ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Некоторые свойства статистического распределения Шарма–Миттала

Т. Н. Бакиев,[1,*] Д. В. Накашидзе,[1,*] А. М. Савченко,[1,†] К. М. Семенов[1,‡]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 24.04.2023; после доработки 19.05.2023; принята к публикации 23.05.2023)

Статистическая теория, построенная на основе двухпараметрического функционала Шарма–Миттала, является обобщением статистик Гиббса, Реньи и Тсаллиса. В настоящей работе рассматривается формализм статистической механики, основанной на функционале энтропии Шарма–Миттала, доказывается теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы для классических статистических систем. Получено обобщённое распределение Максвелла для соответствующей статистики и рассчитаны характеристики статистических систем, описываемых распределением: средний модуль скорости, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорости частиц газа. Также получена обобщённая формула Сакура–Тетроде.

PACS: 05.20.-y, 05.70.-a, 05.90.+m. УДК: 536.758.

Ключевые слова: энтропия Шарма–Миттала, теорема о равнораспределении, степенное распределение, распределение Максвелла, формула Сакура–Тетроде.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2340102

ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1, 2] широко используемая в теории информации и равновесной статистической физике энтропия Больцмана–Гиббса–Шеннона [3] подвергается критике в связи с ограничениями применимости и неочевидностью аксиоматики. В последнее время развитие получают параметрические энтропии, обобщающие классический подход [4, 5].

Для описания сложных аддитивных систем (многофрактальных структур [6], квантовой запутанности [7], землетрясений [8]) используется распределение, основанное на функционале энтропии Альфреда Реньи [9, 10], являющимся обобщением подхода Гиббса. Явный вид распределения Реньи зависит от значения параметра $q > 0$, определяемого экспериментальным путём. В работе [11] доказывается теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы для статистики Реньи.

Альтернативным обобщением статистики классического подхода Гиббса является его расширение на неаддитивные системы, которое предложил Константино Тсаллис [12, 13]. Энтропия Тсаллиса описывает поведение чёрных дыр [14], скорость вращения звёзд [15], сегментацию медицинских изображений [16]. Явный вид распределения также зависит от значения параметра q, на основе которого вводится понятие q-деформированных функций Тсаллиса.

Так как подходы Реньи и Тсаллиса являются двумя разными обобщениями одного статистического формализма, возникает потребность в их объединении. В качестве решения этой задачи предлагается формализм Шарма–Миттала [17], который, кроме используемого в формализмах Реньи и Тсаллиса параметра q, имеет также параметр r, определяющий переход между двумя рассматриваемыми обобщениями [18]. Энтропия Шарма–Миттала находит применение в методах кластеризации текстовых документов [19], моделях тёмной энергии [20] и статистике многообразия инженерных исследований [21]. Альтернативой является формализм сверх-экстенсивной энтропии [18].

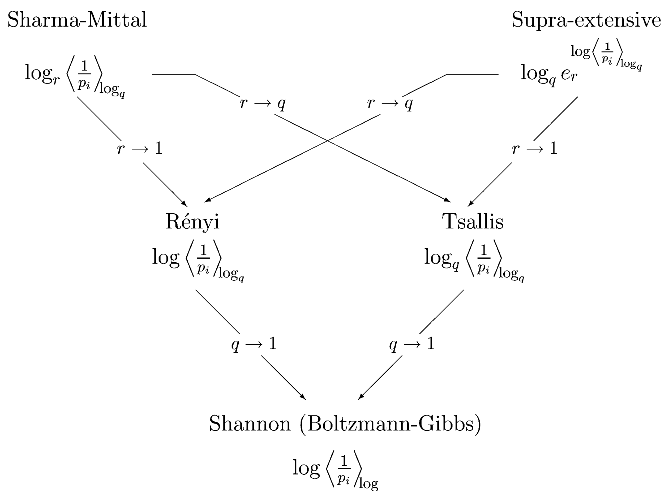


Рис. 1. Связь подходов Гиббса, Реньи, Тсаллиса, Шарма–Миттала и сверх-экстенсивной энтропии [18]

В настоящей работе исследуется формализм Шарма–Миттала как обобщение подходов Реньи и Тсаллиса с точки зрения равновесной статистической физики. Мы проверяем справедли-

