ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Движение фронта в задаче «реакция–адвекция–диффузия» с периодическими коэффициентами

Е. И. Никулин[1, a]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

Поступила в редакцию 24.03.2022, после доработки 21.06.2022, принята к публикации 05.07.2022.

В работе показано существование и асимптотическая устойчивость по Ляпунову решений с движущимся внутренним слоем (фронтом) в краевой задаче для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакция–адвекция–диффузия с условием периодичности по времени. Кроме того, доказано существование решений указанного типа для соответствующей начально–краевой задачи и предложено достаточное условие для их притяжения к периодическому решению. Для каждой задачи построено асимптотическое приближение решения и доказаны теоремы существования и единственности решения с построенной асимптотикой, основанные на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: периодические решения, реакция–адвекция–диффузия, фронт, асимптотическая устойчивость, метод дифференциальных неравенств, верхнее и нижнее решения, внутренний переходный слой, малый параметр.

УДК: 517.9. PACS: 72.20.-i.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих системах, описываемых уравнениями типа «реакция–адвекция–диффузия» и обладающих двумя устойчивыми положениями равновесия, возникают резкие переходные слои между этими положениями при условии, что коэффициент диффузии мал по сравнению с коэффициентом реакции. Такие уравнения являются сингулярно возмущенными и имеют малый параметр при старшей производной. Они возникают во многих прикладных задачах, в частности в физике полупроводников: при моделировании распределения поля и концентрации носителей внутри полупроводника [1] (см. работу и ссылки к ней). Отметим, что задача, которая будет поставлена в разд. 2, возникает при поиске распределения напряженности электрического поля внутри полупроводника, обладающего отрицательной дифференциальной проводимостью, с использованием дрейфо–диффузионной модели (см. [2], § 2 п. 10).

Задача движения переходного слоя в сингулярно возмущенных уравнениях типа «реакция–диффузия» и «реакция–адвекция–диффузия» исследована во многих работах [3–5, 7, 8]. Последние результаты, по сведению автора, относящиеся к пространственно–неоднородным задачам с коэффициентами, периодически зависящими от времени, содержатся в работах [5, 7].

В работе [6] показано существование устойчивого периодического внутреннего слоя в задаче «реакция–диффузия» с периодическими коэффициентами, где при производной по времени, в отличие от исследуемого в данной работе уравнения (1), стоит коэффициент ε^2. Известно также (см. [5]), что в соответствующей уравнению из [6] начально–краевой задаче, в которой фронт в начальный момент времени уже сформирован и находится на конечном расстоянии от устойчивого периодического фронта, скорость притяжения этого фронта к периодическому на порядок превосходит скорость периодического движения последнего. Такие два движения в работе [5] названы «быстрым» и «медленным».

Оказывается, что для уравнения (1) движение слоя происходит со скоростью, порядок которой в любой момент времени совпадает с порядком скорости движения периодического слоя, т.е. происходит только «медленное» движение. Кроме того, указанный переход к другому временному масштабу приводит к существенному изменению условия асимптотической устойчивости периодического решения (ср. неравенство в требовании Y_3 в [6] и условие **(A4)** настоящей работы).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе нас будут интересовать решения следующей сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$Nu := \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - f(u,x,t,\varepsilon) = 0,\quad x\in(-1,1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0, \tag{1}$$

которая будет рассматриваться при $t\in\mathbb{R}$ и условии периодичности по времени

$$u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon),\ x\in[-1,1],\ t\in\mathbb{R},$$

или при $t>0$ с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon)=u_{00}(x,\varepsilon),\ x\in[-1,1].$$

Здесь $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ \varepsilon_0>0$ — малый параметр.

[a] E-mail: nikulin@physics.msu.ru

Мы предполагаем, что выполнены условия:

(A1) Функции $A(x,t,\varepsilon)$, $f(u,x,t,\varepsilon)$ являются $T-$периодическими по t и достаточно гладкими в своих областях определения.

