ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Эффекты квантовой запутанности в протон–протонном рассеянии при низких энергиях

Э. Ф. Загирдинова,[1,а] К. А. Кузаков[1,б]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атомного ядра и квантовой теории столкновений Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

Поступила в редакцию 21.01.2022, после доработки 03.03.2022, принята к публикации 03.03.2022.

Рассмотрено формирование запутанного спинового состояния в результате низкоэнергетического упругого столкновения двух протонов. Для описания процесса рассеяния использована теоретическая модель, которая хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными по угловым дифференциальным сечениям протон–протонных столкновений при низких энергиях. Запутанность спинового состояния конечных протонов в зависимости от угла рассеяния проанализирована с помощью неравенства Белла и согласованности пары. Соответствующие численные результаты при разных значениях энергии столкновения сопоставлены с результатами без учета ядерных сил. Показано, что присутствие ядерного взаимодействия существенно усиливает эффекты запутанности по спину.

Ключевые слова: квантовая запутанность, согласованность пары, неравенство Белла, протон–протонное рассеяние.
УДК: 539.141. PACS: 03.67.Bg, 13.75.Cs.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая запутанность — одна из важнейших концепций, которая возникает при переходе от классической к квантовой физике.

Запутанными состояниями обычно называются такие состояния, в которых определенные характеристики входящих в них микросистем связаны («запутаны» или «сцеплены») между собой при помощи какого-либо закона сохранения. Исключительные свойства запутанных состояний продемонстрировали еще в 1935 г. Эйнштейн, Подольский и Розен. В своей знаменитой статье «Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным?» [1] они поставили под сомнение полноту квантовой механики с помощью мысленного эксперимента, названного впоследствии парадоксом Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР). Он заключается в измерении параметров микрообъекта косвенным образом, без непосредственного воздействия на этот объект. Эйнштейн, Подольский и Розен рассмотрели две квантовомеханические системы, взаимодействующие между собой, которые позже перестают взаимодействовать. Когда, к примеру, две частицы, провзаимодействовавшие на близком расстоянии, разлетаются далеко друг от друга, то для разных результатов измерений над первой системой вторая система также оказывается в разных состояниях. Эти состояния описываются разными волновыми функциями, при том, что никакого физического воздействия на вторую систему не производится.

Также ЭПР–парадокс, столь важный для новой интерпретации квантовой теории, обсуждал Шрёдингер в своей статье [2]. Состояния, волновые функции которых нельзя представить в виде произведения индивидуальных функций, были названы Шрёдингером запутанными. Пару частиц в запутанном состоянии иногда называют ЭПР-парой (один из известных примеров — синглетное состояние двух частиц со спином 1/2 [3]). В таких состояниях существует достаточно жесткая внутренняя корреляция. Вследствие этой корреляции измерение одной частицы приводит к изменению волновой функции второй частицы, даже если эти частицы находятся очень далеко друг от друга. Это может свидетельствовать о наличии некоторого нелокального взаимодействия, или об «отсутствии локальной реальности».

Почти сразу после публикации ЭПР–парадокса Бор дал его формальное разрешение [4]. Его суть в том, что в квантовой механике нельзя рассматривать состояние безотносительно к окружению, и конкретно безотносительно к измерительным приборам. Именно из-за определенного расположения приборов при измерении импульса одной частицы можно точно предсказать импульс второй частицы. Эта макроскопическая обстановка дает возможность выявить внутренние корреляции в квантовой системе. В 1964 году Джон Стюарт Белл предложил математический формализм с использованием дополнительных параметров для объяснения стохастической природы квантовых явлений [5]. Неравенства, полученные Беллом, должны были показать, делает ли введение этих параметров описание квантовой механики детерминированным, а не вероятностным. При нарушении неравенств Белла детерминистическое описание с использованием дополнительных параметров невозможно. Следовательно, становилось возможным в эксперименте получить определенную величину, которая описывает корреляции между удаленными измерениями. На основании этого можно было бы сказать, как описывать квантовые явления, вероятностно или детерминировано. В 1972 г.

[а] E-mail: zagirdinova.eljvira@physics.msu.ru
[б] E-mail: kouzakov@srd.sinp.msu.ru

Стюартом Дж. Фридманом и Джоном Ф. Клаузером были проведены эксперименты с фотонами [6], которые согласовывались с квантовой механикой, и было зафиксировано нарушение неравенств Белла.