* E-mail:
† E-mail: a.m.savchenko@gmail.com
‡ E-mail: semenovkm@protonmail.com

вость теоремы о равнораспределении и получаем распределение по скоростям частиц идеального газа (обобщение распределения Максвелла). Также была получена обобщённая формула Сакура–Тетроде для идеального газа в формализме Шарма–Миттала. Особенностью настоящей работы является получение результатов без использования q-деформированных функций, усложняющих понимание физического смысла.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ШАРМА–МИТТАЛА

Рассмотрим статистическую систему с реализацией W микросостояний с вероятностями ρ_i. Функционал двухпараметрической энтропии Шарма–Миттала такой системы определяется следующим образом [17]:

$$S^{(SM)}(\rho) = \frac{1}{1-r}\left[\left(\sum_{i=1}^{W}\rho_i^q\right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right]. \quad (1)$$

Используя подход Джейнса [22] через максимизацию фукнционала $L_T(\rho)$ с учётом условия нормировки $\sum_{i=1}^{W}\rho_i = 1$ и определения средней энергии $U = \sum_{i=1}^{W}H_i\rho_i$

$$L_T(\rho) = \frac{1}{1-q}\left[\left(\sum_{i=1}^{W}\rho_i^q\right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right] - \\ - \alpha_L\sum_{i=1}^{W}\rho_i - \beta_L\sum_{i=1}^{W}H_i\rho_i, \quad (2)$$

получаем распределение Шарма–Миттала:

$$\rho_i^{(SM)} = \frac{1}{Z^{(SM)}}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (3)$$

где $Z^{(SM)}$ — обобщённая статистическая сумма:

$$Z^{(SM)} = \sum_{i=1}^{W}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (4)$$

$\beta^{(SM)}$ зависит от множителя Лагранжа при условии на определение средней энергии системы β_L, а также связан с параметрами распределения r и q:

$$\beta^{(SM)} = \beta^{(SM)}(r,q) = \left(\sum_{i=1}^{W}\rho_i^q\right)^{\frac{r-1}{1-q}}\beta_L. \quad (5)$$

Заметим, что частным случаем (3) при параметрах $r = 1$ и $q \neq 1$ является распределение Реньи [11]:

$$Z^{(SM)}\Big|_{r=1} = \sum_{i=1}^{W}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(R)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}} = Z^{(R)}, \quad (6)$$

$$\rho_i^{(SM)}\Big|_{r=1} = \frac{1}{Z^{(R)}}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(R)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}} = \rho_i^{(R)}, \quad (7)$$

где $\beta^{(R)}$ — множитель Лагранжа при условии на определение средней энергии системы в формализме Реньи, равный обратной температуре системы [11].

При $r = q$ же получим распределение Тсаллиса [23]:

$$Z^{(SM)}\Big|_{r=q} = \sum_{i=1}^{W}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(T)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}} = Z^{(T)}, \quad (8)$$

$$\rho_i^{(SM)}\Big|_{r=q} = \frac{1}{Z^{(T)}}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(T)}(U - H_i)\right]^{\frac{1}{q-1}} = \rho_i^{(T)}. \quad (9)$$

В случае классических систем с непрерывным спектром энергии распределение Шарма–Миттала представимо в виде функции плотности вероятности (по аналогии с [11] и [23]):

$$\rho^{(SM)} = \frac{1}{Z^{(SM)}}\left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(U - H(r,p))\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (10)$$

$$Z^{(SM)} = \int\limits_X \left[1 - \frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(U - H(r,p))\right]^{\frac{1}{q-1}} d\Gamma, \quad (11)$$

где X — объём в фазовом пространстве, занимаемый системой, $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N)$ — координаты частиц, $p = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_N)$ — импульсы частиц, N — число частиц, $d\Gamma$ — элемент интегрирования по фазовому пространству:

$$d\Gamma = \frac{1}{N!}\prod_{i=1}^{N}\gamma_i\frac{d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (12)$$

γ_i учитывает квантовые степени свободы частицы с номером i и $N!$ — количество перестановок тождественных частиц.