(A2) Пусть вырожденное уравнение $f(u,x,t,0)=0$ имеет ровно три $T-$периодических по t решения $u=\varphi^{(\pm,0)}(x,t)$, причем для любых $(x,t)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$ выполнены неравенства:

$$\varphi^{(-)}(x,t)<\varphi^{(0)}(x,t)<\varphi^{(+)}(x,t),$$
$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x,t),x,t,0)>0,\ f_u(\varphi^{(0)}(x,t),x,t,0)<0.$$

Нас будут интересовать решения, обладающие подвижным резким внутренним переходным слоем вблизи некоторой точки $x=\hat{x}(t,\varepsilon)$, который происходит с корня $\varphi^{(-)}(x,t)$ вырожденного уравнения к корню $\varphi^{(+)}(x,t)$. Такие решения называются *контрастными структурами* типа «ступенька».

Прежде всего выясним условия существования периодических решений, асимптотически устойчивых по Ляпунову.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Постановка задачи в периодическом случае имеет вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon A(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}-f(u,x,t,\varepsilon)=0,\\ (x,t)\in D_t=(-1,1)\times\mathbb{R},\\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\ t\in\mathbb{R},\\ u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon),\ x\in\bar{D}_t.\end{gathered}\tag{2}$$

2.1. Построение формальной асимптотики решения

Асимптотика решения задачи (2) ищется в стандартном виде ([9, 10]):

$$\begin{gathered}U^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)=\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\\ +R^{(\pm)}\left(\eta^{(\pm)},t,\varepsilon\right),\quad (x,t,\varepsilon)\in D_t^{\pm}\times(0,\varepsilon_0].\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $D_t^{(-)}:=[-1,\hat{x}]\times\mathbb{R}$, $D_t^{(+)}:=[\hat{x},1]\times\mathbb{R}$, $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x)+\ldots$ — регулярная часть разложения, функции $Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)+\ldots$ описывают поведение решения в окрестности точки перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\xi=\dfrac{x-\hat{x}(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$ — растянутая переменная переходного слоя; функции $R\left(\eta^{(\pm)},t,\varepsilon\right)=R_0\left(\eta^{(\pm)},t\right)+\varepsilon R_1\left(\eta^{(\pm)},t\right)+\ldots$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1;1]$, $\eta^{(\pm)}=\frac{x\mp1}{\varepsilon}$ — растянутые переменные, соответственно, вблизи точек $x=\pm1$.

Отметим, что функции $\bar{u}_i(x,t)$, $R\left(\eta^{(\pm)},t\right)$ определяются стандартно (см. [9])), причем $\bar{u}_0^{(\pm)}(x,t)=\varphi^{(\pm)}(x,t)$, $R\left(\eta^{(\pm)},t\right)=O(\varepsilon)$ в силу краевых условий Неймана, т.е. возникает слабый пограничный слой.

Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия C^1-сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$:

$$U^{(\pm)}\left(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right)=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t),\tag{4}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon).\tag{5}$$

Точку перехода $x=\hat{x}(t,\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\hat{x}(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots\tag{6}$$

Коэффициенты данного разложения будут определены в процессе построения асимптотики. Отметим, что мы не будем вначале раскладывать по степеням ε точку перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$ в асимптотике решения, в отличие от подхода, изложенного, например, в работе [8]. Это упростит алгоритм построения асимптотики.

Задачи для функций $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\left(\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}-A(\hat{x}(t,\varepsilon),t,0)\right)\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}=\\ =f(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t)+Q_0^{(\pm)},\hat{x}(t,\varepsilon),t,0),\\ Q_0^{(\pm)}(0,t,\varepsilon)+\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t)=\varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t),\\ Q_0^{(-)}(\pm\infty,t,\varepsilon)=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Введем оператор D, который действует по следующему правилу:

$$D\hat{x}:=\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}-A(\hat{x}(t,\varepsilon),t,0).\tag{8}$$

Введем функции

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\hat{x},t)=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t)+Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\\ \tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x},t)=\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x},t),\ \xi\in[0,\pm\infty).\end{gathered}\tag{9}$$

Задачи (7) в обозначениях (9) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+D\hat{x}\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}=f(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x},t,0),\\ \tilde{u}^{(\pm)}(0,\hat{x},t)=\varphi^{(0)}(\hat{x},t),\ \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\hat{x},t)=\varphi^{(\pm)}(\hat{x},t).\end{gathered}\tag{10}$$

Наряду с задачами (10), рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}=f(\hat{u},\hat{x},t,0),\\ \hat{u}(0,\hat{x},t)=\varphi^{(0)}(\hat{x},t),\ \hat{u}(\pm\infty,\hat{x},t)=\varphi^{(\pm)}(\hat{x},t).\end{gathered}\tag{11}$$

Задача (11) подробно изучена в [3], и мы приведем необходимый нам результат в виде леммы.

