

## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

**Методы связанных волновых толщин и эквивалентных замещений при точном аналитическом решении задач синтеза многослойных периодических структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками ( $\pi$ –структуры)**А.Е. Жителев<sup>1,а</sup> А.В. Козарь<sup>1</sup><sup>1</sup> *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 2*

Поступила в редакцию 18.04.2022, после доработки 28.04.2022, принята к публикации 12.05.2022.

На основе метода связанных волновых толщин и метода эквивалентных замещений получено точное аналитическое решение задачи синтеза многослойных двухкомпонентных периодических структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками. Полученные аналитические соотношения позволяют синтезировать структуры с заданными характеристиками с минимально возможным числом слоев для любых встречающихся на практике показателей преломления как материалов слоев структур, так и материалов сред, ограничивающих структуру. Корректность полученных точных решений и работоспособность методов подтверждены численным экспериментом.

*Ключевые слова:* многослойные периодические структуры, численный эксперимент, интерференция.

УДК: 537. PACS: 41.20.-q.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Разработка методов анализа и синтеза многослойных периодических структур с заданными характеристиками является актуальной проблемой для решения ряда задач как прикладной, так и фундаментальной физики. Теоретической разработке методов анализа и синтеза многослойных периодических структур посвящено большое число монографий и работ, ряд из которых способствовал существенному продвижению в понимании процессов распространения и формирования волн в слоистых структурах [1–8].

Особый интерес и актуальность представляют аналитические способы решения задач синтеза многослойных периодических структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками, поскольку они дают ряд неоспоримых преимуществ по сравнению с численными методами синтеза. Полученные точные решения при синтезе многослойных структур в аналитической форме позволяют найти полное множество всех структурных решений задачи (толщины слоев и их количества), выполнять обобщенный анализ ее волновых и структурных свойств в зависимости от различного рода физических факторов, неизбежно влияющих на ее свойства (разброс толщин слоев, показателей преломления; наличие потерь в слоях структуры, число и порядок чередования слоев в структуре и т.п.) и находить оптимальные по различным критериям решения без привлечения специальных пакетов прикладных компьютерных программ.

**2.  $\pi$ –СТРУКТУРЫ**

В работе [9] был предложен метод и на его основе построен универсальный аналитический алгоритм синтеза нового класса многослойных периодических

структур. Предложенный алгоритм позволяет синтезировать многослойные периодические структуры, амплитудные характеристики которых зависят не только от числа слоев, как в классических алгоритмах синтеза четвертьволновых структур, но и от соотношения волновых (оптических) толщин слоев в периоде структуры. Причем предложенный алгоритм одновременно с выполнением амплитудного требования, вне зависимости от числа слоев и физических толщин связанных слоев, всегда обеспечивает значение фазы коэффициента отражения от такой структуры, равное  $\pi$ . Последнее обстоятельство и обусловило название такого класса структур — « $\pi$ –структуры».

Универсальность предложенного метода и построенного на его основе аналитического алгоритма синтеза заключается в том, что он позволяет найти все возможные точные структурные решения задачи синтеза структур с заданными амплитудно–фазовыми характеристиками для всего непрерывного множества действительных значений показателей преломления как ограничивающих структуру сред, так и показателей преломления материалов слоев структуры.

Из всего полного множества решений связанной системы уравнений в работе [9] были рассмотрены и в дальнейшем подробно изучены лишь т.н. тонкослойные решения, при которых толщины слоев структуры были существенно (в десятки раз) меньше четвертьволновых, что позволило использовать такие структуры в среднем и дальнем ИК–диапазонах. Однако найденные тонкослойные решения не исчерпывали всего множества структурных решений и, кроме того, ограничивали допустимый интервал значений показателей преломления согласуемых сред.

В работе [10] на основании предложенного в [9] метода (метод связанных волновых толщин) и построенного на его основе алгоритма были найдены

<sup>а</sup> E-mail: [ae.zhiteliev@physics.msu.ru](mailto:ae.zhiteliev@physics.msu.ru)

точные аналитические соотношения, включающие все множество структурных решений и позволяющие синтезировать просветляющие структуры для любых значений показателей преломления как согласуемых сред, так и материалов слоев таких структур.

