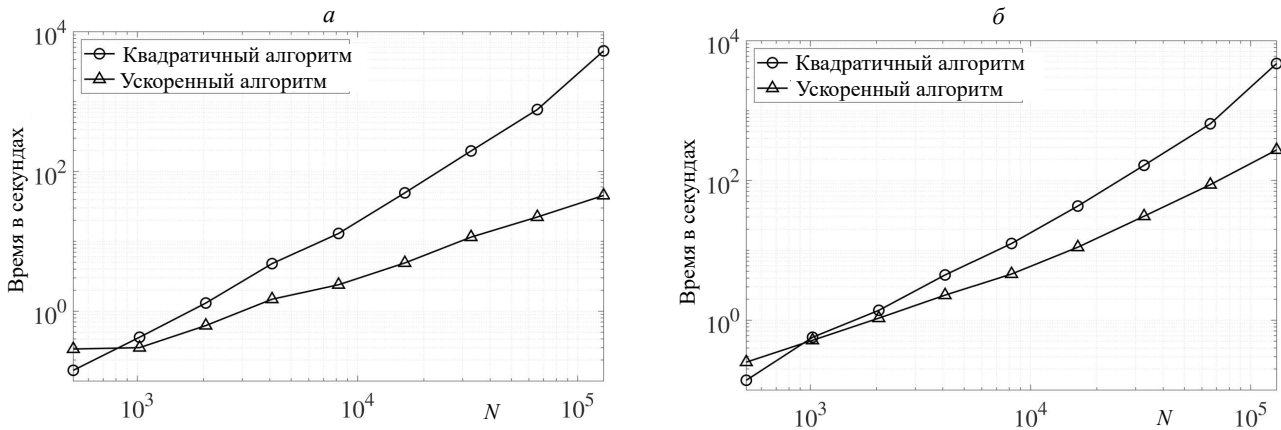


Рис. 2. Время работы алгоритмов: а — прямая задача, б — обратная задача

При этом данные рассеяния выражаются по следующим формулам:

$$a(k) = (\cos(d) - ik \operatorname{sinc}(d)) e^{ik(t_1 - t_0)}, \quad (41)$$

$$b(k) = -q^* \operatorname{sinc}(d) e^{-ik(t_1 + t_0)}. \quad (42)$$

Если же  $h \neq 1$ , то во всех формулах достаточно заменить  $k$  на  $hk$ , а  $q$  на  $hq$ .

Понятно, что с помощью этой процедуры можно найти аналитические выражения для данных рассеяния любых кусочно-постоянных сигналов.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 4.1. Прямая задача рассеяния

На рис. 1 представлены графики действительной и мнимой частей амплитуд рассеяния, найденных для прямоугольного сигнала с параметрами  $t_0 = -2, t_1 = 1, q_1 = 1, q_2 = (1 + i)/2$ . Видно, что визуально амплитуды рассеяния совпадают с аналитическими значениями. Далее (рис. 3) представлен график ошибки амплитуд рассеяния в норме  $C$ . Видно, что ошибка стремится к нулю при сгущении сетки.

### 4.2. Скорость работы алгоритмов

Графики зависимости времени работы обычных и ускоренных алгоритмов LayerPeeling представлены на рис. 2. Видно, что при достаточно большом числе узлов ускоренные алгоритмы работают быстрее. Также видно, что наклон графиков отличается, т.е. обычный и ускоренный алгоритмы имеют разные асимптотические порядки сложности, что согласуется с теорией.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен быстрый алгоритм вычисления данных рассеяния и восстановления потенциала по данным рассеяния для задачи Захарова–Шабата системы уравнений Манакова. Точность метода проверена на сигнале с известными данными рассеяния. Скорость метода также проверена при помощи численного эксперимента.

