

LXXII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ЯДРО–2022:  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯИСТОЧНИКИ СИНХРОТРОННОГО И НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ  
В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ**Комптоновский развал позитрония**И. С. Степанцов,<sup>1,\*</sup> И. П. Волобуев,<sup>2</sup> Ю. В. Попов<sup>2,3</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2<sup>3</sup>Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований  
Россия, 141980, Дубна

(Поступила в редакцию 27.07.2022; после доработки 22.11.2022; принята к публикации 28.11.2022)

Мы изучаем комптоновскую дезинтеграцию позитрония в сравнении с комптоновской ионизацией атома водорода. Начальная энергия фотона в несколько килоэлектронвольт позволяет применить нерелятивистский подход и использовать приближение  $A^2$ . Наблюдаются интересные особенности в поведении различных дифференциальных сечений. В частности, были найдены условия, при которых электрон и позитрон движутся параллельно друг другу с равными скоростями. Это приводит к ряду специфических кулоновских резонансов.

PACS: 32.80.-t. УДК: 53.01.

Ключевые слова: комптоновская ионизация, детектор COLTRIMS, позитроний, кулоновские резонансы.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.78.2310404](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2310404)**ВВЕДЕНИЕ**

В 2023 г. исполняется 100 лет открытию эффекта Комптона, которое привело к формулировке фундаментального физического принципа корпускулярно-волнового дуализма в квантовой механике [1]. Поэтому недаром автор открытия А. Комптон в 1927 г. получил Нобелевскую премию.

Эффект Комптона отличается от фотоэффекта тем, что при фотоэффекте фотон поглощается квантовой системой, тогда как при комптоновском эффекте фотон сначала поглощается, а потом испускается, оставляя системе часть своих энергии и импульса. В этом смысле комптоновское рассеяние похоже на рассеяние обычной частицы с той лишь разницей, что фотон отсутствует между вершинами поглощения и испускания, поэтому этот процесс всегда описывается диаграммой второго порядка в рамках КЭД. В связи с этим сечения комптоновского рассеяния достаточно малы, что создает определенные трудности экспериментаторам.

Экспериментальные и теоретические исследования комптоновского рассеяния с самого начала были направлены на использование этого нового эффекта для изучения вещества мишени, которая в ранних экспериментах была твердотельной. Идея практического применения комптоновского рассеяния для анализа внутренней структуры вещества мишени впервые была предложена Дж. Дюмо-

ном [2], который связал увеличение ширины спектральной линии рассеянного излучения с импульсным распределением электронов в веществе рассеивателя. Первые эксперименты были основаны на методе совпадений для регистрации рассеянного фотона и испускаемого в ходе реакции электрона. Этот метод впервые был предложен и использован В. Боте в 1924 г. [3] и в дальнейшем получил широкое применение в физике. За открытие метода совпадений В. Боте также была присуждена Нобелевская премия в 1954 г.

Технические ограничения, как, например, сравнительно малая величина сечения при типичных небольших углах детектирования частиц, не позволяют использовать метод совпадений, предложенный Боте, для атомов и молекул. После появления техники COLTRIMS (спектроскопия импульса отдачи ионов холодной мишени, COLd Target Recoil Ion Momentum Spectroscopy) [4] необходимость регистрации фотона отпала, так как его энергию и импульс стало возможно определить через законы сохранения по измеренным энергиям и импульсам иона отдачи и электрона, которые регистрируются почти по полному телесному углу ( $\Omega_{full} = 4\pi$ ). На этой методике основываются недавние эксперименты по комптоновской ионизации атомов гелия вблизи порога [5], послужившие основой для теоретической работы [6]. В этой работе было исследовано дифференциальное сечение комптоновской ионизации атома водорода фотонами с энергией в несколько килоэлектронвольт и определена кинематическая область, в которой из результатов рассеяния можно получить некоторую информацию

\* E-mail: [i.stepantsov33@gmail.com](mailto:i.stepantsov33@gmail.com)

об импульсном распределении электрона в мишени [7, 8]. Атом водорода был выбран как наиболее простой объект, позволяющий обойтись без дополнительных предположений, связанных, например, с наличием в системе нескольких электронов.

Скажем еще несколько слов о современных теоретических подходах к описанию комптоновского рассеяния (ионизации). Достаточно полный обзор по этой тематике представлен в работе [9]. Для проведения расчетов наиболее часто используется импульсное приближение (Impuls Approximation, IA), в котором комптоновское рассеяние на свободном электроне дополняется учетом плотности распределения импульса активного связанного электрона в мишени. Во многих случаях это приближение дает хорошее согласие с экспериментом. Более ранний обзор [10] построен в форме базы данных, используемых в расчетах типичных формфакторов и распределений.

Также отметим, что большой вклад в теорию комптоновского рассеяния внесли работы П. М. Бергстрёма и др. [11, 12], где рассматривался релятивистский подход. Следует отметить работы М. Гаврилы и др. [13–16], где авторы в основном рассматривали упругое комптоновское рассеяние фотонов на электроны выделенной атомной оболочки. При этом в случае атома водорода удалось получить в нерелятивистском приближении аналитическое выражение для матричного элемента второго борновского приближения. Нельзя не отметить и работы З. Калимана и др. [17–19], где преимущественно рассматривалась комптоновская ионизация атома в импульсном приближении, включая и развал позитрония. Поскольку настоящая работа не обзорная, на этом мы остановимся.

Традиционно мы считаем, что атом водорода — это простейшая квантовая система, про которую все известно и которая используется в качестве базисной мишени для исследования различных атомных реакций: возбуждение, ионизация, захват, фотопроекции и т.п. Это так, но есть еще один простейший объект, обладающий такими же свойствами, — это позитроний (т.н. экзотический атом). В синглетном состоянии парапозитроний живет 0.12 нс, в триплетном (ортопозитроний) — 138.6 нс. Эти величины рассчитываются теоретически [20]. В возбужденном состоянии атом водорода живет в среднем 0.1–10 нс, хотя высоковозбужденные состояния в вакууме могут существовать до нескольких секунд. В этом смысле время жизни разных форм позитрония вполне сопоставимо с временем жизни возбужденного атома водорода. Помимо времени жизни, основное отличие водорода от позитрония заключается в массе положительно заряженных частиц: масса протона  $M = 1836.4$  а.е., а масса позитрона  $m = 1$  а.е. (равна массе электрона), и эта разница приводит к существенным различиям в поведении сечений рассеяния.