Основной целью данного исследования является логическое продолжение и обобщение предложенного в предыдущих работах [9, 10] аналитического метода синтеза многослойных согласующих структур на случаи, когда синтезированная предложенным методом структура может обеспечить заданный коэффициент отражения от согласуемой среды на всем непрерывном множестве его значений:  $0 \leq |r| \leq 1$ , т.е., по существу, решение задачи синтеза многослойного делителя волновой энергии между отраженной и прошедшей волнами.

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим, как и в [10], нормальное падение плоской монохроматической волны на многослойную структуру ( $N$  — число слоев,  $K$  — число периодов), которая расположена между средами с действительными показателями преломления  $n_L$  (среда, из которой распространяется волна) и  $n_S$  (просветляемая среда) (рис. 1). Сама структура представлена конструкцией с двухслойным периодом и показателями преломления слоев  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_2$  — слой, прилегающий к среде с показателем преломления  $n_S$ ) и обеспечивает на заданной (рабочей) длине волны  $\lambda$  коэффициент отражения, равный нулю. Таким образом, осуществляется одновременное выполнение амплитудного  $|r_c| = |r_s|$  и фазового  $\varphi_c = \varphi_s + \pi(2k + 1)$  условий согласования [1] (где  $|r_c|$  и  $\varphi_c$  — модуль и фаза коэффициента отражения волны от структуры при падении волны со стороны слоя с показателем преломления  $n_2$  в отсутствие согласуемой среды,  $|r_s|$  и  $\varphi_s$  — модуль и фаза коэффициента отражения от согласуемой среды в отсутствие согласующей структуры).

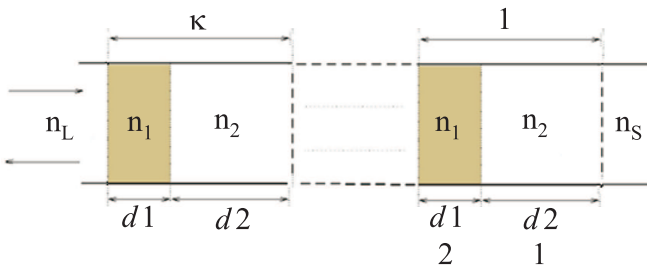


Рис. 1. Согласующая структура с двухслойным периодом

Система связанных уравнений, содержащая все структурные решения для просветляющей двухкомпонентной периодической структуры, имеет вид [9, 10]:

$$n_S = \left| \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_2 + n_2 T_1} \right| \frac{n_1 n_2}{n_L}, \quad (1)$$

$$1 - \Psi T_2^2 = \frac{U_{K-2}(x)}{U_{K-1}(x)} \sqrt{(1 + (AT_2)^2)(1 + T_2^2)}, \quad (2)$$

$$\text{где: } \Psi = \begin{cases} P, & \text{если } N = 2K, \\ B, & \text{если } N = 2K + 1 \end{cases},$$

$T_i \equiv \text{tg}(2\pi n_i d_i / \lambda)$ , ( $i = 1, 2$ );  $d_{1,2}$  — физическая толщина слоев;  $U_{K-1}(x)$ ,  $U_{K-2}(x)$  — полиномы Чебышева второго рода:

$$U_K(x) = 2^K \left[ x^K - \frac{K-1}{1!2^2} x^{K-2} + \frac{(K-2)(K-3)}{2!2^4} x^{K-4} - \frac{(K-3)(K-4)(K-5)}{3!2^4} x^{K-6} \dots \right],$$

$$x = (1 - pA(T_2)^2) / \sqrt{(1 + (AT_2)^2)(1 + T_2^2)},$$

$$p = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2},$$

$$B = \frac{n_2^4 - n_L n_S n_1^2}{n_2^2 (n_L n_S - n_1^2)},$$

$$P = \frac{(n_2^2 - n_L n_S)(n_L n_1^2 - n_S n_2^2)}{n_2^2 (n_L - n_S)(n_L n_S - n_1^2)}.$$