Лемма 1. Для любых $\hat{x} \in (-1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ существует единственная величина W такая, что задача (11) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi, \hat{x}, t)$, удовлетворяющее оценке

$$|\hat{u}(\xi, \hat{x}, t) - \varphi^{(\pm)}(\hat{x}, t)| < C \exp(-\kappa|\xi|),$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные. При этом функция $W(\hat{x}, t)$ определяется следующим выражением:

$$W(\hat{x}, t) = \frac{\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x},t)}^{\varphi^{(+)}(\hat{x},t)} f(u, \hat{x}, t, 0) du}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}(\xi, \hat{x}, t)\right)^2 d\xi}.$$

Гладкость функции $W(\hat{x}, t)$ совпадает с гладкостью функции $f(\hat{u}, \hat{x}, t, 0)$ относительно аргументов $(\hat{x}, t)$.

Очевидно, в силу T-периодичности по t функций f и A функция W тоже обладает этим свойством. Пусть выполнены следующие требования.

(A3) Пусть задача

$$\frac{dx}{dt} = W(x, t) + A(x, t, 0), \tag{12}$$

$$x(t) = x(t + T) \tag{13}$$

имеет решение $x = x_0(t)$: $-1 < x_0(t) < 1$ при $t \in \mathbb{R}$.

(A4) Пусть $x_0(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial x}\Big(W(x, t) + A(x, t, 0)\Big)\Big|_{x = x_0(t)} dt < 0. \tag{14}$$

Хорошо известно, что неравенство в условии **(A4)** гарантирует асимптотическую устойчивость по Ляпунову периодического решения $x_0(t)$.

Обозначим через (10.a) задачи (10), в которых везде $\hat{x}$ заменено на $x_0(t)$, или, другими словами, в которых положили $\varepsilon = 0$. Из **Леммы 1** и условия **(A3)** следует единственная разрешимость задач (10.a), так как выполнено условие $D\hat{x}_0(t) = W(x_0(t), t)$. При этом $\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t) - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. В силу предполагаемой гладкости коэффициентов f, A (см. условие **(A1)**) задачи (10) являются регулярным возмущением задач (10.a), а потому также единственно разрешимы. Отметим, что, в силу представления (6), имеем теперь $\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}(t, \varepsilon), t) - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}(t, \varepsilon), t) = O(\varepsilon)$.

Таким образом, построение функции переходного слоя в нулевом порядке завершено. Функции переходного слоя первого и следующих порядков находятся по стандартному алгоритму (см. подробнее, например, [8]), и их построение здесь не приводится.

2.2. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $x_i(t)$, $i = 1, 2...$ разложения определяются из условий сшивания (5) производных асимптотических разложений. Введем функцию

$$H(\varepsilon, t) := \varepsilon\left(\frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) - \frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon)\right) = \\ = H_0(\varepsilon, t) + \varepsilon H_1(\varepsilon, t) + \varepsilon^2 H_2(\varepsilon, t) + \ldots, \tag{15}$$

где

$$H_0(\varepsilon, t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon),$$

$$H_1(\varepsilon, t) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x}, t) - \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x}, t) + \\ + \left(\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon)\right)$$

и т. д. Условие C^1 сшивания (5) выражается равенством $H(\hat{x}, t, \varepsilon) = 0$. В силу **Леммы 1** и условия **(A3)** с учетом разложения точки перехода (6) это равенство выполнено в порядке ε^0.

Анализ задач (10), (11) показывает, что функция H_0 может быть представлена в виде:

$$H_0(\varepsilon, t) = (D\hat{x} - W(\hat{x}, t))\frac{1}{\tilde{v}(0, \hat{x}, t)} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \hat{x}, t) e^{(D\hat{x})\xi} d\xi + O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Как следует из разложения (15) и представления (16), члены $x_i(t), i \geqslant 1$ высших порядков в (6) могут быть найдены из следующих линейных периодических задач:

$$\frac{dx_i}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(W(x, t) + A(x, t, 0)\Big)\Big|_{x = x_0(t)}\right) x_i(t) = \\ = G_i(t), \tag{17}$$

$$x_i(t) = x_i(t + T), \tag{18}$$

где $G_i(t)$ — известные функции. Разрешимость этих задач гарантируется условием **(A4)**.