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМАЛИЗМА ШАРМА–МИТТАЛА

Так как формализм Шарма–Миттала является обобщением формализма Тсаллиса, q-формула, полезная для термодинамического описания энтропии, также справедлива. По аналогии с [23] получим её через определение средней энергии U, с одной стороны, и равенство, справедливое по причине нормировки распределения, с другой:

$$U = \sum_{i=1}^{W}\rho_i H_i, \qquad U = \sum_{i=1}^{W}\rho_i U. \quad (13)$$

Эти два соотношения приводят к равенству

$$\sum_{i=1}^{W}(H_i - U)\rho_i = 0. \quad (14)$$

Домножив данное выражение на $\beta^{(SM)}(1-q)/q$ (полагая его отличным от 0) и прибавив $Z^{(SM)}$, записанную в явном виде, к обеим частям равенства, получим q-формулу:

$$\sum_{i=1}^{W}\left(1+\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(H_i-U)\right)^{\frac{1}{q-1}}= \\ =\sum_{i=1}^{W}\left(1+\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}(H_i-U)\right)^{\frac{q}{q-1}}. \quad (15)$$

Используя (15), выразим энтропию Шарма–Миттала через обобщённую статистическую сумму:

$$S^{(SM)}(\rho)=\frac{1}{1-r}\left({Z^{(SM)}}^{1-r}-1\right). \quad (16)$$

Рассмотрим физическую систему, состояние которой определяется набором параметров (U,x,N), где $x=(V,a)$, U — средняя энергия, N — число частиц, V — объём системы, a — воздействующие на систему внешние поля. Тогда уровни энергии H_i зависят от параметров x и N. Из (4) следует, что $Z^{(SM)}=Z^{(SM)}(U,x,N)$, а значит, $S^{(SM)}=S^{(SM)}(U,x,N)$, согласно зависимости (16). Запишем полный дифференциал энтропии

$$dS^{(SM)}=\left(\frac{\partial S^{(SM)}}{\partial U}\right)_{x,N}dU+\left(\frac{\partial S^{(SM)}}{\partial x}\right)_{U,N}dx+ \\ +\left(\frac{\partial S^{(SM)}}{\partial N}\right)_{x,U}dN, \quad (17)$$

который после ряда преобразований принимает вид:

$$dS^{(SM)}={Z^{(SM)}}^{1-r}\beta^{(SM)}(dU+Xdx-\mu dN). \quad (18)$$

Учитывая первое начало термодинамики, мы приходим к выражению

$$dS^{(SM)}={Z^{(SM)}}^{1-r}\beta^{(SM)}\delta Q, \quad (19)$$

где δQ — количество теплоты, получаемое системой. Заметим, что согласно второму началу термодинамики, интегрирующий множитель в правой части уравнения (19), равен обратной температуре системы, поэтому

$$\beta^{(SM)}=\frac{{Z^{(SM)}}^{r-1}}{\theta}. \quad (20)$$

3. ТЕОРЕМА О РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ

Сформулируем и докажем теорему о равнораспределении энергии в формализме Шарма–Миттала для классической статистической системы с D-мерным фазовым пространством по аналогии с формализмом Реньи [11]. Запишем условие нормировки распределения с учётом (15):

$$1=\sum_i \rho_i^{(SM)}= \\ =\frac{1}{Z^{(SM)}}\sum_{i=1}^{W}\left(1-\frac{q-1}{q}\beta^{(SM)}(H_i-U)\right)^{\frac{q}{q-1}}. \quad (21)$$

Для удобства введём следующие обозначения:

$$\lambda=\frac{q-1}{q},\Delta H_i=H_i-U. \quad (22)$$

Тогда

$$\frac{1}{Z^{(SM)}}\sum_{i=1}^{W}\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H_i\right)^{\frac{1}{\lambda}}=1. \quad (23)$$

Перейдём от дискретного случая к непрерывному. Тогда суммирование по состояниям системы переходит в интегрирование по объёму фазового пространства X, а H_i — к функции $H(x_1,x_2,...,x_D)$:

$$\frac{1}{Z^{(SM)}}\int\limits_X\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H\right)^{\frac{1}{\lambda}}d\Gamma=1. \quad (24)$$

$d\Gamma$ — элемент интегрирования:

$$d\Gamma=\frac{1}{(D/2d)!}\frac{dx_1dx_2...dx_D}{(2\pi\hbar)^{D/2}}\prod_{i=1}^{(D/2d)}\gamma_i, \quad (25)$$

где γ_i учитывает квантовые степени свободы частицы с номером i, $(2\pi\hbar)^{D/2}$ — объём ячейки фазового пространства и $(D/2d)!$ — количество перестановок тождественных частиц.