Соотношение (1) можно переписать в виде:

$$T_1 = AT_2, \quad (3)$$

где

$$A = \frac{n_1(n_2^2 - n_L n_S)}{n_2(n_L n_S - n_1^2)}. \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с (3), условие связи волновых толщин имеет вид:

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi} (\text{arctg} \left( A \cdot \text{tg} \frac{2\pi}{\lambda} D_2 \right) + \pi k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $D_2 = \frac{\lambda}{2\pi} (\text{arctg} T_2 + \pi k)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $D_1 = d_1 n_1$ ,  $D_2 = d_2 n_2$  — волновые (оптические) толщины слоев в периоде многослойной структуры.

Соотношение (1) устанавливает необходимое для реализации режима полного просветления условие связи волновых толщин слоев в периоде структуры, а второе уравнение системы с учетом условия связи (1) определяет конкретные физические толщины слоев согласующей структуры и минимальное число слоев, начиная с которого уравнение (2) имеет действительные решения [10].

Из соотношения (4) видно, что коэффициент связи  $A$  зависит только от показателей преломления слоев структуры и граничных сред и не зависит от числа и физической толщины слоев, т.е. он инвариантен относительно различных структурных решений согласующей структуры и является универсальным. Из инвариантности коэффициента связи  $A$  следует, что если при любых действительных значениях показателей преломления слоев структуры и порядке их чередования коэффициент отражения от многослойной периодической двухкомпонентной структуры, расположенной между двумя средами с действительными показателями преломления  $n_L$  и  $n_S$  равен нулю, то волновые толщины слоев такой структуры в периоде всегда связаны в соответствии с соотношением (3).

#### 4. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЗАМЕЩЕНИЙ

Для решения поставленной в настоящей работе задачи воспользуемся методом эквивалентных замещений, т.е. заменой конструктивно сложной многослойной структуры на менее сложную, но имеющую такую же амплитудно-фазовую характеристику на заданной длине волны. Впервые этот метод для синтеза и анализа  $\pi$ -структур был применен в [11] (и работе Козарь А.В. 2018. № 6. С. 61. в этом журнале)

Поскольку в данной работе рассматриваются « $\pi$ -структуры», которые по определению имеют фазу коэффициента отражения равную  $\pi$ , то можно заменить такую структуру на некоторый слой с эквивалентным  $\pi$ -структуре показателем преломления  $n_{eq}$ , волновая толщина которого равна  $\lambda_\varepsilon/4$  ( $\lambda_\varepsilon = \lambda/n_{eq}$ ), а фаза коэффициента отражения равна  $\pi$  (рис. 2). Тогда выражение для эффективного показателя преломления слоя со средой может быть представлено в следующем виде [4, 11]:

$$n_{eff} = n_{eq} \frac{n_s + in_{eq}T}{n_{eq} + in_s T}. \quad (5)$$

где  $T = \operatorname{tg}(2\pi n_{eq}d/\lambda)$ ,  $n_{eq}$  — эквивалентный показатель преломления слоя, представляющего собой амплитудно-фазовый эквивалент  $\pi$ -структуры на заданной длине волны.

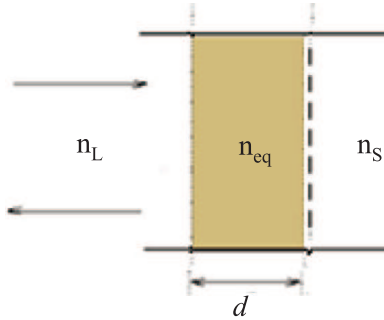


Рис. 2. Представление  $\pi$ -структуры в виде эквивалентного слоя

В рассматриваемом случае  $d = \lambda_\varepsilon/4$ ,  $T \rightarrow \infty$  и соотношение (5) имеет вид:

$$n_{eff} = \frac{n_{eq}^2}{n_s}. \quad (6)$$

Поскольку фаза коэффициента отражения волны от слоя  $\lambda_\varepsilon/4$  на подложке из полубесконечной среды с действительным показателем преломления  $n_s$  равна нулю, то модуль коэффициента отражения в этом случае имеет вид:

$$|r| = \left| \frac{n_{eff} - n_L}{n_{eff} + n_L} \right| = \left| \frac{n_{eq}^2/n_s - n_L}{n_{eq}^2/n_s + n_L} \right| = \left| \frac{n_{eq}^2 - n_L n_s}{n_{eq}^2 + n_L n_s} \right|. \quad (7)$$