Из вышеизложенного следует, что запутанные состояния имеют огромное значение при проверке оснований квантовой механики и служат яркой иллюстрацией проявления нелокальности в квантовой физике. Наряду со своим фундаментальным значением понятие квантовой запутанности играет основополагающую роль в квантовой теории информации [7, 8] и теории квантовых вычислений [9]. Поэтому исследование возможностей формирования запутанных квантовых состояний в различных физических процессах представляет не только фундаментальный, но и прикладной интерес. Одним из таких процессов является упругое столкновение двух тождественных частиц со спином 1/2. В указанном случае обменные эффекты могут приводить к запутанному по спину конечному состоянию частиц, даже если потенциал их взаимодействия от спинов не зависит [10]. Этот механизм создания запутанных состояний обсуждался в ряде работ на примере кулоновского взаимодействия между частицами, в частности как свободного электрон-электронного рассеяния [11, 12], так и $(e, 2e)$ рассеяния на поверхностях [13, 14] и атомах [15].

В теоретическом исследовании эффектов запутанности, представленном в настоящей работе, мы не ограничиваемся рамками случая чисто кулоновского взаимодействия между сталкивающимися частицами, выбирая в качестве предмета анализа процесс упругого протон–протонного рассеяния. Помимо кулоновских сил, как в электрон-электронном случае, между протонами действуют ядерные силы, которые, вообще говоря, зависят от спина. Ниже, однако, мы демонстрируем, что наличие последних способно заметно увеличивать степень запутанности конечного состояния даже при низких энергиях столкновения, т.е. когда эффект ядерного взаимодействия с хорошей точностью моделируется с помощью центрального короткодействующего потенциала, который не зависит от спинов протонов.

В работе преимущественно используются единицы $\hbar = c = 1$.

1. КРИТЕРИИ ЗАПУТАННОСТИ

Нарушение неравенства Белла [5, 16] является достаточным критерием запутанного состояния. Согласно формулировке Цирельсона [17] это неравенство можно представить в виде

$$\langle\hat{\Pi}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{\Pi}\right) \leqslant 2. \tag{1}$$

Здесь ρ — спиновая матрица плотности, описывающая конечное состояние двух протонов,
$\hat{\Pi}$ — поляризационный оператор, определяемый как

$$\hat{\Pi} = \hat{A}_1\left(\hat{B}_1 - \hat{B}_2\right) + \hat{A}_2\left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2\right), \tag{2}$$

где $\hat{A}_{1,2} = \mathbf{a}_{1,2}\hat{\sigma}^{(1)}$ и $\hat{B}_{1,2} = \mathbf{b}_{1,2}\hat{\sigma}^{(2)}$ есть операторы проекции спинов первого и второго протонов в первом и втором детекторах соответственно. Направления заданы единичными векторами $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{b}_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{b}_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

Нарушение неравенства (1) свидетельствует о запутанности состояния $\hat{\rho}$. В частности, при равенстве прямой и обменной амплитуд рассеяния должно наблюдаться максимальное нарушение неравенства: $\langle\hat{\Pi}\rangle = 2\sqrt{2} > 2$ (подробнее см. [11]).

Как известно, не для каждого запутанного состояния пары частиц неравенство Белла нарушается [18]. Поэтому в качестве альтернативного, более информативного критерия мы рассмотрим так называемую согласованность пары (pair concurrence) [19]. Одно из её преимуществ состоит в том, что она применима не только к чистому, но и к смешанному парному состоянию. Кроме того, на её основе может быть рассчитана запутанность формирования (entanglement of formation), также часто используемая в качестве меры запутанности квантовых систем. Согласованность пары вычисляется согласно [19]

$$C = \max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right). \tag{3}$$

Здесь $\lambda_{1,2,3,4}$ — собственные значения, в убывающем порядке, матрицы $R = \hat{\rho}\hat{\rho}^T$, где $\hat{\rho}^T = (\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)})\hat{\rho}^*(\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)})$ есть обращенная по времени спиновая матрица плотности и, таким образом, отвечает перевороту спинов протонов.

Величина C может принимать значения от 0, что отвечает незапутанному состоянию, до 1, что отвечает максимально запутанному состоянию.

Если состояние $\hat{\rho}$ чистое, то (3) сводится к [20]

$$C = \sqrt{2(1 - \mathrm{Tr}\hat{\rho}_1^2)}, \qquad \hat{\rho}_1 = \mathrm{Tr}_2\hat{\rho}. \tag{4}$$

Для расчета среднего значения поляризационного оператора, входящего в неравенство Белла, и согласованности пары требуется знание конечной спиновой матрицы плотности $\hat{\rho}$ двух протонов. Приведем её выражение в базисе запутанных белловских состояний:

$$\begin{aligned} |\Phi_{\mathrm{B}}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle), \\ |\Psi_{\mathrm{B}}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle). \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} |\Phi_{\mathrm{B}}^{+}\rangle &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |\Phi_{\mathrm{B}}^{-}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \\ |\Psi_{\mathrm{B}}^{+}\rangle &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\Psi_{\mathrm{B}}^{-}\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

для матричных элементов оператора $\hat{\rho}$ имеем [11]