2.3. Обоснование формальной асимптотики

Положим $X_n(t, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon^i x_i(t)$, $\xi = \dfrac{x - X_n(t, \varepsilon)}{\varepsilon}$. Кривая $X_n(t, \varepsilon)$ разделяет область $\bar{D}_t$ на две подобласти $\bar{D}_{tn}^{(-)}$: $(x, t) \in [-1, X_n(t, \varepsilon)] \times \mathbb{R}$ и $\bar{D}_{tn}^{(+)}$: $(x, t) \in [X_n(t, \varepsilon), 1] \times \mathbb{R}$. Определим функции

$$U_n^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(\pm)}(x, t) + Q_i^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) + R_i^{(\pm)}(\eta^{(\pm)}, t)\right),$$

$$(x, t) \in \bar{D}_{tn}^{(\pm)},$$

где $\hat{x}(t,\varepsilon)$, входящие в выражения для функций переходного слоя, заменены на $X_n(t,\varepsilon)$. Обозначим

$$U_n(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,t,\varepsilon),\ (x,t)\in\bar{D}_{tn}^{(-)},\\ U_n^{(+)}(x,t,\varepsilon),\ (x,t)\in\bar{D}_{tn}^{(+)}.\end{cases}\qquad(19)$$

Для доказательства существования решения вида движущегося фронта используем асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [11]). Зададим функцию $x_\beta(t,\varepsilon)=X_{n+1}(t,\varepsilon)-\varepsilon^{n+1}\delta(t)$, где положительная функция $\delta(t)>0$ будет определена ниже. Будем строить верхнее решение $\beta_n(x,t,\varepsilon)$ в каждой из областей $\bar{D}_{t\beta}^{(-)}:(x,t)\in[-1,x_\beta(t,\varepsilon)]\times\mathbb{R}$ и $\bar{D}_{t\beta}^{(+)}:(x,t)\in[x_\beta(t,\varepsilon),1]\times\mathbb{R}$. Введем растянутую переменную $\xi_\beta=\frac{x-x_\beta(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Построим верхнее решение задачи (2) в виде:

$$\beta_n^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)=U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_\beta}+\varepsilon^{n+1}\left(\mu+q^{(\pm)}\left(\xi_\beta,t,\varepsilon\right)\right)+\\ +\varepsilon^{n+1}(e^{\kappa_0\eta^{(+)}}+e^{-\kappa_0\eta^{(-)}}),\quad (x,t)\in D_{t\beta}^{(\pm)}.\qquad(20)$$

Под $U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_\beta}$ мы понимаем функции $U_n^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$, в которых заменен аргумент ξ у функций переходного слоя на ξ_β, а X_{n+1} на x_β. Функции $q^{(\pm)}\left(\xi_\beta,t,\varepsilon\right)$ нужны для устранения невязок, которые возникают при действии оператора на верхнее решение и определяются стандартно ([8]).

Нижнее решение $\alpha_n^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ строится аналогично.

Все необходимые условия для верхнего и нижнего решений проверяются стандартно, аналогично работам [6, 8]. Проверим здесь лишь условие скачка производной. Имеем

$$\varepsilon\left[\left.\frac{\partial\beta_n^{(+)}}{\partial x}\right|_{x=x_\beta}\right]_-^+=-\varepsilon^{n+1}\frac{L(x_0,t)}{\tilde{v}\left(0,x_0,t\right)}\left(\frac{d\delta}{dt}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(W(x,t)+A(x,t,0)\Big)\Big|_{x=x_0(t)}\right)\delta(t)+\frac{F(x_0,t)}{L(x_0,t)}\right)+O(\varepsilon^{n+2}),$$

$$\text{где}\quad F(x_0,t)=\mu\left[\bar{f}_u^{(\pm)}\left(x_0,t\right)\int\limits_{\pm\infty}^{0}\tilde{v}^{(\pm)}\left(\sigma,x_0,t\right)e^{(Dx_0)\sigma}d\sigma\right]_-^+,$$

$$L(x_0,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{v}^2(\xi,x_0,t)e^{(Dx_0)\xi}d\xi>0.\qquad(21)$$

Определим функцию $\delta(t)$ как решение задачи

$$\frac{d\delta}{dt}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(W(x,t)+A(x,t,0)\Big)\Big|_{x=x_0(t)}\delta(t)+\\ +\frac{F(x_0,t)}{L(x_0,t)}=\sigma,\qquad(22)$$

$$\delta(t)=\delta(t+T),\qquad(23)$$

где σ — достаточно большая положительная величина. Как нетрудно показать, из условия **(A4)** следует, что решение этой задачи существует и всюду положительно. Таким образом, выражение в правой части равенства (21) отрицательно за счет $\sigma>0$ при достаточно малых ε.