При анализе выражения (7) необходимо рассмотреть два случая:

**А:**  $n_{eq}^2 - n_L n_s > 0$ , тогда  $|r| = \frac{n_{eq}^2 - n_L n_s}{n_{eq}^2 + n_L n_s}$ ;

**Б:**  $n_{eq}^2 - n_L n_s < 0$ , тогда  $|r| = \frac{n_L n_s - n_{eq}^2}{n_{eq}^2 + n_L n_s}$ .

Рассмотрим случай **А**. Из соотношения (7) для  $(A n_{eq})^2$  получим:

$$(A n_{eq})^2 = n_L n_s \frac{1 + |r|}{1 - |r|}. \quad (8)$$

Из соотношения (8), заменяя  $|r|$  на заданный модуль коэффициента отражения  $|r_x|$  и учитывая соотношение (6), для эффективного показателя преломления эквивалентного слоя ( $\pi$ -структуры), обеспечивающего заданный модуль коэффициента отражения от среды с показателем преломления  $n_s$ , получим:

$$A n_{eff} = n_s \frac{1 + |r_x|}{1 - |r_x|}. \quad (9)$$

Поскольку, как было показано в работе [10], для любого действительного показателя преломления согласуемой среды существует  $\pi$ -структура обеспечивающая нулевой коэффициент отражения, то структура с эффективным показателем (9) является полностью согласующей в соответствии с амплитудным условием согласования для некоторой гипотетической среды с показателем преломления  $n'_s$ , равным

$$A n'_s = n_s \frac{1 + |r_x|}{1 - |r_x|}. \quad (10)$$

Аналогично для случая **Б** получим:

$$B n'_s = n_s \frac{1 - |r_x|}{1 + |r_x|}. \quad (11)$$

#### 5. СИНТЕЗ $\pi$ -СТРУКТУР С ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

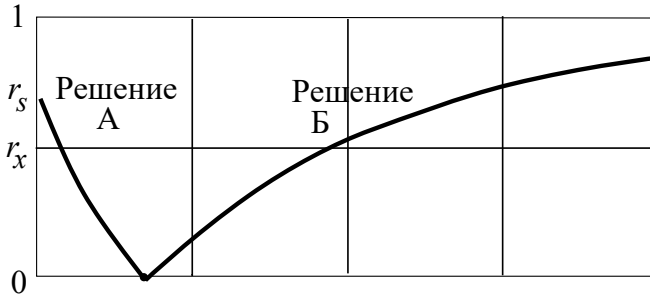
Таким образом, при решении задачи синтеза структуры, обеспечивающей заданный коэффициент отражения  $|r_x|$  от среды с показателем преломления  $n_s$ , необходимо расположить перед этой средой структуру, синтезированную как просветляющую для гипотетической среды с показателем преломления  $n'_s$ , определяемого из соотношения (10) или (11). Рассмотрим оба типа решений:

**А:**  $n'_s = n_s \frac{1 + |r_x|}{1 - |r_x|}$  для  $|r_x| > |r_s|$ ;

**Б:**  $n'_s = n_s \frac{1 - |r_x|}{1 + |r_x|}$  для  $|r_x| < |r_s|$ .

Решения **А** и **Б** представлены на рис. 3. Видно, что для решений типа **Б** диапазон возможных значений  $r_x$  ограничен на интервале:  $0 \leq |r_x| \leq |r_s|$ . Решения типа **А** возможны для диапазона значений:  $|r_x| \in [0; 1]$ . Таким образом, если  $|r_x| < |r_s|$  — существуют два решения; если  $|r_x| > |r_s|$  — существует одно решение **А**.