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(1+\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,x}-\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,y}+\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,z}),\\
\rho_{12} = \rho_{21}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(\mathcal{P}_{1,z}+\mathcal{P}_{2,z}+i\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,y}+i\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,x}),\\
\rho_{13} = \rho_{31}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(\mathcal{P}_{1,x}+\mathcal{P}_{2,x}-i\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,z}-i\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,y}),\\
\rho_{14} = \rho_{41}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}(f-g)(f^*+g^*)(i\mathcal{P}_{1,y}-i\mathcal{P}_{2,y}-\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,z}+\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,x}),\\
\rho_{22} &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(1-\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,x}+\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,y}+\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,z}),\\
\rho_{23} = \rho_{32}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(-i\mathcal{P}_{1,y}-i\mathcal{P}_{2,y}+\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,z}+\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,x}),\\
\rho_{24} = \rho_{42}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}(f-g)(f^*+g^*)(-\mathcal{P}_{1,x}+\mathcal{P}_{2,x}+i\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,z}-i\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,y}),\\
\rho_{33} &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f-g|^2(1+\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,x}+\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,y}-\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,z}),\\
\rho_{34} = \rho_{43}^* &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}(f-g)(f^*+g^*)(\mathcal{P}_{1,z}-\mathcal{P}_{2,z}-i\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,y}+i\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,x}),\\
\rho_{44} &= \frac{1}{4\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}|f+g|^2(1-\mathcal{P}_{1,x}\mathcal{P}_{2,x}-\mathcal{P}_{1,y}\mathcal{P}_{2,y}-\mathcal{P}_{1,z}\mathcal{P}_{2,z}),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — начальные спиновые поляризации протонов; f и g — прямая и обменная амплитуды рассеяния в с.ц.м.;

$$\Sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2} = \frac{d\sigma_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}}{d\Omega} \tag{8}$$

— угловое дифференциальное сечение в с.ц.м. в случае, когда спиновые состояния конечных протонов не измеряются.

2. ПРОТОН-ПРОТОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Потенциал протон–протонного взаимодействия есть $\hat{V} = \hat{V}_c + \hat{V}_s$, где $\hat{V}_c$ — кулоновский потенциал, $\hat{V}_s$ — короткодействующий потенциал ядерных сил. Опыты по рассеянию протонов протонами показали, что число протонов, рассеянных под углом $\vartheta = 90°$ при энергиях ~ 1 МэВ в с.ц.м., в несколько раз превышает их число в теории без учета ядерного взаимодействия. Таким образом, ядерные силы значительно превосходят силы кулоновского взаимодействия, и ими нельзя пренебрегать во избежание неправильного описания рассеяния протонов.

Если энергия падающего протона E_p меньше 20 МэВ в л.с. (10 МэВ в с.ц.м.), то его дебройлевская длина волны превышает радиус действия ядерных сил, и все ядерные фазы рассеяния, кроме s–волновой δ_0, можно считать равными нулю [21]. В этом случае прямая и обменная амплитуды рассматриваемого протон–протонного рассеяния в с.ц.м. определяются выражениями

$$f = f_c(\vartheta) + f_s^{l=0}, \tag{9}$$

$$g = f_c(\pi - \vartheta) + f_s^{l=0}. \tag{10}$$

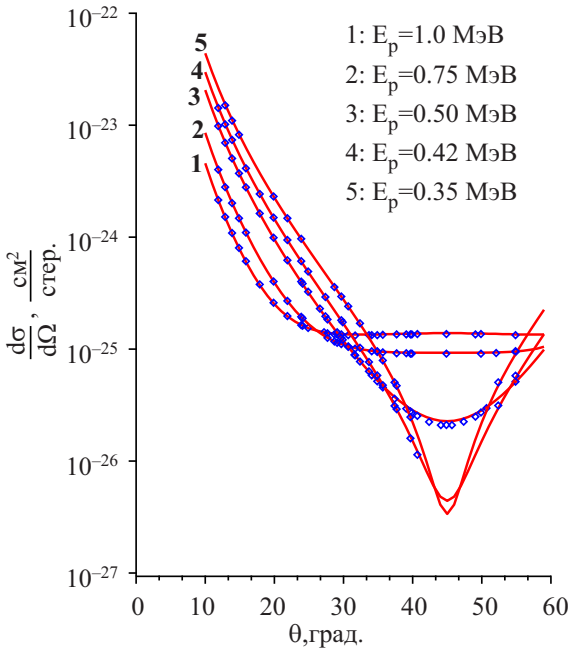

Рис. 1. Сравнение теоретических дифференциальных сечений как функций угла рассеяния в л.с. с экспериментальными данными для разных значений энергии падающего протона. Синие точки демонстрируют эксперимент, красные кривые — теорию