Итак, основываясь на известных теоремах сравнения из [12], можно утверждать, что существует T-периодическое по t решение задачи, удовлетворяющее неравенству $\alpha_n(x,t,\varepsilon)\leqslant u(x,t,\varepsilon)\leqslant\beta_n(x,t,\varepsilon)$. Используя метод сжимающих барьеров (см., например, [13]), нетрудно доказать, что это решение является асимптотически устойчивым по Ляпунову с областью притяжения по крайней мере $[\alpha_1(x,0,\varepsilon);\beta_1(x,0,\varepsilon)]$, ширина которой составляет $O(\varepsilon)$. Таким образом, верна

Теорема 1. При выполнении условий **(A1)–(A4)** существует T–периодическое по t решение $u_p(x,t,\varepsilon)$ задачи (2), для которого справедлива оценка

$$|u_p(x,t,\varepsilon)-U_n(x,t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{n+1}).$$

Кроме того, решение $u_p(x,t,\varepsilon)$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову с областью устойчивости ширины $O(\varepsilon)$, а следовательно, единственным в этой области.

3. ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА В НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Следующее исследование начально–краевой задачи представляет собой непосредственное развитие результатов работы [8] на случай наличия адвекции и периодической зависимости коэффициентов реакции и адвекции от времени.

Будем считать выполненными условия **(A1)–(A4)** и исследуем движение сформированного фронта при наличии периодических решений, указанных в **Теореме 1**. Нас будут интересовать те решения, которые притягиваются к найденному в предыдущем разделе периодическому решению $u_p(x,t,\varepsilon)$ при $t\to\infty$.

Постановка начально–краевой задачи имеет вид:

$$Nu := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon A(x,t,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x} - f(u,x,t,\varepsilon) = 0,$$
$$x \in (-1,1), \quad t > 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0,\varepsilon) = u_{00}(x,\varepsilon), \quad x \in [-1,1]. \tag{24}$$

Асимптотика решения задачи (24), для которой мы введем обозначение $\tilde{U}_n(x,t,\varepsilon)$, имеет такой же вид, как и асимптотика $U_n(x,t,\varepsilon)$ для периодического решения $u_p(x,t,\varepsilon)$, но в которой координата переходного слоя уже определяется по-другому: $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t) + \varepsilon\tilde{x}_1(t) + \varepsilon^2\tilde{x}_2(t) + ...$ Пусть выполнено условие

(A5) Пусть задача

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = W(x,t) + A(x,t,0), \\ x(0) = x_{00} \in (-1,1) \end{cases} \tag{25}$$

имеет решение $x = \tilde{x}_0(t)$: $-1 < \tilde{x}_0(t) < 1$ при $t \geqslant 0$, причем $\lim\limits_{t\to\infty}(\tilde{x}_0(t) - x_0(t)) = 0$.

Предельное соотношение в (25) представляет собой требование принадлежности x_{00} области влияния асимптотически устойчивого периодического решения $x_0(t)$.

Функции $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1,2,...$ определяются как решения линейных задач Коши для уравнения (17), в котором произведена замена $x_0(t)$ на $\tilde{x}_0(t)$, с начальным условием $\tilde{x}_i(0) = 0$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}_n(x,t,\varepsilon)$ и $\tilde{\beta}_n(x,t,\varepsilon)$ соответственно нижнее и верхнее решения для задачи (24). Определение верхнего и нижнего решений для задачи (24) дается аналогично определению, использующемуся в предыдущем разделе, основное отличие состоит лишь в замене требования T-периодичности по t на условие

(A6) Пусть выполнено неравенство $\tilde{\alpha}(x,0,\varepsilon) \leqslant u_{00}(x,\varepsilon) \leqslant \tilde{\beta}(x,0,\varepsilon), x \in [-1,1], \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Последнее условие означает, что в начальный момент времени фронт уже сформирован.