В работе [6] была подробно рассмотрена комптоновская ионизация атома водорода фотоном с энергией в несколько килоэлектронвольт, и были от-

мечены интересные особенности поведения различных дифференциальных сечений. Эта работа была инициирована недавними экспериментами по комптоновской ионизации атомов гелия с использованием детектора COLTRIMS [6]. Как уже отмечалось выше, особенностью этих экспериментов является измерение на совпадение импульсов электрона и иона-остатка в области сферических углов практически  $4\pi$ , а угол и энергия рассеянного фотона вычисляются из законов сохранения. Мотивацией той работы являлась возможность использовать такую реакцию в целях прямого исследования импульсного распределения активного электрона в атоме. Упомянутые эксперименты по комптоновской ионизации без измерения конечного фотона являются пионерскими, и их методика делает не совсем фантастической возможность работы с холодным пучком позитрониев.

Настоящая работа в определенном смысле является продолжением работы [6], и в ней мы сравним некоторые сечения комптоновской ионизации атомов водорода (H) и позитрония (Ps). Мы также подробно обсудим интересный эффект, который возникает, когда распавшаяся пара электрон–позитрон движется с нулевым относительным импульсом.

Будем использовать атомную систему единиц:  $m_e = \hbar = |e| = 1$ . В этих единицах скорость света  $c = 137$  и постоянная тонкой структуры  $\alpha = 1/c$ .

## 1. ТЕОРИЯ

Оценки показывают, что даже при энергии фотонов 50 кэВ можно уверенно использовать нерелятивистский подход. Нерелятивистский гамильтониан атома позитрония в электромагнитном поле лазера имеет следующий вид (частица 1 — электрон, частица 2 — позитрон):

$$H = \frac{1}{2} \left( -i\nabla_{\mathbf{r}_1} - \frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( -i\nabla_{\mathbf{r}_2} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2, t) \right)^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1)$$

В (1)  $V = -1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  — кулоновский потенциал взаимодействия электрона и позитрона,  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал электромагнитного поля. Используется кулоновская калибровка  $\nabla_r \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ .

Положим

$$\frac{1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \mathbf{e} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \mathbf{e}_1 e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega_1 t)} + (c.c.). \quad (2)$$

В формуле (2)  $\mathbf{e}(\mathbf{e}_1)$  — линейные поляризации начального (конечного) фотонов,  $\mathbf{k}(\mathbf{k}_1)$  их импульсы, и частота (энергия) фотона  $\omega = kc$ . Поскольку  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}) = 0$ , то выбранная нами кулоновская калибровка очевидно выполняется. Такой выбор вектор-

ного потенциала соответствует одному поглощенному и одному излученному фотону.

В настоящей работе мы будем использовать так называемую модель  $A^2$  и отберем из (1) члены, соответствующие контактному комптоновскому рассеянию. В этом случае мы получаем следующий гамильтониан взаимодействия:

$$\tilde{V}_{int}(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\omega_1}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1) \times \left[ e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}_1 - (\omega-\omega_1)t]} + e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}_2 - (\omega-\omega_1)t]} \right]. \quad (3)$$

Учет членов вида  $i(1/c)(\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \nabla_i)$  в гамильтониане (1) приводит к т.н. второму борновскому приближению с промежуточной функцией Грина, которое при больших энергиях фотона дает значительно меньший вклад. Подробности можно посмотреть в работах [6, 13], а здесь эти слагаемые мы рассматривать не будем.

Эволюция системы может быть описана зависящим от времени уравнением Шредингера:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 - (V_{int}(t) - \tilde{V}_{int}(t)) \right] |\Psi(t)\rangle = \tilde{V}_{int}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (4)$$

где кулоновский потенциал включен в  $H_0$ . Выразим переменные  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  через относительную координату  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и координату центра масс позитрония  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}. \quad (5)$$

Кроме того, для сопряженных импульсов имеем выражения

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_R + \mathbf{p}_\rho, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_\rho. \quad (6)$$

Это позволяет представить все входящие в  $H$  величины в переменных  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{R}$ , в частности:

$$H_0 = \frac{1}{4}p_R^2 + p_\rho^2 + V(\boldsymbol{\rho}), \quad (7)$$

и

$$\tilde{V}_{int}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}; t) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega\omega_1}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1) e^{i[\mathbf{Q}\mathbf{R} - (\omega-\omega_1)t]} \times \left[ e^{i\mathbf{Q}\boldsymbol{\rho}/2} + e^{-i\mathbf{Q}\boldsymbol{\rho}/2} \right], \quad (8)$$

где  $\mathbf{Q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$  обозначает импульс, переданный от фотона позитронию.

Для описания развала позитрония под действием поля нам нужно будет вычислить матричный элемент

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\varepsilon_0 t} \langle \Psi^-(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) | \tilde{V}_{int}(t) | \phi_0 \rangle, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_0$  энергия связи позитрония.

Чтобы найти волновую функцию для подстановки в (9), нужно решить уравнение (4). Точное решение этого уравнения найти очень трудно, поэтому мы пренебрежем в этом уравнении членами

$(V_{int} - \tilde{V}_{int})$ . Это слагаемое действительно мало из-за знаменателя, пропорционального  $\omega$ . Тогда

$$\langle \Psi^-(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = e^{i\mathbf{p}_R \mathbf{R} - i(E_1 + E_2)t} \phi^-(\mathbf{p}_\rho, \boldsymbol{\rho}), \quad (10)$$

и функция  $|\phi^- \rangle$  удовлетворяет водородоподобному уравнению и описывает функцию континуума позитрония

$$[p_\rho^2 + \Delta_\rho - V(\boldsymbol{\rho})] \phi^-(\mathbf{p}_\rho, \boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (11)$$

В этом случае уравнение (9) легко интегрируется по  $t$  и  $\mathbf{R}$  и эти интегрирования дают законы сохранения энергии и импульса.