Здесь $f_c(\vartheta)$ — кулоновская амплитуда, которая дается выражением

$$f_c(\vartheta) = -\frac{\eta}{2p\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\exp\left[2i\left(\sigma_0 - \eta\ln\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\right], \tag{11}$$

где $\eta = m_p\alpha/2p$ — параметр Зоммерфельда; $\sigma_0 = \arg\Gamma(1+i\eta)$ — s-волновой кулоновский фазовый сдвиг; m_p — масса протона; $\alpha = 1/137$ — постоянная

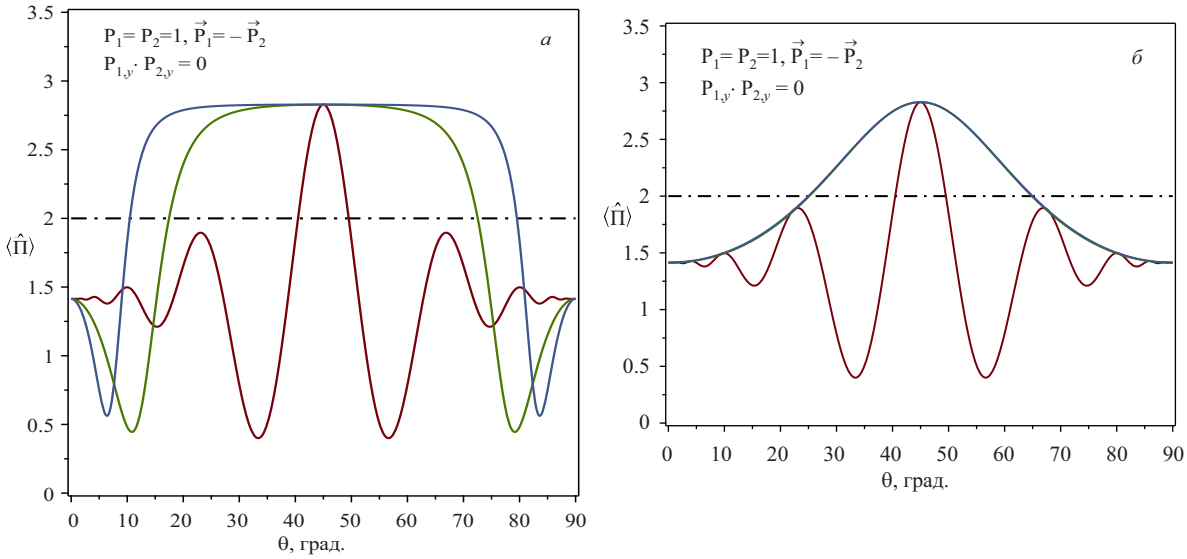

Рис. 2. Среднее значение поляризационного оператора (2) с учетом (*а*) и без учета (*б*) ядерных сил как функция угла рассеяния в л.с. $E_p = 10$ МэВ — синяя кривая; $E_p = 1$ МэВ — зеленая кривая; $E_p = 1$ кэВ — красная кривая. Значения $\langle\hat{\Pi}\rangle$, лежащие выше штрих–пунктирной линии, отвечают нарушению неравенства Белла (1)

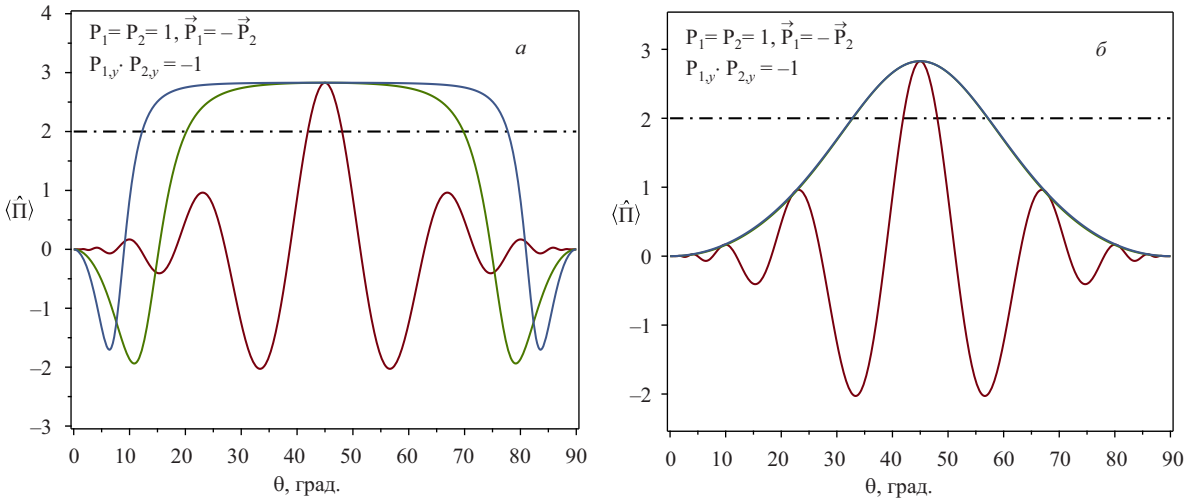

Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но в случае $|\mathcal{P}_{1,y}| = |\mathcal{P}_{2,y}| = 1$, $\mathcal{P}_{1,y} = -\mathcal{P}_{2,y}$

тонкой структуры; p — относительный импульс протонов в с.ц.м.