Верхнее решение определяется выражением(20), в котором: 1) функции $x_i(t)$ заменены на $\tilde{x}_i(t)$, 2) функция $\delta(t)$ заменена на функцию $\tilde{\delta}(t)$, определенную как решение задачи Коши для уравнения (22), в котором произведена замена $x_0(t)$ на $\tilde{x}_0(t)$, с начальным условием $\tilde{\delta}(0) = \tilde{\delta}_0$, где $\tilde{\delta}_0 > 0$ — некоторая постоянная. Можно показать, что в силу выполнения условий **(A3)–(A5)**

$$\delta_1 < \tilde{\delta}(t) < \delta_0, \ t \geqslant 0, \tag{26}$$

где δ_0, δ_1 — некоторые положительные константы.

Нижнее решение $\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру. Можно убедиться, что все условия, фигурирующие в определении верхнего и нижнего решений для задачи (24), для функций $\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $\tilde{\beta}(x,t,\varepsilon)$ выполнены. Из известных теорем сравнения (см. [14]) следует существование единственного решения начально–краевой задачи (24) $u(x,t,\varepsilon) \in [\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon), \tilde{\beta}(x,t,\varepsilon)]$, $x \in [-1,1]$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Кроме того, в силу условия **(A5)** и неравенства (26) существует такое t_1, что при $t \geqslant t_1$ справедливы неравенства: $\alpha_1(x,t_1,\varepsilon) < \tilde{\alpha}_2(x,t_1,\varepsilon) \leqslant u(x,t_1,\varepsilon) \leqslant \tilde{\beta}_2(x,t_1,\varepsilon) < \beta_1(x,t_1,\varepsilon)$, означающие, что функция $u(x,t_1,\varepsilon)$ лежит в области влияния устойчивого решения $u_p(x,t,\varepsilon)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. При выполнении условий **(A1)–(A6)** существует единственное решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (24), обладающее внутренним переходным слоем, для которого для которого справедлива оценка

$$|u(x,t,\varepsilon) - \tilde{U}_n(x,t,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t,\varepsilon) - u_p(x,t,\varepsilon)| = 0.$$

4. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon k(t) x \frac{\partial u}{\partial x} = \left(u^2 - 1\right)\left(u - \varphi^{(0)}(x,t)\right),$$
$$x \in (-1,1), \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0,$$
$$u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+2\pi,\varepsilon), \quad x \in [-1,1], \ t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Для асимптотики нулевого порядка имеем выражение:

$$U_0(x,t,\varepsilon) = \tilde{u}(\xi, x_0(t), t) = \frac{C(x_0,t)\exp(\sqrt{2}\xi) - 1}{C(x_0,t)\exp(\sqrt{2}\xi) + 1},$$
$$C(x,t) = \frac{1 + \varphi^{(0)}(x,t)}{1 - \varphi^{(0)}(x,t)}.$$

Задача для определения точки перехода $x_0(t)$, соответствующей периодическому решению $u_p(x,t,\varepsilon)$, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}\varphi^{(0)}(x,t) - k(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

$$x(t) = x(t+2\pi). \tag{29}$$

Положим $\varphi^{(0)}(x,t) = \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t$, $b = \mathrm{const} < \sqrt{2}$, тогда задача (28) примет вид

$$\frac{dx}{dt} + k(t)x = b\sin t, \ t \in \mathbb{R}, \tag{30}$$
$$x(t) = x(t+2\pi). \tag{31}$$

Решение задачи (30), (31) выписывается явно:

$$x_0(t) := \Phi(t)\frac{\Phi(2\pi)}{1 - \Phi(2\pi)}\int\limits_0^{2\pi} \Phi^{-1}(s) b\sin s ds +$$
$$+ \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s) b \sin s ds, \ \Phi(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t k(s) ds\right).$$