Используя формулу интегрирования по частям по выделенной переменной x_k, получим

$$\frac{1}{Z^{(SM)}}\int\limits_{X_k}\left[\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H\right)^{\frac{1}{\lambda}}x_k\right]\Bigg|_{x_k=a}^{x_k=b}d\Gamma_k+ \\ +\frac{\beta^{(SM)}}{Z^{(SM)}}\int\limits_X x_k\frac{\partial\Delta H}{\partial x_k}\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}d\Gamma=1. \quad (26)$$

Рассмотрим первый интеграл. Множитель $\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H\right)$ взаимно-однозначно определяет нулевые значения вероятностей в распределении Шарма–Миттала:

$$\rho^{(SM)}(X_0)=0\Leftrightarrow\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H(X_0)\right)=0. \quad (27)$$

В соответствии с физическим смыслом плотности вероятности состояний на границе области возможных значений переменных фазового пространства данная функция должна равняться нулю, поэтому в случае конечных значений a и b первый интеграл равен нулю. При бесконечных по модулю a или b мы имеем дело с неопределенностью. Однако логично считать импульсы и координаты системы лабораторных размеров ограниченными величинами. Поэтому уже при конечных, но достаточно больших по модулю значениях a и b достигается область фазового пространства, вероятность нахождения системы в которой равна нулю. Итого

$$\frac{1}{Z^{(SM)}}\int\limits_{X_k}\left[\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H_i\right)^{\frac{1}{\lambda}}x_k\right]\Bigg|_{x_k=a}^{x_k=b}d\Gamma_k=0. \tag{28}$$

Тогда

$$\frac{1}{Z^{(SM)}}\int\limits_{X}x_k\frac{\partial\Delta H_i}{\partial x_k}\left(1-\lambda\beta^{(SM)}\Delta H_i\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}d\Gamma=\frac{1}{\beta^{(SM)}} \tag{29}$$

или (с учётом (20))

$$\left\langle x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}\right\rangle_{(SM)}=\frac{1}{\beta^{(SM)}}=\frac{\theta}{{Z^{(SM)}}^{r-1}}, \tag{30}$$

где $\langle\ldots\rangle_{(SM)}$ — усреднение по распределению Шарма–Миттала. Данное выражение является теоремой о равнораспределении в её обобщённом понимании:

Для классической статистической системы с D-мерным фазовым пространством $X=(x_1,x_2,\ldots,x_D)$ и гамильтонианом $H(X)$, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, для любого натурального $k\le D$ выполняется соотношение (30):

$$\left\langle x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}\right\rangle_{(SM)}=\frac{1}{\beta^{(SM)}}. \tag{31}$$

Для распределения Тсаллиса как частного случая распределения Шарма–Миттала, теорема о равнораспределении также справедлива:

$$\left\langle x_k\frac{\partial H}{\partial x_k}\right\rangle_{(T)}=\frac{1}{\beta^{(T)}}=\frac{\theta}{{Z^{(T)}}^{q-1}}. \tag{32}$$

4. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ СО СТЕПЕННЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Рассмотрим систему с гамильтонианом вида:

$$H=\sum_{n=1}^{N}C_nx_n^k, \tag{33}$$

где $C_n\in\mathbb{R},k>0,x_n\in[0,\infty)\,\forall n=\overline{1,N}$.