Решения обоих типов (**А** и **Б**) позволяют синтезировать структуры, обеспечивающие заданный коэффициент отражения. Отличие решений типа **А** и **Б** состоит в различном количестве слоев и их толщин, что приводит к изменениям спектральных

Рис. 3. Решения типа **А** и **Б** для  $n'_s$ 

характеристик структур, а именно ширине минимума отражения (соответственно максимума пропускания) на выбранном уровне. Изучение спектральных характеристик структур, рассчитанных с помощью метода связанных волновых толщин выходит за рамки настоящего исследования и требует отдельного рассмотрения.

Так, при заданных  $|r_x|$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_L$  и  $n_s$ , в системе, представленной на рис. 1, толщины слоев  $d_1$  и  $d_2$  определяются следующим образом:

$$d_1 = \frac{\lambda}{2\pi n_1} (\arctg(A \cdot T_2) + \pi k_1), \quad (12)$$

$$d_2 = \frac{\lambda}{2\pi n_2} (\arctg(T_2) + \pi k_2), \quad (13)$$

где  $(k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $T_2$  определяется аналитически для соответствующих значений  $n'_s$  и зависит от числа слоев ( $N$ ) в системе. Точные аналитические решения относительно  $T_2$  для различных  $N$  имеют вид [10]:

$$N = 2(K = 1), \quad T_2 = \pm 1/\sqrt{P},$$

$$N = 3(K = 1) \quad T_2 = \pm 1/\sqrt{B},$$

$$N = 4(K = 2) \quad T_2 = \pm \left( \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2} \right)^{1/2},$$

$$\text{где } a_1 = 2(P + Q), \quad a_2 = A(2pP - A),$$

$$N = 5(K = 2) \quad T_2 = \pm \left( \frac{b_2 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2b_2} \right)^{1/2},$$

$$\text{где } b_1 = 2(B + Q), \quad b_2 = A(2pB - A),$$

$$\text{где } Q = n_L n_S \frac{(n_2^2 - n_1^2)^2}{2n_2^2(n_L n_S - n_1^2)^2}.$$

Минимальное число слоев задается выражениями [10]:

$$N = 2K : \quad K_{min} = \left\lceil \left| \ln \left( \frac{n_L n_S}{n_h n_l} \right) / \ln \left( \frac{n_h}{n_l} \right) \right| \right\rceil + 1, \quad (14)$$

$$N = 2K + 1 : \quad K_{min} = \left\lceil \left| \ln \left( \frac{n_L n_S}{n_h^2} \right) / 2 \ln \left( \frac{n_h}{n_l} \right) \right| \right\rceil + 1, \quad (15)$$

где  $n_h = n_1, n_l = n_2$ , если  $n_1 > n_2$ , или  $n_h = n_2, n_l = n_1$ , если  $n_1 < n_2$ .

Следовательно, при любых заданных значениях показателей преломления граничных сред и слоев структуры всегда существуют решения для  $d_1$ ,  $d_2$  и  $N$  на всем интервале заданных значений  $|r_x| \in [0; 1]$ . Причем, как было показано выше, может существовать два различных решения для  ${}^A n'_s$  и  ${}^B n'_s$ , каждое из которых имеет  $2K$  главных решений относительно  $d_i$  при минимальном числе слоев структуры [10]. Так как функция  $T_i$  — периодическая, то в дальнейшем будем рассматривать только главные решения, для которых:  $0 < \arg < (T_i) < \pi$ , или в толщинах:  $0 < d_i < \lambda_\varepsilon/2$ .