Ядерную амплитуду можно представить в виде [22]

$$f_s^{l=0} = -\frac{4\pi}{m_p}\frac{e^{2i\sigma_0}}{p\,\mathrm{ctg}\,\delta_0 - ip}. \qquad (12)$$

Добавочный фазовый сдвиг δ_0 обусловлен ядерным взаимодействием двух протонов и выражается через параметры, характеризующие это взаимодействие:

$$C_\eta^2\, p\,\mathrm{ctg}\,\delta_0 + \alpha m_p h(\eta) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0 p^2 - P r_0^3 p^4 + O(p^6), \qquad (13)$$

где

$$C_\eta^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}, \quad h(\eta) = \eta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu^2+\eta^2)} - \ln\eta - C_E,$$

$C_E = 0.577215$ — константа Эйлера, a — длина рассеяния, r_0 — эффективный радиус действия ядерных сил, P — параметр формы ядерного потенциала.

На рис. 1 представлено сравнение теоретических результатов для угловых дифференциальных сечений протон–протонного рассеяния в л.с. ($\theta = \vartheta/2$) с экспериментальными данными при разных значениях энергии падающего протона [23, 24]. В теоретических расчетах использовались следующие численные значения параметров ядерного взаимодействия [21, 22]: $a = -7.82$ фм, $r_0 = 2.78$ фм, $P \cong 0.022$. Можно видеть, что обсуждаемая модель низкоэнергетического протон–протонного рассеяния хорошо согласуется с экспериментом. В следующем разделе мы используем её в численных расчетах среднего значения поляризационного оператора в (1) и согласованности пары (3) с целью анализа запутанности по спину состояния двух протонов после их столкновения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Ниже представлены результаты численных расчетов для неравенства Белла и согласованности пары в зависимости от угла рассеяния θ в л.с. для значений энергии падающего протона $E_p = 1$ кэВ, 1 МэВ,

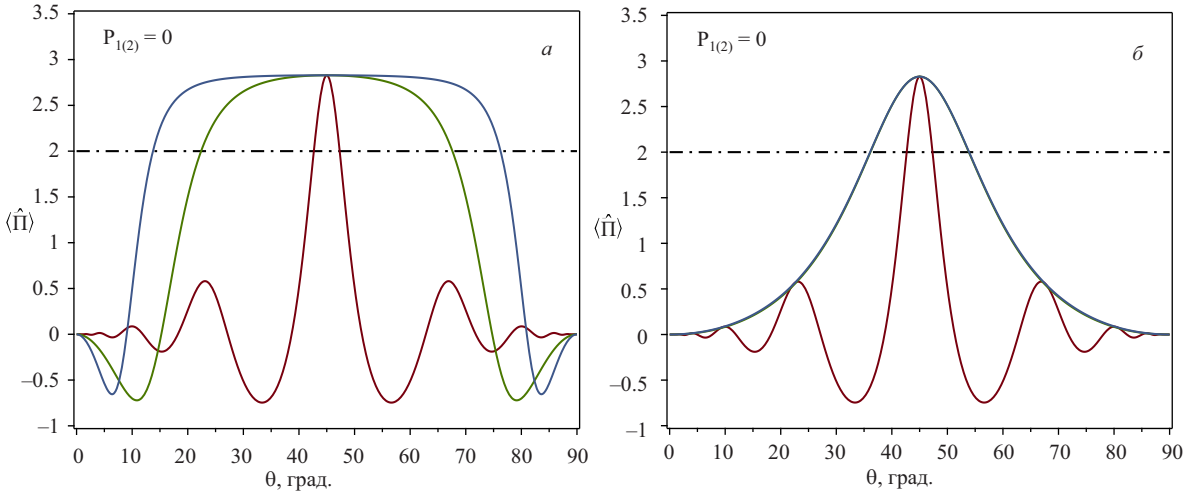

Рис. 4. То же, что и на рис. 2, но в случае когда один или оба начальных протонов неполяризованы