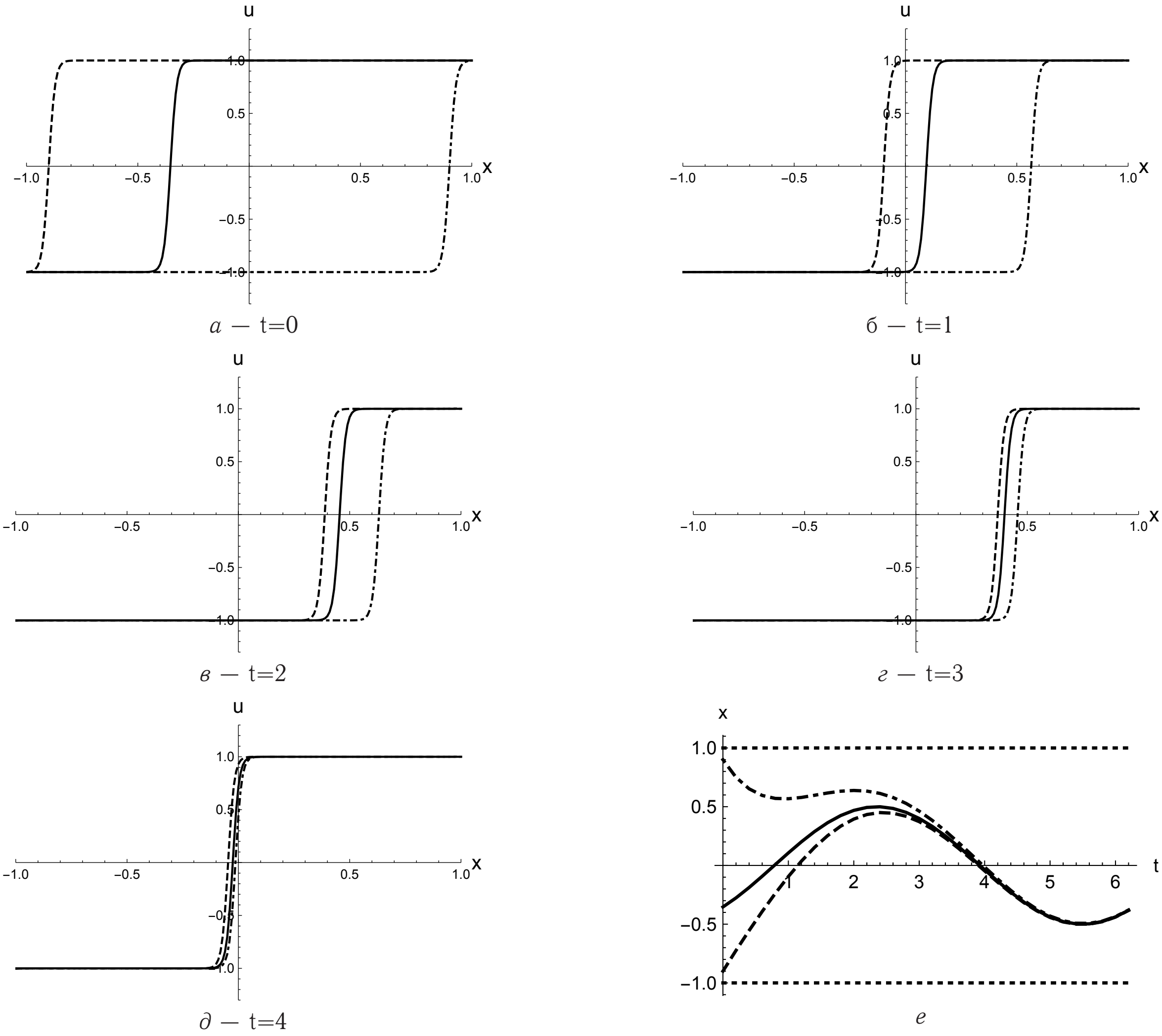

Рисунок. На рисунках *а–е* изображена зависимость решений периодической задачи (27) и соответствующей начально–краевой задачи от координаты x при разных значениях t с шагом, равным 1. Пунктиром и штрихпунктиром обозначены численные решения соответствующей начально–краевой задачи, притягивающиеся к решению с внутренним переходным слоем. Сплошная кривая — асимптотика нулевого порядка для периодического решения $u_p(x,t,\varepsilon)$. На рисунке *е* изображены соответствующие решения уравнения (12) с условием периодичности по времени (сплошная кривая), с начальным условием $x(0) = 0.9$ (штрихпунктирная кривая) и $x(0) = -0.9$ (пунктирная кривая)

Пусть 2π–периодическая функция $k(t)$ выбрана так, чтобы было выполнено неравенство $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\Big(W(x,t)+A(x,t,0)\Big)\Big|_{x=x_0(t)} dt = -\int\limits_0^{2\pi} k(t)dt < 0.$ В частности, если выбрать $k(t) = 1$, то имеем $x_0(t) = \frac{b}{\sqrt{2}}\sin(t - \pi/4)$. Очевидно, условия **(A1)–(A4)** выполнены, следовательно, для задачи (27) справедливо утверждение **Теоремы 1**.