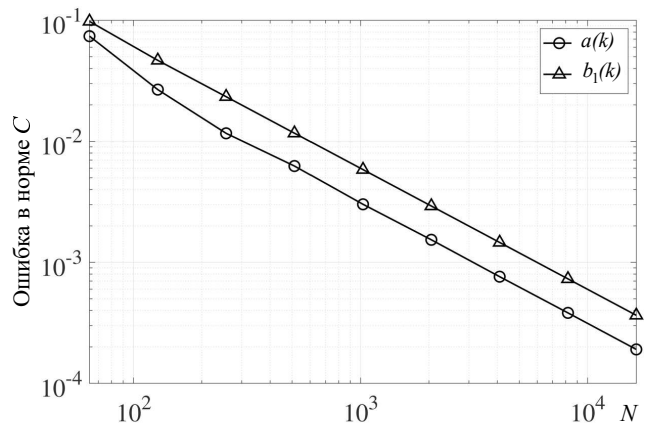


Рис. 3. Зависимость ошибки от размера сетки

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrell E. et al. // Journal of Optics. 2016. **18**. N 6. P. 063002.
2. Mitra P. P., Stark J. B. // Nature. 2001. **411**. N 6841. P. 1027.
3. Agrawal G. P. Nonlinear fiber optics // Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. P. 195.
4. Gao Y. et al. // Optics express. 2014. **22**. N 2. P. 1209.
5. Gaiarin S., Perego A. M., Silva E. P. et al. // Optica. 2018. **5**. N 3. P. 263.
6. Goossens J.W., Yousefi M.I., Jaouen Y., Hafermann H., Polarization-division multiplexing based on the nonlinear Fourier transform. // Optics express. 2017. **25**. N 22. P. 26437.
7. Civelli S., Turitsyn S.K., Secondini M., Prilepsky J.E. // Optics express. 2018. **26**. N 13. P. 17360.
8. Guiomar F. P., Pinto A. N. // Journal of lightwave technology. 2013. **31**. N 23. P. 3879.
9. L. Liu et al. // Journal of Lightwave Technology. 2011. **30**. N 3. P. 310.
10. Федорук М.П., Сидельников О.С. Алгоритмы численного моделирования оптических линий связи на основе многомодовых волокон // Вычислительные технологии. 2015. **20**. № 5.
11. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. **4**.
12. Vaibhav V. // Physical Review E. 2017. **96**. N 6. P. 063302.

13. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. Рипол Классик, 1987.
14. *Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

### Generalization of Superfast LayerPeeling Methods to the Manakov System

A. S. Dolmatov<sup>a</sup>, D. A. Konyaev<sup>b</sup>

*Department of mathematics, Faculty of Physics  
Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>dolmatov.as16@physics.msu.ru, <sup>b</sup>konyaev@physics.msu.ru*

In the practical design of fiber-optic communication lines, one important parameter is the computational complexity of the method that is used, since the speed and energy efficiency of the receiving device directly depend on this parameter. From an engineering point of view, the methods should be comparable in speed with a linear equalizer, whose computational complexity is  $\Theta(N \log_2 N)$  operations, where  $N$  is the number of time grid nodes. The subject of this work is a generalization of superfast  $\Theta(N \log_2^2 N)$  arithmetic operations) LayerPeeling and InverseLayerPeeling methods developed for the nonlinear Schrödinger equation for the Manakov system of equations. In this paper the LayerPeeling family algorithms were generalized to the case of double polarization system governed by the Manakov system of equations.

*Keywords:* fiber-optic communication, superfast algorithm, Manakov system of equations.

PACS: 42.65.Hw.

*Received 31 December 2021.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 1. Pp. 23–30.

#### Сведения об авторах

1. Долматов Александр Сергеевич — студент магистратуры; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: [dolmatov.as16@physics.msu.ru](mailto:dolmatov.as16@physics.msu.ru).
2. Кonyaев Денис Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: [konyaev@physics.msu.ru](mailto:konyaev@physics.msu.ru).