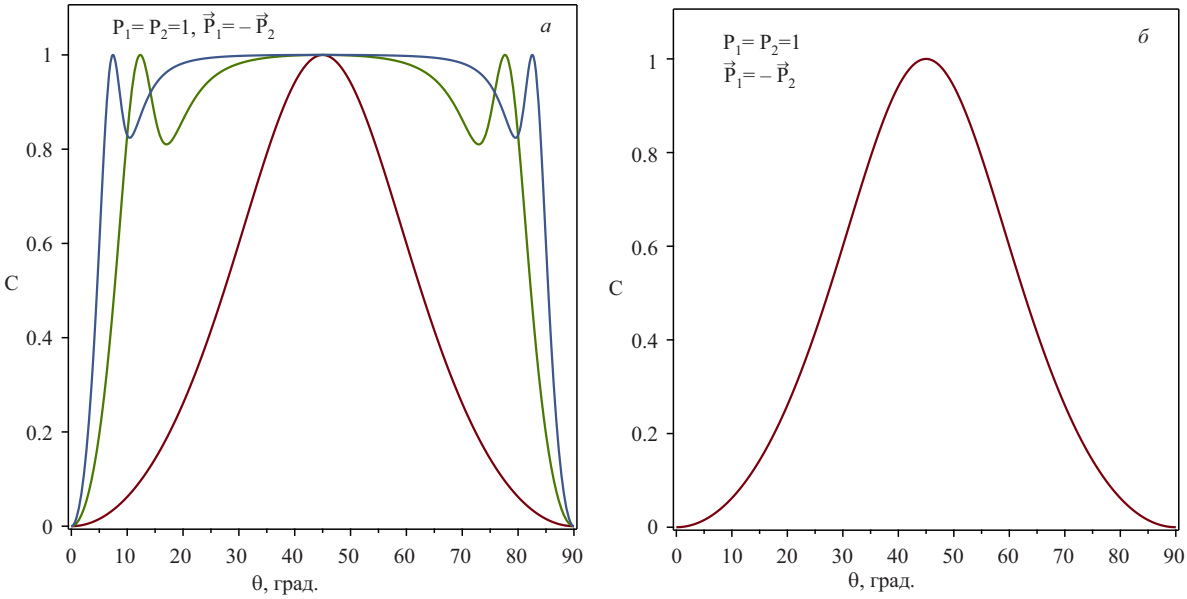

Рис. 5. Согласованность протонной пары с учетом (*а*) и без учета (*б*) ядерных сил как функция угла рассеяния в л.с. $E_p = 10$ МэВ — синяя кривая; $E_p = 1$ МэВ — зеленая кривая; $E_p = 1$ кэВ — красная кривая

10 МэВ. При этом рассмотрены эффекты разных начальных спиновых поляризаций сталкивающихся протонов, а также эффекты ядерных сил.

На рис. 2–4 показаны результаты для среднего значения поляризационного оператора (2). Из рисунков видно, что при угле рассеяния $\theta = 45°$ в л.с. для всех случаев начальных энергий и спиновых поляризаций протонов наблюдается максимальное нарушение классического предела неравенства Белла (1), т.е. $\langle \Pi \rangle = 2\sqrt{2}$. Это объясняется занулением сечения в триплетном канале рассеяния в силу равенства прямой и обменной амплитуд (9) и (10) при угле $\vartheta = 90°$ в с.ц.м. Учет ядерного взаимодействия приводит к тому, что неравенство Белла нарушается в более широком угловом диапазоне. Кроме того, в отсутствие ядерных сил результаты для протонных энергий $E_p = 1$ МэВ и 10 МэВ оказываются практически неразличимыми.

На рис. 5–7 приведены результаты для согласованности протон–протонной пары C в конечном канале обсуждаемого процесса рассеяния в зависимости от угла рассеяния θ в л.с. Бóльшая информативность согласованности пары в отношении запутанности конечного состояния проявляется в том, что неравенство Белла нарушается в более узкой угловой области по сравнению с той, где $C > 0$. Как и в случае нарушения классического предела неравенства Белла, максимально запутанное состояние, а именно $C = 1$, наблюдается при $\theta = 45°$. С ростом кинетической энергии относительного движения протонов уменьшается величина параметра Зоммерфельда и, как следствие, увеличивается диапазон углов, где значение C близко к единице. Это объясняется увеличением относительной роли ядерного взаимодействия в амплитуде рассеяния с ростом энергии E_p, так как ядерный вклад в сечение триплетного канала в случае s–волны отсутствует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено теоретическое исследование формирования запутанного спинового состояния двух протонов в результате упругого протон–