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

Полное дифференциальное сечение (FDCS) для процесса развала позитрония под действием ЭМ поля лазера записывается в виде

$$d^3\sigma = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{\omega\omega_1} \sum_{\mathbf{e}, \mathbf{e}_1} |M|^2 \times (2\pi)^4 \delta(\omega + \varepsilon_0 - \omega_1 - p_1^2/2 - p_2^2/2) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \times \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}, \quad (12)$$

где матричный элемент задается выражением

$$M = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1) \langle \phi(\mathbf{p}_\rho) | e^{i\mathbf{Q}\boldsymbol{\rho}/2} + e^{-i\mathbf{Q}\boldsymbol{\rho}/2} | \phi_0 \rangle. \quad (13)$$

Здесь  $\langle \boldsymbol{\rho} | \phi_0 \rangle$  и  $\langle \phi(\mathbf{p}_\rho) | \boldsymbol{\rho} \rangle$  есть начальное (основное) и конечное (развал) состояния позитрония,  $\varepsilon_0 = -1/(8n^2)$  — уровни энергии позитрония. Также в атомных единицах  $\alpha^2 = r_0$  обозначает классический радиус электрона. Сумма соответствует усреднению по начальным поляризациям фотона и суммированию по конечным поляризациям. Приближение (13) мы будем называть первым борновским приближением (ФВА) по аналогии с рассеянием обычных частиц. Заметим, что это также матричный элемент второго порядка, который внешне выглядит как ФВА для рассеяния обычных частиц. В учебнике [20] можно найти переход к нерелятивистскому пределу в двух диаграммах Фейнмана, описывающих комптоновское рассеяние.

Дальнейшее упрощение формулы (12) зависит от того, что мы реально измеряем. Допустим, мы не измеряем импульс позитрона, что достаточно трудно. Тогда после интегрирования (12) по  $d^3 p_2$  получаем

$$d^3\sigma = \frac{(2\pi)^2 \alpha}{\omega\omega_1} \sum_{\mathbf{e}, \mathbf{e}_1} |M|^2 (2\pi) \times \delta(\omega + \varepsilon_0 - \omega_1 - p_1^2/2 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1)^2/2) \times \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3}. \quad (14)$$

Фазовый объем фотона можно преобразовать следующим образом  $d^3k_1 = \omega_1^2 d\omega_1 d\Omega_1 / c^3$  с последующим интегрированием по  $\omega_1$ . При этом мы предполагаем, что начальная энергия фотона не более 5 кэВ, т.е.  $k \sim 1$ , что дает некоторое упрощение результатов интегрирования. Окончательно получим

$$\frac{d^3\sigma}{dE_e d\Omega_e d\Omega_1} = \frac{\alpha^4}{(2\pi)^3} p_1 \frac{\omega_1}{\omega} \sum_{e, e_1} |M|^2. \quad (15)$$

Обозначим

$$\tau = \frac{\omega_1}{\omega} = \left( 1 - \frac{p_1^2/2 - \varepsilon_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{p}_1)^2/2}{\omega} \right).$$

При выбранной энергии фотона второй член в скобке играет роль поправки. В этих обозначениях

$$Q = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - 2\tau \cos \theta + \tau^2}$$

Итак, мы вычисляем

$$FDCS = \frac{\alpha^4}{(2\pi)^3} p_1 \tau \sum_{e, e_1} |M|^2, \quad (17)$$

где

$$\sum_{e, e_1} |M|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \times \left| -16\pi \sqrt{\frac{Z^5}{\pi}} e^{-\pi\zeta/2} \Gamma(1 + i\zeta) \frac{Q}{2} [(Q^2/4 - (|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2| + iZ)^2)^{-1+i\zeta} \times \left[ \frac{[Q/2 - (|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2| + iZ) \cos \gamma]}{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q})^2 + Z^2]^{2+i\zeta}} + \frac{[Q/2 + (|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2| + iZ) \cos \gamma]}{[p_1^2 + Z^2]^{2+i\zeta}} \right] \right|^2, \quad (18)$$

При расчете сечения (17) возможно использование различных систем единиц. Сейчас сечение записано в атомных единицах. Для получения FDCS в  $\text{см}^2/\text{эВ}\cdot\text{Sr}^2$  надо умножить (17) на фактор  $1.03 \times 10^{-18}$ . Таким образом,  $\alpha^4 = 0.28 \times 10^{-8}$  а.е.  $\rightarrow 0.29 \times 10^{-26} \text{см}^2/\text{эВ}\cdot\text{Sr}^2 = 0.29 \times 10^{-2}$  барн/  $\text{эВ}\cdot\text{Sr}^2$ .

В (18) эффективный заряд позитрония  $Z = 1/2$ ,  $\mathbf{p}_\rho = \mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2$ , а также,

$$\cos \gamma = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_\rho) / Q p_\rho = \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q}) - Q^2/2}{Q \sqrt{p_1^2 - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{Q}) + Q^2/4}},$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_1) = k p_1 [\cos \varphi_1 - \tau \cos \chi]. \quad (19)$$

Здесь

$$\cos \chi = \cos \theta \cos \varphi_1 + \sin \theta \sin \varphi_1 \cos \Phi,$$

$\varphi_1$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}_1$ ,  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{p}_1$ ,  $\Phi$  — угол между плоскостями, в которых соответственно лежат векторы  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$  и  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1)$ . Для удобства основные углы представлены на рис. 1. Кулоновское число  $\zeta = -Z/p_\rho = -1/|2\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}|$ .

и  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ .

Заметим, что

$$\sum_{e, e_1} |M|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \times \left| \langle \phi^- (\mathbf{p}_\rho) | e^{i\mathbf{Q} \cdot \rho/2} + e^{-i\mathbf{Q} \cdot \rho/2} | \phi_0 \rangle \right|^2, \quad (16)$$

и после вычисления матричного элемента в нем надо положить  $\mathbf{p}_\rho = 1/2[\mathbf{p}_1 - (\mathbf{Q} - \mathbf{p}_1)] = \mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2$ , что следует из закона сохранения импульса.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Справедливости ради следует отметить, что аналогичные формулы ранее были приведены в работе [19], что естественно при одинаковых теоретических предпосылках. Однако в приведенной работе упор делается на вычисление сечений, дифференциальных по фазовому объему фотона, а мы исследуем распределение вылетевшего электрона по энергиям и углам.