Теперь рассмотрим соответствующую задаче (27) начально–краевую задачу с начальным условием

$$u(x,0,\varepsilon) = \tilde{u}\left(\frac{x - x_{00}}{\varepsilon}, x_{00}, 0\right), \; x \in [-1,1], \qquad (32)$$

где $x_{00} = x_0(0) + \Delta$, $\Delta = \mathrm{const}$. В силу линейности задачи (30) и выполнения условия **(A4)**, ее периодическое решение $x_0(t)$ глобально устойчиво, а значит, выполнено и условие **(A5)** (при этом условие $-1 < \tilde{x}_0(t) < 1$ достигается за счет выбора достаточно малого Δ). Условие **(A6)**, очевидно, тоже выполнено. Таким образом, для начально–краевой задачи, соответствующей задаче (27), с начальным условием (32) справедливо утверждение **Теоремы 2**. Движение слоя показано на рисунке (выбраны $k(t) \equiv 1$, $\varphi^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2}\sin t$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования доказаны теоремы существования асимптотически устойчивого периодического решения с внутренним переходным слоем и нестационарного решения такого же типа. Выявлены условия, обеспечивающие наличие асимптотически устойчивого периодического слоя, условия притяжения к нему решения в виде внутреннего слоя для соответствующей начально–краевой задачи. Дальнейшее развитие исследования этих задач может состоять в изучении задачи генерации слоя, а также в переходе к многомерному случаю.

Автор выражает благодарность профессору Н. Н. Нефедову за плодотворные обсуждения.

Работа поддержана грантом РНФ 21-71-00070.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белянин М.П., Васильева А.Б., Воронов А.В. , Тихонравов А.В.* // Матем. моделирование. 1989. **1**, № 9. С. 43.
2. *Кадомцев Б. Б.* // Коллективные явления в плазме. 2-е изд., испр. и доп. М.:, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
3. *Fife P.C., Hsiao L.* // Nonlinear Analys. Theory Methods Appl. **12**, N 1. P. 19.
4. *Nefedov N., Sakamoto K.* // Hiroshima Mathematical Journal. 2003. **33**, N 3 P. 391.
5. *Nefedov N.N., Radziunas M., Schneider K.R., Vasil'eva A.B.* // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2005. **45**, N 1. P. 41.
6. *Нефедов Н.Н.* // Дифференц. уравнения. 2000. **36**, № 2. С. 262.
7. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 1. С. 9.
8. *Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, № 2. С. 276.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* // Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
10. *Нефедов Н.Н.* // Журн. вычисл. матем. и матем. 2021. **61**, № 22. С. 2074.
11. *Нефедов Н.Н.* // Диффер. уравнения. 1995. **31**, № 4. С. 719.
12. *Hess P.* // Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. Pitman research notes in mathematics series. 1991.
13. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L.* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2019. **26**, № 1. P. 55.
14. *Pao C. V.* // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press. New York. 1992.

The Motion of the Front in the Reaction–Advection–Diffusion Problem with Periodic Coefficients

E. I. Nikulin

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: nikulin@physics.msu.ru

This paper shows the existence and asymptotic Lyapunov stability of solutions with a moving inner layer (front) in a boundary value problem for a singularly perturbed parabolic reaction–advection– diffusion equation with the periodicity condition in time. In addition, the existence of solutions of this type for the corresponding initial boundary value problem is proved and a sufficient condition for their attraction to a periodic solution is proposed. For each problem, an asymptotic approximation of the solution is constructed and the existence and uniqueness theorems for such a solution with the constructed asymptotic behavior based on the asymptotic method of differential inequalities are proved.

Keywords: periodic solutions, reaction-advection-diffusion, front, asymptotic stability, method of differential inequalities, upper and lower solutions, internal transition layer, small parameter.
PACS: 72.20.-i.
Received 24 March 2022.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 5. Pp. 747–754.

Сведения об авторе

Никулин Егор Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-48-59, e-mail: nikulin@physics.msu.ru.