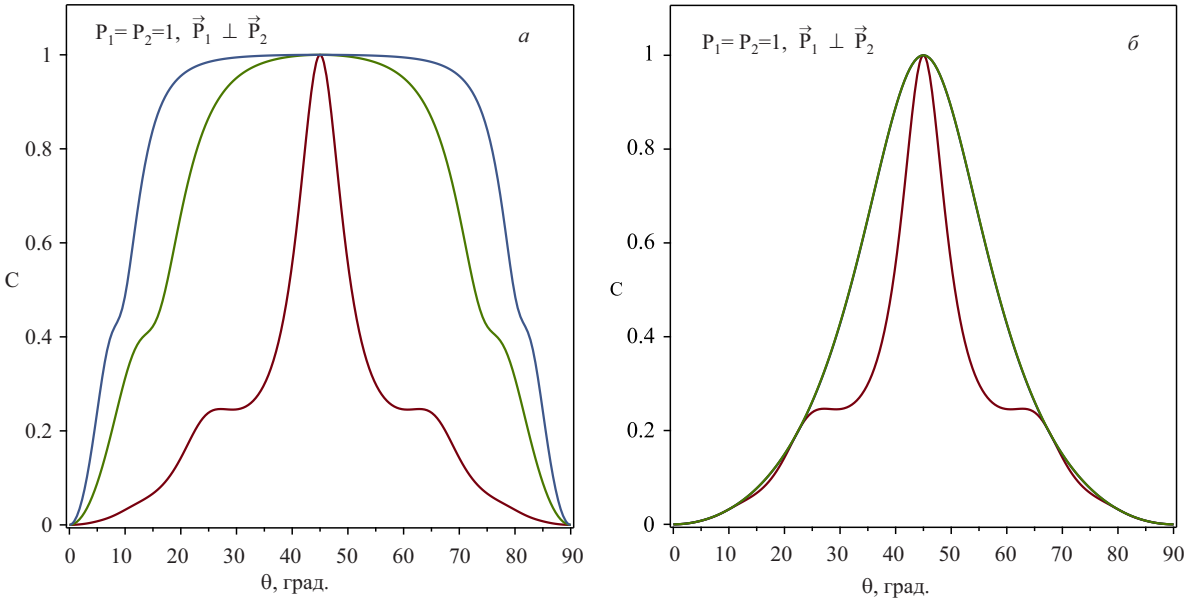

Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но в случае когда начальные спиновые поляризации протонов перпендикулярны друг другу

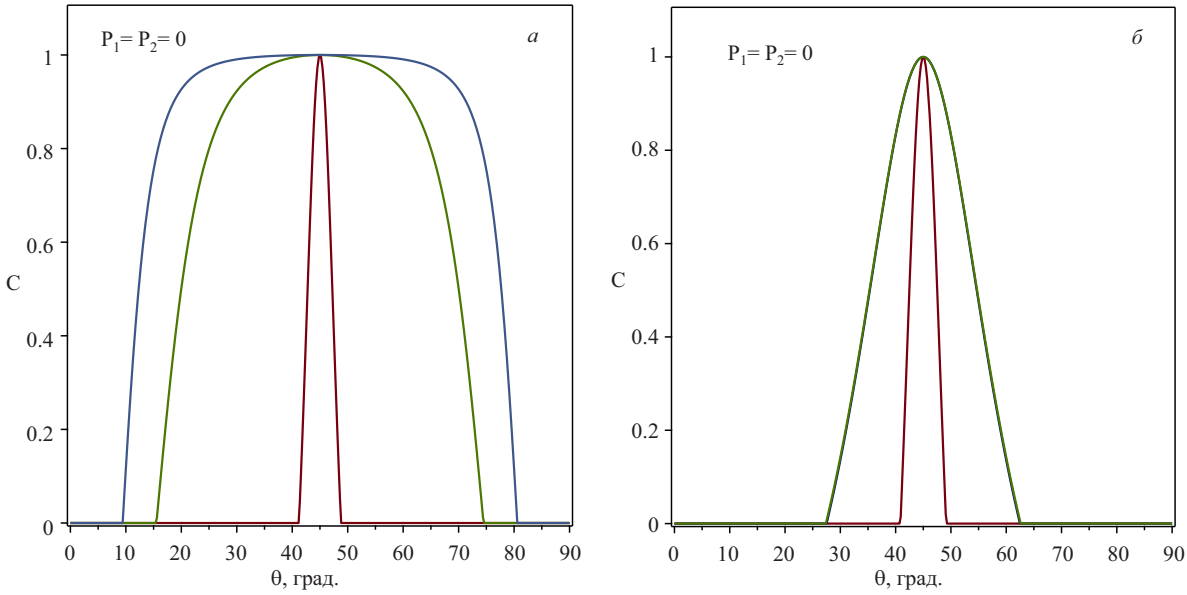

Рис. 7. То же, что и на рис. 5, но в случае когда начальные протоны неполяризованы