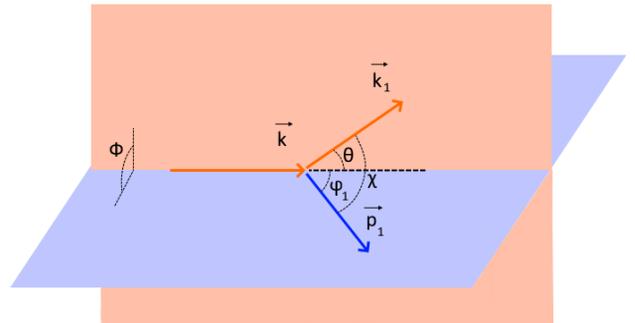


Рис. 1. Схема основных углов

Для справки приведем аналогичные выражения для водорода из работы [6]:

$$\begin{aligned}
 FDCS_H &= \frac{\alpha^4}{(2\pi)^3} p_1 \tau \sum_{e, e_1} |M_H|^2, \\
 \sum_{e, e_1} |M_H|^2 &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \times \\
 &\times \left| -16\pi \sqrt{\frac{Z^5}{\pi}} e^{-\pi\zeta/2} \Gamma(1 + i\zeta) Q [Q^2 - (p_1 + iZ)^2]^{-1+i\zeta} \left[ \frac{Q - (p_1 + iZ) \cos \chi}{[(\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q})^2 + Z^2]^{2+i\zeta}} \right] \right|^2.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь в случае водорода

$$\zeta = -Z/p_1, \quad \tau = 1 - \frac{p_1^2/2 - \varepsilon_0}{\omega}, \quad Z = 1.$$

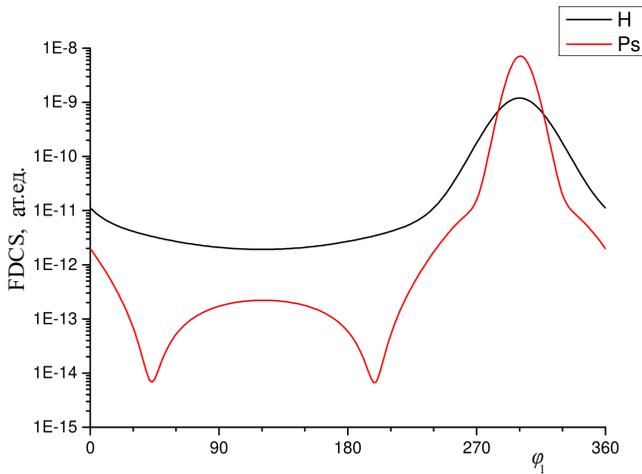


Рис. 2. FDCS (а.е.д.) как функция угла рассеяния электрона  $\varphi_1$  в случае ионизации атома водорода H и позитрония Ps.  $\omega = 5$  кэВ,  $E_e = 27.2$  эВ,  $\theta = \pi/3$ ,  $\Phi = 0$ . Зависимость от  $\tau$  слабая, поэтому в дальнейшем мы положили  $\tau = 1$ .  $\varphi_1^{max} = 300^\circ$  [21]

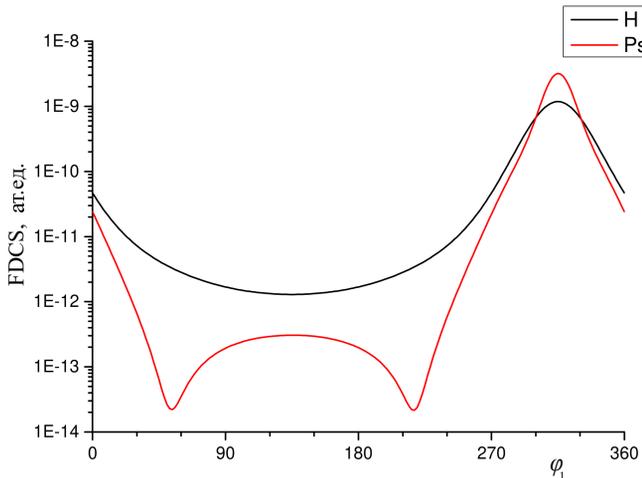


Рис. 3. То же, что на рис.2, но  $\theta = \pi/2$ .  $\varphi_1^{max} = 315^\circ$  [21]

Проанализируем рис. 2–4, на которых изображены полные дифференциальные сечения комптоновской ионизации атома водорода и позитрония.

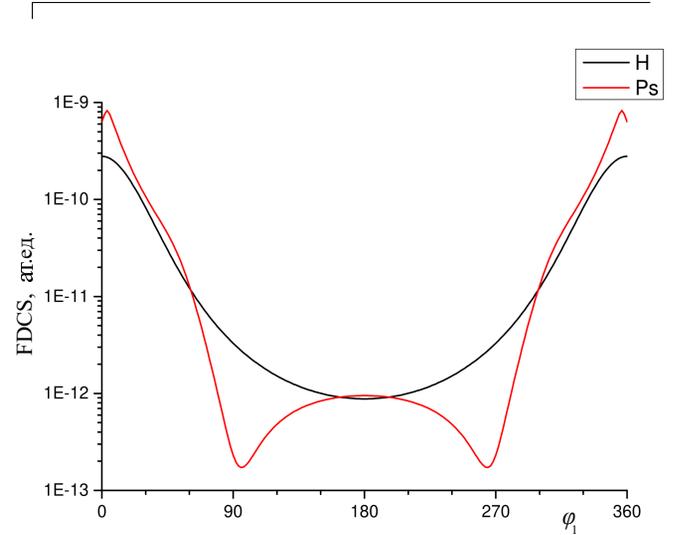


Рис. 4. То же, что на рис.2, но  $\theta = \pi$ ,  $\varphi_1^{max} = 0^\circ (360^\circ)$  [21]

Прежде всего мы видим доминирующие пики при угле между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{Q}$ , равном нулю. В расчетах мы положили  $\Phi = 0$ , и пик появляется при условии  $\cos \varphi_1 - \cos(\theta - \varphi_1) \approx 2 \sin(\theta/2)$ . В теории рассеяния частиц этот пик называется бинарным и соответствует минимуму величины  $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}|$ . Этот пик отражает механизм, когда весь переданный импульс передается в данном случае электрону, а позитрон остается «наблюдателем». Достаточно плоский второй пик у кривой Ps называется в теории рассеяния частиц пиком отдачи. В этом случае величина  $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}|$  достигает максимума, и поведение сечения определяется в основном вторым слагаемым в (18), чей знаменатель не зависит от угла. В этой области позитрон поглощает  $\gamma$ -квант, а электрон его излучает в ходе развала. Передача энергии от позитрона к электрону происходит в силу кулоновского взаимодействия частиц в позитронии. Такой процесс возможен, но маловероятен при большой передаче энергии, что и отражается в значительной разнице величин этих пиков. Кроме того, описанный процесс вторичен, и электрон вылетает из позитрония изотропно, что и отражено в «плоском» характере обратного пика. Таким образом, рис. 2–4 отражают основные механизмы комптоновского развала позитрония. Интересно, что при достаточно большой энергии фотона 5 кэВ обратный пик у водорода не только отсутствует, но и превращается в минимум в том же месте, где кривая Ps

имеет пик отдачи. Впрочем, структурные отличия кривых видны лишь в логарифмической шкале.