Таким образом, при синтезе  $\pi$ -структуры, обеспечивающей заданный коэффициент отражения  $|r_x|$  для среды с показателем преломления  $n_s$ , необходимо из соотношения (10) или (11) (если существуют оба решения) определить соответствующие значения  ${}^A n'_s$  и  ${}^B n'_s$  и из соотношений (14) и (15) соответствующие им значения  ${}^A K_{min}$  и  ${}^B K_{min}$ . Воспользовавшись точными аналитическими соотношениями для определения  $T_2$  при заданном числе слоев, находятся все  $2K$  решений для  ${}^A T_2$  и  ${}^B T_2$ , из которых определяются соответствующие им численные значения физических толщин слоев  $d_2$  и  ${}^B d_2$ . Из соотношения (4) для значений  $n'_s$  и  ${}^B n'_s$  определяются соответствующие им значения коэффициентов связи  ${}^A A$  и  ${}^B A$  и в соответствии с соотношениями (12) и (13) — значения физических толщин слоев  $d_1$  и  ${}^B d_1$ . При практической реализации из полученных решений могут быть выбраны решения, которые соответствуют каким-либо критериям оптимальности (по толщинам слоев, их количеству, порядку чередования).

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве иллюстрации работы описанного выше алгоритма синтеза был проведен расчет спектра отражения  $\pi$ -структуры с двухслойным периодом, состоящей из пяти слоев. В качестве рабочей была выбрана длина волны  $\lambda = 10$  мкм. Коэффициент отражения  $|r_x|$  задается в интервале значений  $[0, 0.93]$ . При решении задачи для получения более высоких коэффициентов отражения ( $|r_x| \rightarrow 1$ ) можно использовать структуры, толщины слоев которых соответствуют значению  $\lambda_\varepsilon/4$ , поскольку в этом случае дискретность зависимости амплитудной характеристики четвертьволновых структур от числа слоев не является, как правило, существенной с точки зрения точности требуемого решения для  $|r_x|$ .

Выберем для  $n'_s$  решение типа **Б**:  $n'_s = n_s \frac{1 - |r_x|}{1 + |r_x|}$ . В качестве материалов для синтеза многослойных покрытий в среднем ИК-диапазоне ( $\lambda = 10$  мкм) были выбраны (как и в [10])  $\text{BaF}_2$  ( $n = 1.45$ ) и  $\text{ZnSe}$  ( $n = 2.55$ ). Таким образом, показатели преломления входящих в систему сред:

$$n_L = 1, \quad n_S = 60, \quad n_1 = 1.45, \quad n_2 = 2.55.$$

Из соотношений (14) и (15) определяем минимальное число слоев при заданных параметрах, которое в данном случае соответствует пятислойной структуре. Как было показано в [10], максимальное число



Таблица 1. Толщины слоев  $\pi$ -структур для различных  $|r_x|$ 

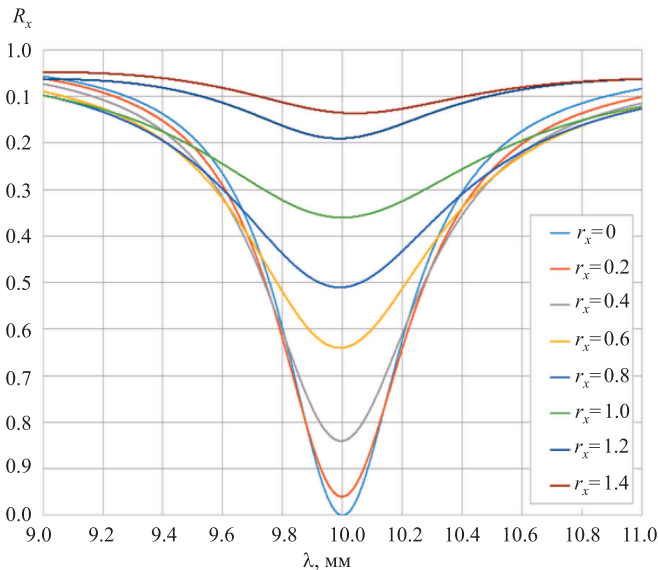
$ r_x $	$n'_s$	$d_1$ , мкм	$d_2$ , мкм
0	60	1.0399	1.5267
0.2	40	1.2020	1.0266
0.4	25.7143	1.3156	0.7250
0.6	15	1.4413	0.4285
0.7	10.5882	1.5211	0.2509
0.8	6.6667	1.6281	0.0132
0.9	3.1579	1.8155	1.0451
0.93	2.1762	1.9438	0.6781