протонного рассеяния при низких энергиях. При описании процесса рассеяния наряду с кулоновским взаимодействием учитывался только *s*-волновой вклад ядерного взаимодействия в с.ц.м., что хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными. Анализ запутанности по спину конечного состояния двух протонов, выполненный на базе численных расчетов для неравенства Белла и согласованности пары, показал, что ядерные силы приводят к существенному усилению эффектов квантовой запутанности, также способствуя их проявлению в более широком диапазоне углов рассеяния. Это обусловлено тем, что *s*-волновой вклад ядерного взаимодействия не влияет на рассеяние в триплетном канале, но заметно увеличивает вероятность рассеяния в синглетном канале. Данный вывод можно распространить на общий случай низкоэнергетического рассеяния двух тождественных частиц со спином 1/2, взаимодействие между которыми представляет собой сумму кулоновского и короткодействующего потенциалов. Причем в отсутствие кулоновского взаимодействия в результате рассеяния может формироваться только синглетное состояние (см. также [25]), т.е. максимально запутанное белловское состояние Ψ_{B}^{-}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Einstein A., Podolsky B., Rosen N.* // Phys. Rev. 1935. **47**. P. 777.
2. *Schrödinger E.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1935. **31**. P. 555; 1936. **32**. P. 446.
3. *Bohm D., Aharonov Y.* // Phys. Rev. 1957. **108**. P. 1070.
4. *Bohr N.* // Phys. Rev. 1935. **38**. P. 696.
5. *Bell J.* // Phys. Phys. Fiz. 1964. **1**. P. 195.
6. *Freedman S.J., Clauser J.F.* // Phys. Rev. Lett. 1972. **28**. P. 938.

7. *Braunstein S.L., van Loock P.* // Rev. Mod. Phys. 2005. **77**. P. 513.
8. *Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki K.* // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**. P. 865.
9. *Stolze J., Suter D.* // Quantum Computing: A Short Course from Theory to Experiment. Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
10. *Lamata L., León J.* // Phys. Rev. A. 2006. **73**. P. 052322.
11. *Кузаков К.А.* // ТМФ. 2019. **201**, №2. С. 291; *Kouzakov K.A.* // Theor. Math. Phys. 2019. **201**. P. 1664.
12. *Schattschneider P., Löffler S., Gollisch H., Feder R.* // J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 2020. **241**. P. 146810.
13. *Feder R., Giebels F., Gollisch H.* // Phys. Rev. B. 2015. **92**. P. 075420.
14. *Vasilyev D., Schumann F.O., Giebels F.* et al. // Phys. Rev. B. 2017. **95**. P. 115134.
15. *Kouzakov K.A., Chotorlishvili L., Wätzel J.* et al. // Phys. Rev. A. 2019. **100**. P. 022311.
16. *Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A.* // Phys. Rev. Lett. 1969. **23**. P. 880.
17. *Cirel'son B.S.* // Lett. Math. Phys. 1980. **4**. P. 93.
18. *Werner R.F.* // Phys. Rev. A. 1989. **40**. P. 4277.
19. *Wootters W.K.* // Phys. Rev. Lett. 1998. **80**. P. 2245.
20. *Rungta P., Bužek V., Caves C.M.* et al. // Phys. Rev. A. 2001. **64**. P. 042315.
21. *Ситенко А.Г., Тартаковский В.К.* // Лекции по теории ядра. М.: Атомиздат, 1972.
22. *Ando S., Shin J.W., Hyun C.H., Hong S.W.* // Phys. Rev. C. 2007. **76**. P. 064001.
23. *Thomann Ch., Benn J.E., Münch S.* // Nucl. Phys. A. 1978. **303**. P. 457.
24. *Dombrowski H., Khoukaz A., Santo R.* // Nucl. Phys. A. 1997. **619**. P. 97.
25. *Kjærgaard N.* // J. R. Soc. N. Z. 2021. **51**. P. 489.

The Effects of Quantum Entanglement in Low-Energy Proton–Proton Scattering

E. F. Zagirdinova[a], **K. A. Kouzakov**[b]

Department of Nuclear Physics and Quantum Theory of Collisions, Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: E-mail: [a]zagirdinova.eljvira@physics.msu.ru, [b]kouzakov@srd.sinp.msu.ru

Generation of an entangled spin state as a result of a low-energy elastic collision of two protons is considered. The scattering process is described by a theoretical model that is in good agreement with the available experimental data on the angular differential cross sections of proton–proton collisions at low energies. The entanglement of the spin state of final protons as a function of the scattering angle is analyzed using Bell's inequality and pair concurrence. The numerical results for different values of the collision energy are compared with the results without considering nuclear forces. It is shown that nuclear interaction significantly enhances the effects of spin entanglement.

Keywords: quantum entanglement, pair concurrence, Bell's inequality, proton–proton scattering.
PACS: 03.67.Bg, 13.75.Cs.
Received 21 January 2022.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 3. Pp. 490–497.

Сведения об авторах

1. Загирдинова Эльвира Фаатовна — аспирант; e-mail: zagirdinova.eljvira@physics.msu.ru.
2. Кузаков Константин Алексеевич — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-24-65, e-mail: kouzakov@srd.sinp.msu.ru.