Также следует отметить, что величина бинарного пика кривой Ps слабо уменьшается, а пика отдачи — слабо растет с ростом переданного импульса  $Q$ . Это обусловлено ростом величины  $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}|$  при фиксированной энергии электрона.

#### 4. СИСТЕМА КУЛОНОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ

Рассмотрим теперь поведение сечения при резонансе, когда электрон и позитрон летят параллельно с одинаковыми скоростями. Это происходит, когда кулоновское число  $\zeta \rightarrow \infty$ , или  $\mu = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{Q}/2| \rightarrow 0$ . Это возможно, когда  $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{Q}$ , т.е. в области бинарного пика, и при  $p_1/k = \sin(\theta/2) < 1$ , если без ущерба для общности положить  $\tau = 1$ . Из формулы (18) при этом следует

$$\sum_{e, e_1} |M|^2 \approx \frac{1}{\mu} (1 + \cos^2 \theta) \frac{32\pi^2 Z^5 Q^4}{(Q^2/4 + Z^2)^6} \times \exp\left(-\frac{2Z}{Q^2/4 + Z^2}\right). \quad (21)$$

Как видно из (21), в полном дифференциальном сечении при данных кинематических условиях возникает полюс, что характерно для бесконечно узких динамических резонансов. Однако этот полюс не страшен при интегрировании по  $d^3p_1$ , поскольку мы делаем замену переменных и компенсируем этот полюс фазовым объемом интегрирования. Однако допустим, что нам надо проинтегрировать FDCS по углу рассеяния фотона, например посчитать

$$DDCS_e = \frac{d^2\sigma}{dE_e d\varphi_1} = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\Phi FDCS. \quad (22)$$

Это двукратное сечение описывает угловое и энергетическое распределение электрона при любых направлениях рассеяния фотона. Зададимся вопросом, будет ли сходиться этот интеграл? Ответ на этот вопрос положительный, и доказательство приведено в работе [21].

На рис. 5 изображен 3D график зависимости FDCS от энергии электрона и угла рассеяния фотона в области бинарного пика, где видна линия резонансов. Расчеты проводились при сглаживании особенности  $\mu \rightarrow \sqrt{\mu^2 + \varepsilon^2}$ ,  $\varepsilon = 0.01$ .

Обсудим рассмотренный выше эффект. В принципе, аналогичная ситуация возникает при ионизации фотоном атома водорода, когда конечное состояние описывается кулоновской волной. Из-за разницы масс протона и электрона особенность в FDCS возникает при энергии электрона, стремящейся к нулю. Это как раз энергетическая граница между континуумом и спектром связанных кулоновских состояний, т.н. «болото Келдыша». При этом размер системы стремится к бесконечности.

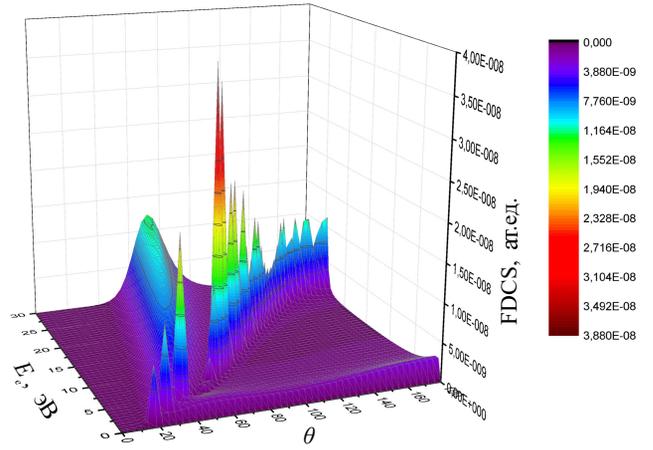


Рис. 5. FDCS как функция угла рассеяния фотона  $\theta$  и энергии электрона  $E_e$  при условии  $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{Q}$ . Величина  $\mu$  сглажена:  $\mu \rightarrow \sqrt{\mu^2 + \varepsilon^2}$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Хорошо видна линия резонансов  $\mu \sim 0$  [21]

Формально в этом случае мы сталкиваемся с бесконечным количеством порогов реакций возбуждения. Матричный элемент для ионизации водорода  $M_H$  в (20) имеет сингулярность при  $p_1 \rightarrow 0$ . Однако в случае водорода этот полюс компенсируется сомножителем  $p_1$  в сечении (20), и сечение стремится к константе при  $p_1 \rightarrow 0$ .

В позитронии ситуация такая же, только теперь особенность зависит от углов, и условие ее возникновения оказывается очень простым:  $E_e = (\omega^2/2c^2) \sin^2(\theta/2)$ . При этом электрон и позитрон движутся параллельно с одинаковыми скоростями, и расстояние между ними может быть любым, в т.ч. и достаточно большим. Такое состояние может существовать сколь угодно долго (в рамках нерелятивистской физики), пока не будет излучен второй фотон (даже с энергией, близкой к нулю), и электрон-позитронная пара снова не свалится в связанное состояние. Таким образом, возникает резонанс.

#### А. Двойное дифференциальное сечение

Рассмотрим теперь двукратные дифференциальные сечения по фазовому объему электрона (23), измерения которых проще. 3D-график этого сечения для позитронии представлена на рис. 6. Здесь энергия фотона  $\omega = 3$  кэВ. Прежде всего бросается в глаза, что сечение заметно отличается от нуля при малых углах вылета электрона (передний конус рассеяния фотона) и его небольших энергиях. Сечение уходит в ноль при  $E_e \rightarrow 0$ , в отличие от водорода, поскольку здесь нет множителя, компенсирующего полюс, о чем мы писали выше. Этим обусловлен острый пик при малых энергиях. Далее при малых углах выделяются еще 2 пика различной высоты и ширины. Рассмотрим эти пики подробнее на рис. 7–9, где срез сечения представлен при угле  $\varphi_1 = 0$ . Там же показан аналогичный срез сечения

для атома водорода.