главных точных аналитических решений рассматриваемой задачи равно  $2K$ . Таким образом, при  $N = 5$  оно не может превышать четырех действительных решений. В рассматриваемом конкретном случае, как показывает анализ, из четырех возможных решений для пятислойной структуры действительное решение для  $T_2$  реализуется лишь при условии:

$$T_2 = -\left(\left(b_2 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}\right)/2b_2\right)^{1/2}. \quad (16)$$

Значения полученных толщин слоев (округленных до четвертого знака после запятой) пятислойных  $\pi$ -структур представлены в табл. 1.

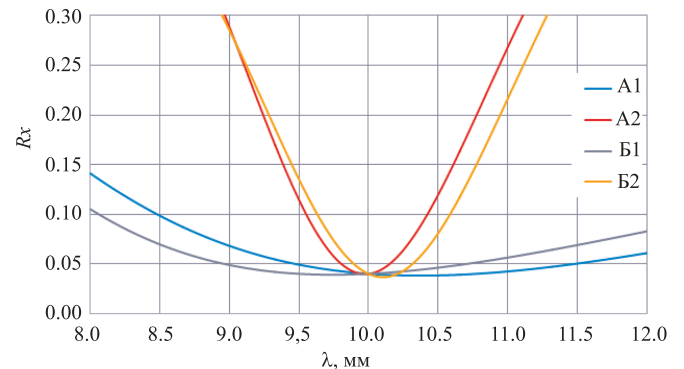
На рис. 4 приведены зависимости энергетического коэффициента отражения  $R_x = |r_x|^2$  от  $\lambda$  и видно, что на рабочей длине волны ( $\lambda = 10$  мкм) выражение  $R_x = |r_x|^2$  строго выполняется в соответствии с заданными  $|r_x|$ .

Рис. 4. Зависимость  $R_x$  от длины волны для пятислойных структур

Каждое из выражений для  $T_2$  может быть получено как для решения типа **A**, так и для решения типа **B**. Рассмотрим для примера вариант структуры при  $N = 2$ . Для этого случая, ниже, в табл. 2, представлены выражения для  $T_2$  и соответствующие им главные решения для  $d_1$ ,  $d_2$ . На рис. 5 приведены

зависимости энергетического коэффициента отражения  $R_x = |r_x|^2$  от длины волны при разных (как вариантов решения типа **A**, так и вариантов типа **B**) решениях для  $T_2$ .

Для представленного на рис. 4 результата проводилась проверка точности метода при заданном  $|r_x| = 0$  (антиотражающая структура), на рабочей длине волны ( $\lambda = 10$  мкм). Так, при увеличении точности задания значений толщин слоев структуры, рассчитанных по приведенным в настоящей работе выражениям, с четырех знаков после запятой до 10-го знака в результате численного расчета было получено значение  $R < 10^{-15}$  (нули во всех разрядах).

Рис. 5. Зависимость  $R_x$  от длины волны при разных решениях  $T_2$  для двухслойной структуры

Из рис. 5 видно, что на рабочей длине волны ( $\lambda = 10$  мкм) выражение  $R_x = |r_x|^2$  строго выполняется в соответствии с заданными значениями  $|r_x|$ .

Как видно из рис. 5, локальный минимум функции  $R_x = |r_x|^2$  для двухслойной структуры достигается на длине волны, отличной от рабочей, что объясняется тем, что  $\pi$ -структуры с четным числом слоев обладают свойством невзаимности фазовой компоненты коэффициента отражения [11]. Кроме того, разные решения для  $T_2$  отличаются спектральной шириной на определенном выбранном уровне значения  $R_x$ , что связано, в первую очередь, с различными оптическими толщинами слоев в периоде структуры, получаемых при разных решениях для  $T_2$ . Спектральные особенности таких решений требуют специального отдельного исследования.