Статистический интеграл и средняя энергия имеют вид:

$$U=\frac{1}{Z^{(SM)}}\int\limits_0^\infty\frac{\sum_{n=1}^N C_nx_n^k dx_1dx_2\ldots dx_N}{\left(1+\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}\left(\sum_{n=1}^N C_nx_n^k-U\right)\right)^{\frac{1}{1-q}}}, \tag{34}$$

$$Z^{(SM)}=\int\limits_0^\infty\frac{dx_1dx_2\ldots dx_N}{\left(1+\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}\left(\sum_{n=1}^N C_nx_n^k-U\right)\right)^{\frac{1}{1-q}}}. \tag{35}$$

Следуя рассуждениям статьи [23] для обобщённого формализма Шарма–Миттала, мы получаем значения обобщённого статистического интеграла и средней энергии

$$Z^{(SM)}=\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{k}\right)^N\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{N}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}U\right)^{\frac{1}{1-q}-\frac{N}{k}}}\times$$
$$\times\prod_{n=1}^N\left(\frac{1}{\frac{1-q}{q}\beta^{(SM)}C_n}\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{36}$$

$$U=\frac{N}{k}\frac{1}{\beta^{(SM)}} \tag{37}$$

с ограничением на параметр q:

$$1-\frac{k}{k+N}<q<1. \tag{38}$$

Полученные результаты позволяют рассмотреть степенное распределение как частный случай распределения Шарма–Миттала, а также получить обобщённое распределение Максвелла для идеального газа.

5. ОБОБЩЕНИЕ СТЕПЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Используя (36) и (37), запишем распределение без явной зависимости от $\beta^{(SM)}$ для гамильтониана вида $H=Cx^k$:

$$\rho^{(SM)}=\frac{1}{Z^{(SM)}}\left[1-\frac{1-q}{kq}(1-C_ux^k)\right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{39}$$

$$Z^{(SM)}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\left(1-\frac{1-q}{kq}\right)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{1-q}}\times$$
$$\times\left(\frac{1-q}{kq}C_u\right)^{-\frac{1}{k}}, \tag{40}$$

где $C_u=\frac{C}{U}$.

Проанализируем поведение энтропии и распределения при нижнем пределе q (38):

$$q_{min}=\frac{1}{k+1}. \tag{41}$$

Отметим, что для гамильтониана вида $H=Cx^k$ нижний предел q соответствует максимальному значению энтропии, как наглядно продемонстрировано на рис. 2.

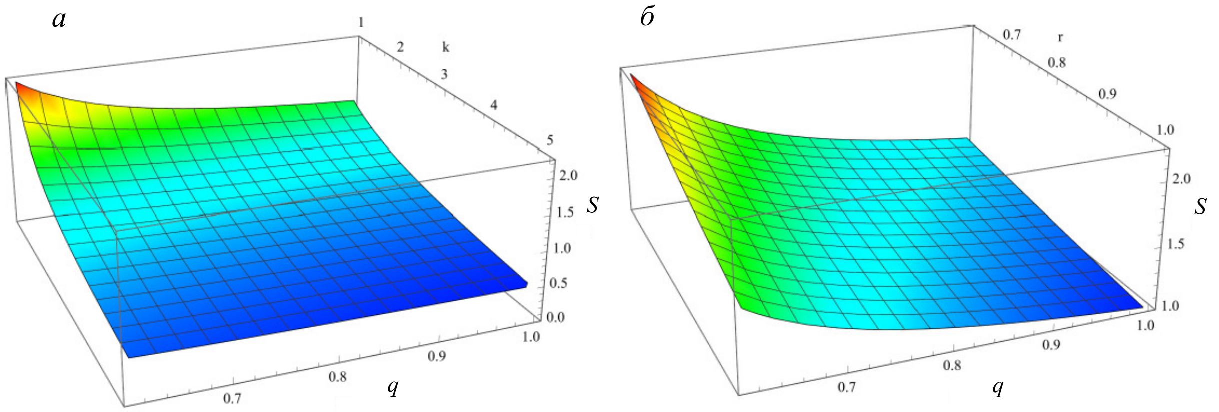


Рис. 2. Зависимость $S^{(SM)}$ для гамильтониана $H = Cx^k$ от q и k при $r = 0.61$ (*а*); q и r при $k = 1$ (*б*)