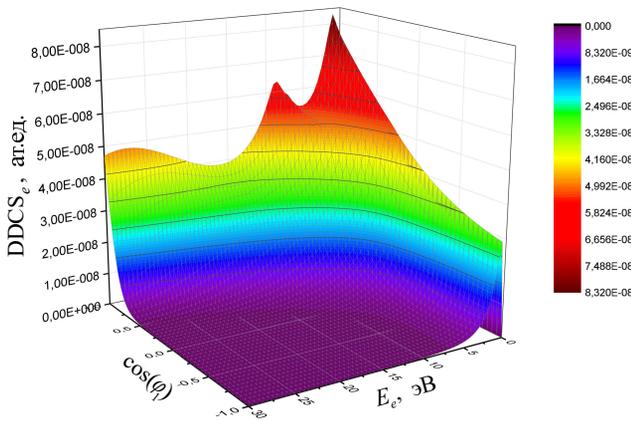


Рис. 6.  $DDCS_e$  (23) в зависимости от угла вылета электрона  $\varphi_1$  и его энергии  $E_e$ . Энергия фотона  $\omega = 3$  кэВ [21]

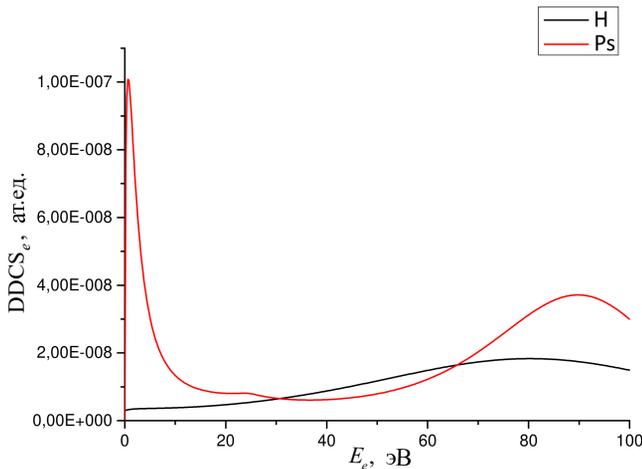


Рис. 7.  $DDCS_e$  (23), но угол  $\varphi_1 = 0$ , фиксирован. Энергия фотона  $\omega = 5$  кэВ. Красная кривая — позитроний, черная — водород [21]

Обратим внимание на средний пик, который только намечается при энергии фотона  $\omega = 5$  кэВ, но заметно подрастает при уменьшении энергии фотона. Нетрудно убедиться, что этот пик возникает при  $p_1 = k$  или  $E_e = 0.5(\omega/c)^2$ . С большой вероятностью он связан с резонансами, обсуждавшимися в предыдущем разделе. Ничего подобного у водорода нет.

Обсудим данную особенность в сечении несколько подробнее. В теории захвата электрона из мишени и однократной ионизации мишени ионом при относительно небольших скоростях иона и электрона наблюдаются особенности в интегральных сечениях, когда скорости электрона и иона совпадают. В теории захвата возникает пик, связанный с эффектом Томаса [22], в теории ионизации это так называемое «плечо» в однократном сечении [23]. Оно неплохо наблюдается при энергиях протона 75 кэВ и 100 кэВ. В нашем случае это совпадение скоро-

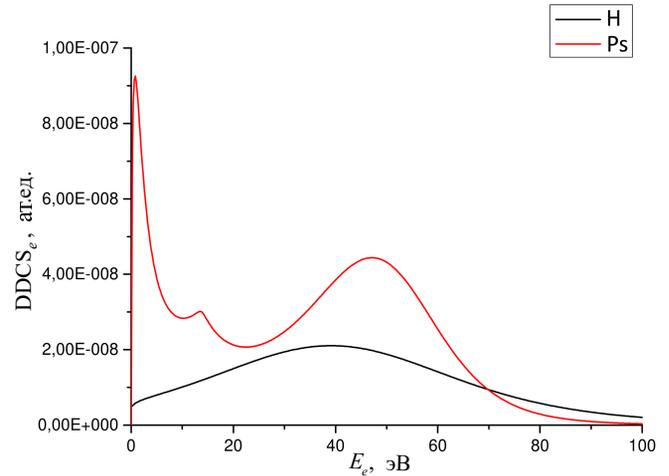


Рис. 8. То же, что на рис.6, кроме энергии фотона  $\omega = 3.75$  кэВ [21]

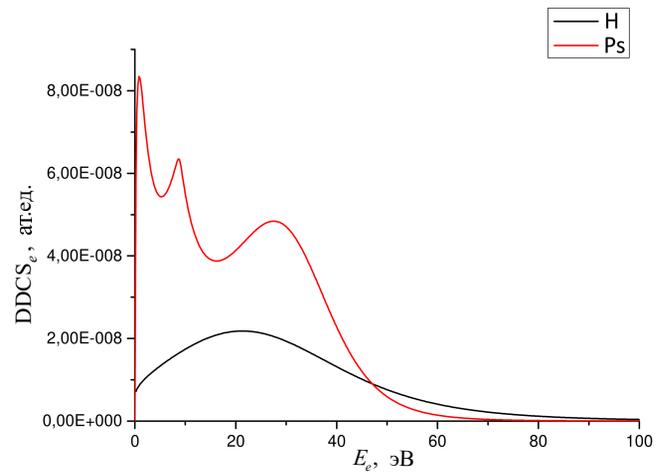


Рис. 9. То же, что на рис.6, кроме энергии фотона  $\omega = 3$  кэВ [21]

стей электрона и позитрона после развала позитрония фотоном. Так что предположение о природе обсуждаемого пика вполне приемлемо.

Широкий пик при ббльших энергиях имеется и у позитрония, и у водорода. Положение этих пиков также близко друг от друга. Ранее при исследовании водорода было установлено, что  $FDCS_H$  имеет пик, когда электрон принимает на себя весь переданный импульс, что соответствует эффекту Комптона на свободном электроне. Похоже, что даже после интегрирования по углу рассеянного фотона эта тенденция сохраняется. Действительно, пик виден наиболее четко при рассеянии фотона в задний конус, что ведет к рассеянию электрона вперед. Интегрирование по всем углам несколько сглаживает пик, но не отменяет его физику. Присутствие легкого позитрона в позитронии несколько меняет положение и величину этого пика, но физический эффект остается тем же.