Таблица 2. Показатели преломления и толщины слоев для  $N = 2$  при  $|r_x| = 0, 2$ ,  $n_1 = 2,55$ ,  $n_2 = 1,45$ ,  $n_L = 1$ ,  $n_S = 4$ 

Тип решения	№ решения	$n'_s$	Коэфф. связи (A)	$d_1$ , мкм	$d_2$ , мкм
А	A1: $T_2 = 1/\sqrt{P}$	6	0.7523	0.7523	0.2078
	A2: $T_2 = -1/\sqrt{P}$			1.2085	3.2405
Б	B1: $T_2 = 1/\sqrt{P}$	2.6667	3.8662	0.1952	0.9838
	B2: $T_2 = -1/\sqrt{P}$			1.7655	2.4646

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами связанных волновых толщин и эквивалентных замещений создан алгоритм, позволяющий аналитически точно для полного множества всех структурных решений (толщин слоев в периоде и их количества) синтезировать периодические двухкомпонентные многослойные  $\pi$ -структуры, обеспечивающие заданный коэффициент отражения на всем непрерывном множестве его значений от 0 до 1 для любых действительных значений показателей преломления граничных со структурой сред и показателей преломления слоев в периоде структуры.

Представленные в данной работе выражения не предполагают учет влияния малых потерь на оптические характеристики синтезируемых многослойных структур. Получен ряд предварительных результатов, свидетельствующий о том, что влияние малых потерь на характеристики таких структур, как и в случае четвертьволновых структур, носит поправочный характер. Аналитический и численный анализ влияния малых потерь на характеристики структур со связанными волновыми толщинами

существенно усложняет поставленную задачу и требует отдельного, дополнительного исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abeles* // Annalen de Physique. Paris. 1950. **5**, P. 596.
2. *Кард П.* Анализ и синтез многослойных интерференционных покрытий. Таллин: Валгус, 1971.
3. *Розенберг Т.В.* Оптика тонкослойных покрытий. М.: Наука, 1958.
4. *Бреховских Л.В.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1973.
5. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1980.
6. *Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В.* // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 1974. **14**, № 1. С. 135.
7. *Macleod H.A.* Thin-Film Optical Filters, 4th ed. (Taylor & Francis, 2010).
8. *Tikhonravov A.V., Zhupanov V.G., Fedoseev V.N., Trubetskoy M.K.* // Opt. Express. 2014. **22**, N 26. P. 32174.
9. *Козарь А.В.* // Оптика и спектроскопия. 1985. **59**, вып.5. С. 1132.
10. *Козарь А. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2020. № 6. С. 92. (Kozar A.V. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2020. **75**. P. 623.)
11. *Козарь А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 54. (Kozar A.V. // Mosc. Univ. Phys. Bull. 2009. **64**, N 3. P. 291.)

### Methods of Coupled Wave Thicknesses and Equivalent Substitutions for the Exact Analytical Solution of the Problems of Synthesis of Multilayer Periodic Structures with Specified Amplitude–Phase Characteristics ( $\pi$ -Structures)

A. E. Zhitelev<sup>a</sup>, A. V. Kozar

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia  
E-mail: [ae.zhitelev@physics.msu.ru](mailto:ae.zhitelev@physics.msu.ru)

Based on the method of coupled wave thicknesses and the method of equivalent substitutions, an exact analytical solution is obtained for the problem of synthesizing multilayer two-component periodic structures with specified amplitude–phase characteristics. The obtained analytical relations make it possible to synthesize structures with specified characteristics with the minimum possible number of layers for any refractive indices encountered in practice, both for the materials of layers of structures and for the materials of media limiting the structure. The correctness of the obtained exact solutions and the operability of the methods are confirmed by a numerical experiment.

*Keywords:* multilayer periodic structures, numerical experiment, interference.

PACS: 41.20.-q.

Received 18 April 2022.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 4. Pp. 632–638.

### Сведения об авторах

1. Козарь Анатолий Викторович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: [avk@phys.msu.ru](mailto:avk@phys.msu.ru).
2. Жителев Александр Евгеньевич — аспирант; e-mail: [ae.zhitelev@physics.msu.ru](mailto:ae.zhitelev@physics.msu.ru).