Для анализа поведения распределения рассмотрим $q = q_{min} + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$ — положительный параметр, чтобы обеспечить сходимость интеграла (34). Тогда распределение будет иметь вид:

$$\rho^{(SM)}(x,\varepsilon) = \frac{1}{Z}(C_u x^k)^{-\frac{k+1}{k}\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}\left[1-\varepsilon\frac{k+1}{k}\left(1-\left(C_u x^k\right)^{-1}\right)\right]^{-\frac{k+1}{k}\left(1+\varepsilon\frac{k+1}{k}\right)}, \tag{42}$$

где Z — нормировочная функция данного распределения:

$$Z = \frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1+\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}+\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right)}\left(\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{-1-\left(\frac{k+1}{k}\right)^2}\left(\left(1-\varepsilon\frac{(k+1)^2}{k}\right)C_u\right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{43}$$

При $\varepsilon = 0$ распределение приобретает степенную форму:

$$\rho^{(SM)}\Big|_{\varepsilon\to 0} \sim (C_u x^k)^{-\frac{k+1}{k}} \sim x^{-(k+1)}. \tag{44}$$

Отметим, что при $q = q_{min}$ ($\varepsilon = 0$) имеет место расходимость (34), следовательно, распределение Шарма–Миттала только асимптотически стремится к степенной форме.

Полученное распределение (42) соответствует обобщению результатов, полученных для формализма Реньи [11], где подробно рассмотрены характеристики и применения приближения. Совместимость рассматриваемых формализмов со степенным распределением открывает путь для рассмотрения соответствующих систем, не описываемых распределением Гиббса [2].

6. ОБОБЩЁННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим трёхмерный идеальный одноатомный газ N частиц:

$$H = \sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}. \tag{45}$$

Используя (36), получаем для данного гамильтониана выражения статистического интеграла и средней энергии системы:

$$Z^{(SM)} = \left(\frac{2\pi m}{\beta^{(SM)}(2\pi\hbar)^2}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{(\gamma V)^N}{N!}\left(\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\left(1-\frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{46}$$

$$U = \frac{3N}{2\beta^{(SM)}}, \tag{47}$$

где V — объём, занимаемый системой, а γ — число неклассических степеней свободы частицы системы.

Явная связь $\beta^{(SM)}$ с температурой системы (из (46) и (20)):

$$\beta^{(SM)} = \left(C_{r,q}\theta^{1+y_r}\right)^{-1} = \frac{\beta^{1+y_r}}{C_{r,q}}, \tag{48}$$

где β — обратная температура системы,

$$y_r = \left(\frac{2}{3N}\frac{1}{1-r} - 1\right)^{-1}, \tag{49}$$

$$C_{r,q} = \left[\left(1 - \frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{-\frac{1}{1-q}+\frac{3N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\right]^{y_r \frac{2}{3N}} \left(\frac{m\pi}{2}\frac{q}{1-q}\right)^{y_r}. \tag{50}$$

Исходя из распределения Шарма–Миттала (10) и связи $\beta^{(SM)}$ с температурой системы (46), получаем обобщённое распределение Максвелла по импульсам для трёхмерного идеального одноатомного газа N частиц:

$$\rho^{(SM)}_{M_p} = \left(\frac{\beta^{1+y_r}}{2\pi m C_{r,q}}\right)^{\frac{3N}{2}} \frac{\left(1 + \frac{1-q}{q}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\beta^{1+y_r}}{C_{r,q}}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{3N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}}{\left(\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \left(1 - \frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}}. \tag{51}$$

В полной аналогии с формализмом Тсаллиса одночастичное обобщённое распределение Максвелла по модулю скорости в формализме Шарма–Миттала примет вид:

$$\rho^{(SM)}_{M_v}(v_j) = 4\pi v_j^2 \left(\frac{m\beta^{1+y_r}}{2\pi C_{r,q}}\right)^{3/2} \left(\frac{1-q}{q}\right)^{3/2} \frac{\left(1 + \frac{1-q}{q}\left(\frac{\beta^{1+y_r}}{C_{r,q}}\frac{m v_j^2}{2} - \frac{3N}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q-1}+\frac{3(N-1)}{2}}}{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3(N-1)}{2}\right)} \left(1 - \frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}+\frac{3N}{2}}}. \tag{52}$$