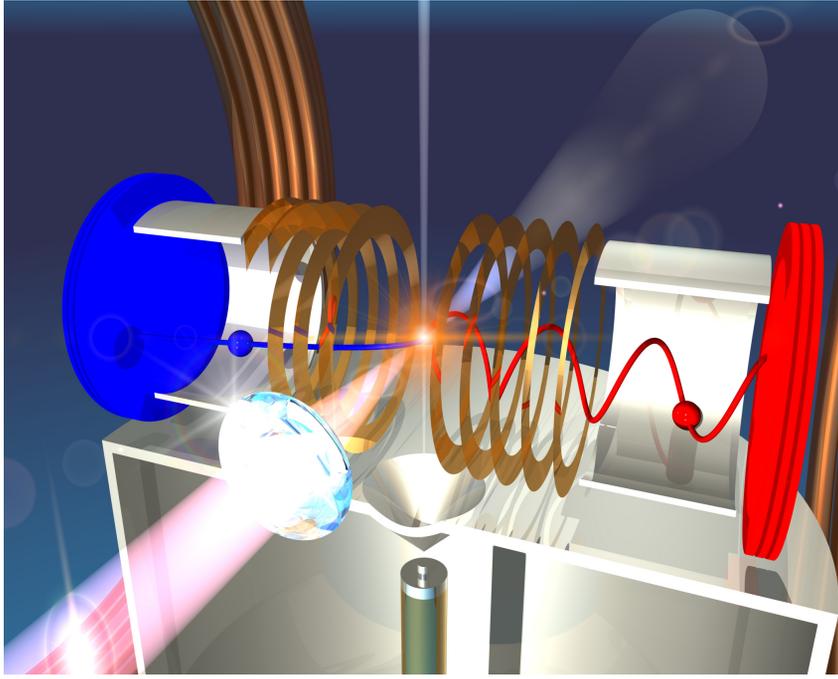


Рис. 10. Схема детектора COLTRIMS и движения в нем электрона (красная линия) и иона (синяя линия) [24]

## 5. ДВИЖЕНИЕ РЕЗОНИРУЮЩЕГО ПОЗИТРОНИЯ В УСТАНОВКЕ COLTRIMS

В силу специфики кинематики движения резонирующей пары интересен вопрос регистрации ее фрагментов. Для этого мы обратились к решению системы классических уравнений движения частиц в COLTRIMS (рис. 10, заимствованный с сайта [24]), где вдоль оси детектора (ось  $z$ ) направлены постоянные электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{H}$  поля, вдоль оси  $x$  направлен пучок фотонов, и вдоль оси  $y$  движутся атомы мишени.

Система классических уравнений для движения фрагментов позитрония во внешних полях выглядит следующим образом:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = -e \left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{H}] \right) + \nabla_1 \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \text{electron,} \quad (23a)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = e \left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{r}}_2, \mathbf{H}] \right) + \nabla_2 \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \text{positron,} \quad (23b)$$

которую удобно решать, переходя к координатам (5). Приведенная масса позитрония  $\mu = m/2$ , начальное расстояние между фрагментами резонирующей пары после распада  $\rho_0$  и их относительная скорость равны нулю. При этом скорость каждой частицы такая же, как и скорость их центра масс, равна  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 = 1/2\mathbf{Q}$ , т.е. имеет произвольное направление. Таким образом, начальные условия за-

дачи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1(0) = \dot{\mathbf{r}}_2(0) = \mathbf{V}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}(0) = 0; \\ \mathbf{R}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\rho}(0) = \boldsymbol{\rho}_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Система уравнений (23) в координатах системы центра масс пары дает

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= -\frac{e}{2mc} [\dot{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{H}], \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= -\frac{2e}{m} \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{2e^2}{m\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \frac{2e}{mc} [\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Первое уравнение легко интегрируется:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{V}_0 - \frac{e}{2mc} [\boldsymbol{\rho}, \mathbf{H}], \\ \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_0 + \frac{e}{2mc} [\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{H}] = \text{const.} \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя его решение во второе уравнение и определяя циклотронную частоту в магнитном поле как  $\Omega = eH/mc$ , получаем в итоге уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= -\frac{2e}{m} \boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{2e^2}{m\rho^3} \boldsymbol{\rho} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho} + \\ &+ \left( \frac{e}{mc} \right)^2 \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{H}) - \frac{2e}{mc} [\mathbf{V}_0, \mathbf{H}], \end{aligned} \quad (27)$$

которое в дальнейшем мы решаем численно в цилиндрических координатах  $\boldsymbol{\rho} = (\zeta \cos \phi, \zeta \sin \phi, z)$  в атомных единицах. Из уравнения (27) после умножения его на  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  следует интеграл движения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^2 + \frac{2e}{m} (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \frac{2e^2}{m} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \Omega^2 \rho^2 - \\ - \frac{1}{2} \Omega^2 (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}_H)^2 + 2\Omega (\boldsymbol{\rho} \cdot [\mathbf{V}_0 \mathbf{n}_H]) = \text{const.} \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения движения (27) должны быть дополнены начальными условиями, согласующимися с квантовомеханическим описанием позитрония. Конечное состояние системы электрона и позитрона описывается у нас волновой функцией непрерывного спектра, у которой нет наиболее вероятного значения относительной координаты. Допустимые начальные значения относительной координаты можно оценить с помощью уравнения (27) для компоненты  $z$ :

$$\ddot{z} = 2\mathcal{E} - \frac{2z}{(\zeta^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

Для оценки мы можем положить  $\zeta_0 = 0$ , тогда получим неравенство  $\mathcal{E} > 1/z_0^2$ . В детекторе COLTRIMS обычно используются следующие (слабые) интенсивности полей:  $\mathcal{E} = 18.3 \text{ В/см} = 3.57 \times 10^{-9} \text{ а.у.}$ ,  $H = 9.1 \text{ Гс} = 5.31 \times 10^{-7} \text{ а.у.}$ , откуда следует, что  $z_0$  и, соответственно,  $\rho_0$  должны быть очень большой величиной. Таким образом, если мы ищем пару с относительным нулевым импульсом, относительное расстояние  $\rho_0$  между электроном и позитроном совершенно не определено и должно быть очень большим, по нашим оценкам десятки тысяч атомных единиц.