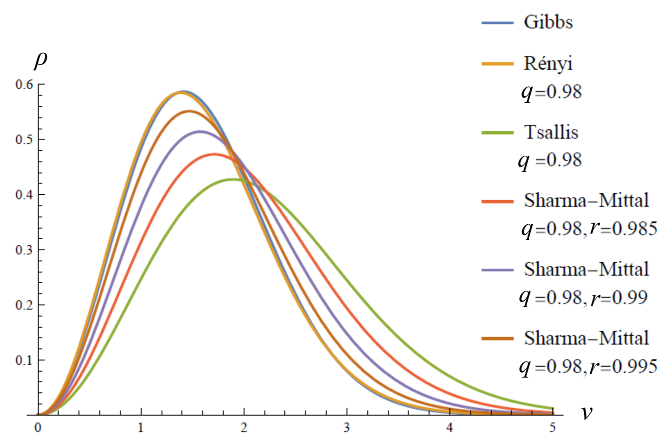


Рис. 3. Распределение по модулям скоростей идеального газа в разных формализмах при параметрах $N = 10$, $\theta = 1$

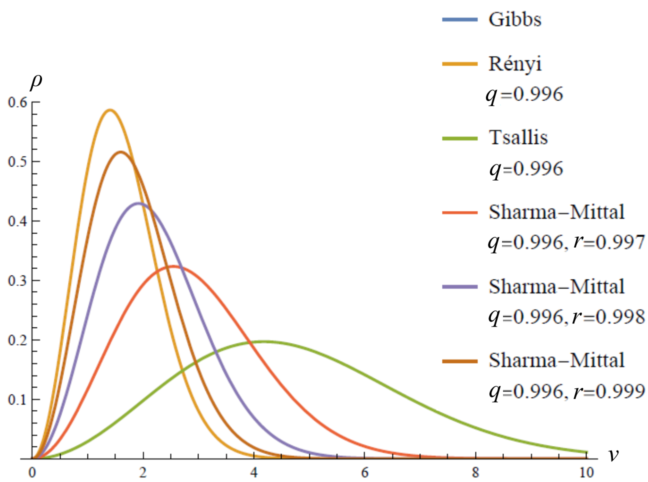


Рис. 4. Распределение по модулям скоростей идеального газа в разных формализмах при параметрах $N = 100$, $\theta = 1$. Распределения Гиббса и Реньи на таком масштабе совпадают

Ограничения на параметр q для распределения следуют из условий сходимости при получении явного вида статистического интеграла (46):

$$1 - \frac{2}{3N+2} < q < 1. \tag{53}$$

Запрещённое значение для r следует из расходимости функции (52):

$$r \neq 1 - \frac{2}{3N}. \tag{54}$$

В настоящей работе мы исследуем область $q \leq r \leq 1$, которая не затрагивает (54).

Полученные распределения (51) и (52) обобщают результаты для формализмов Реньи и Тсаллиса. Примерами физических систем, где применяются параметрические распределения скоростей, являются турбулентности [24], биологические клетки [25, 26], звёзды в скоплении Плеяды [15] и атомы в оптических решётках [27].

На рис. 3 и 4 продемонстрировано одночастичное обобщённое распределение Максвелла в формализмах Гиббса, Реньи, Тсаллиса и Шарма–Миттала при разных значениях r. Видим, что распределение в формализме Шарма–Миттала является переходящим от Реньи к Тсаллису при уменьшении r с 1 до q. При этом $q < 1$ обеспечивает отклонение семейства распределений в обобщённых формализмах от классического случая Максвелла–Гиббса. При увеличении числа частиц распределение формализма Тсаллиса отклоняется от распределения Гиббса сильнее, чем Реньи.

Также рассмотрим зависимость распределений от q (рис. 5). Заметим, что при $r \neq q$ и $r \neq 1$ (52) не переходит в распределение Максвелла в формализме Гиббса при $q \to 1$.