Эти же соображения относятся к единственному резонансу в водороде с кинетической энергией электрона, равной нулю. Эффект этого резонанса вполне проявляется на эксперименте в ненулевом дифференциальном сечении при импульсе электрона, стремящемся к нулю, если конечное состояние этого электрона описывается кулоновской волной. Электрон с нулевым конечным импульсом, находящийся первоначально внутри атома, вдруг оказывается за десятки тысяч атомных единиц от него, чтобы попасть в детектор. Это замеча-

тельное экспериментальное наблюдение принципа неопределенности — основополагающего принципа квантовой механики.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели комптоновский развал позитрония в нерелятивистском приближении при энергии фотона в несколько килоэлектронвольт. Отмечен ряд особенностей в дифференциальных сечениях, отличающих ионизацию (развал) позитрония от ионизации атома водорода. В частности, вызывают интерес резонансы, которые возникают при параллельном после развала движении электрона и позитрона с равными скоростями. У водорода наблюдается только одно такое резонансное состояние в полном дифференциальном сечении при энергии испущенного электрона, равной нулю. Это связано с использованием кулоновской функции в качестве конечного состояния. У позитрония эта точка разворачивается в целую линию резонансов при энергиях электрона  $E_e = 0.5(\omega/c)^2 \sin^2(\theta/2)$ . При обратном рассеянии фотона энергия электрона (и позитрона), которая требуется для появления резонансов, достигает максимального значения, после чего параллельное движение электрона и позитрона уже невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075-15-2021-1353. Рисунки 2–9 взяты из работы [21] с разрешения Springer Nature (лицензионное соглашение № 5405340826824 от 10.10.2022). Ю. Попов и И. Волобуев благодарны экспериментальной группе под руководством проф. Р. Дорнера (ун-т Гёте, Франкфурт-на-Майне) за многолетнюю совместную работу по комптоновской тематике.

- [1] Compton A.H. // *Phys. Rev.* **21**. 483. (1923).
- [2] DuMond J.W.M. // *Phys. Rev.* **33**. 643. (1929).
- [3] Bothe W., Geiger H. // *Z. Phys.* **32** 639. (1925).
- [4] Ulrich J. et al. // *ReP. Prog. Phys.* **66**. 1463. (2003).
- [5] Kircher M. et al. // *Nature Phys.* **16**. 756. (2020).
- [6] Houamer S., Chuluunbaatar O., Volobuev I.P., Popov Yu.V. // *Eur. Phys. Journ. D.* **74**. 81. (2020).
- [7] Chuluunbaatar O., Houamer S., Popov Yu.V., Volobuev I.P., Kircher M., Doerner R. // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. (JQSRT)* **272**. 107820. (2021).
- [8] Chuluunbaatar O., Houamer S., Popov Yu.V., Volobuev I.P., Kircher M., Doerner R. // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. (JQSRT)*. **278**. 108020. (2022).
- [9] Chen-Kai Qiao, Jian-Wei Wei, Lin Chen. // *Crystals*. **11**. 525. (2021).
- [10] Hubbell J.H., Brown R.T., Cromer D.T., Howenon R.J. // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* **4**. 471. (1975).
- [11] Bergstrom M.Jr., Surić T., Pisk K., Pratt R.H. // *Phys. Rev. A.* **48**. 1134. (1993).
- [12] Ken-ichi Hino, Bergstrom M. Jr., Macek J H. // *Phys. Rev. Lett.* **72**. 1620. (1994).
- [13] Gavrila M., Costescu A. // *Phys. Rev. A.* **2**. 1752. (1970).
- [14] Gavrila M. // *Phys. Rev. A.* **6**. 1348. (1972).
- [15] Gavrila M. // *Phys. Rev. A.* **6**. 1360. (1972).
- [16] Florescu V., Gavrila M. // *Phys. Rev. A.* **14**. 211. (1976).
- [17] Kaliman Z., Surić T., Pisk K., Pratt R.H. // *Phys. Rev. A.* **57**. 2683. (1998).
- [18] Pisk K., Kaliman Z., Erceg N. // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49**. 235004. (2016).
- [19] Kaliman Z., Pisk K. // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**. 235002. (2013).
- [20] Ахмезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
- [21] Stepantsov I.S., Volobuev I.P., Popov Yu.V. // *Eur. Phys. Journ. D.* **76**. 30. (2022).
- [22] Thomas L.H. // *Proc. Roy. Soc. London. ser. B.* **114**. 561. (1927). <https://www.jstor.org/stable/94828>
- [23] Schulz M. et al. // *Phys. Rev. A.* **54**. 2951. (1996).
- [24] [https://www.atom.uni-frankfurt.de/research/10\\_COLTRIMS](https://www.atom.uni-frankfurt.de/research/10_COLTRIMS)

## Compton Disintegration of Positronium

I. S. Stepanov<sup>1,a</sup>, I. P. Volobuev<sup>2</sup>, Yu. V. Popov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*

<sup>2</sup>*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

<sup>3</sup>*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>[i.stepantsov33@gmail.com](mailto:i.stepantsov33@gmail.com)*

Compton disintegration of positronium in comparison with Compton ionization of the hydrogen atom is analyzed. An initial photon energy of several kiloelectronvolts allows us to use the nonrelativistic approach and the  $A^2$  approximation. Interesting features are observed in the behavior of various differential cross-sections. Specifically, conditions under which an electron and a positron move parallel to each other with equal velocities have been found. This leads to a number of specific Coulomb resonances.

PACS: 32.80.-t.

*Keywords:* Compton ionization, COLTRIMS detector, positronium, Coulomb resonances.

*Received 27 July 2022.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 1. Pp. 74–84.

### Сведения об авторах

1. Степанов Иван Сергеевич — аспирант; e-mail: [i.stepantsov33@gmail.com](mailto:i.stepantsov33@gmail.com).
2. Волобуев Игорь Павлович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел. (499) 739-00-84, e-mail: [volobuev@theory.sinp.msu.ru](mailto:volobuev@theory.sinp.msu.ru).
3. Попов Юрий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел. (495) 931-79-68, e-mail: [popov@srd.sinp.msu.ru](mailto:popov@srd.sinp.msu.ru).