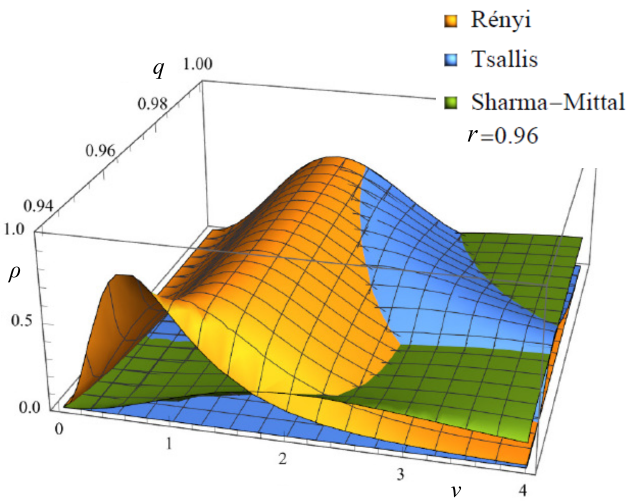


Рис. 5. Распределение по модулям скоростей идеального газа в разных формализмах в зависимости от q при параметрах $N = 10$, $\theta = 1$

7. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБОБЩЁННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Получим характеристики обобщённого распределения в формализме Шарма–Миттала. Среднеквадратичная скорость вычисляется через определение среднего значения энергии (47) с учётом её независимости от направления проекции скорости:

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{\beta^{(SM)}m}} = \sqrt{\frac{3\theta}{m}}\sqrt{C_{r,q}\theta^{y_r}}. \quad (55)$$

Среднюю скорость молекул получим через одночастичное распределение по модулю скорости (52) с использованием [28]:

$$\langle v\rangle = \int\limits_0^\infty v\rho_{M_v}^{(SM)}(v)dv, \quad (56)$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8\theta}{\pi m}}\sqrt{C_{r,q}\theta^{y_r}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}}. \quad (57)$$

Наиболее вероятная скорость обеспечивает экстремум функции (52):

$$v_p = \sqrt{\frac{2\theta}{m}}\sqrt{C_{r,q}\theta^{y_r}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{q}{q-1} + \frac{3N}{2}}{\frac{q}{q-1} + \frac{3(N-1)}{2}}}. \quad (58)$$

На рис. 6 представлена зависимость наиболее вероятной скорости частиц от q. Точки пересечения кривых Тсаллиса и Шарма–Миттала находятся на $r = q$. При приближении r к 1 зависимость в формализме Шарма–Миттала приближается к зависимости в формализме Реньи.

Вычислим ковариацию модулей скоростей через среднее значение произведения модулей скоростей частиц n и k:

$$cov(v_n v_k) = \langle v_n v_k\rangle - \langle v\rangle^2, \quad (59)$$

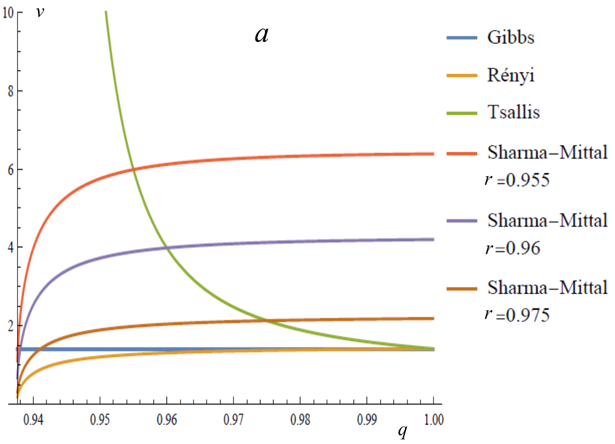
$$\langle v_n v_k\rangle = \int\limits_0^\infty v_n v_k \rho_{M_v}^{(SM)}(v)\prod_{i=1}^N dv_i = \frac{8\theta}{\pi m}C_{r,q}\theta^{y_r}, \quad (60)$$

$$cov(v_n v_k) = \frac{8\theta}{\pi m}C_{r,q}\theta^{y_r}\left(1 - \left(\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}\right) \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)}\right]^2\right). \quad (61)$$

Отличная от нуля ковариация скоростей может свидетельствовать о возможности описания распределением Шарма–Миттала систем с внутренним взаимодействием.

8. ОБОБЩЁННАЯ ФОРМУЛА САКУРА–ТЕТРОДЕ

Получим явный вид энтропии идеального одноатомного газа. Для этого воспользуемся связью энтропии со статистической суммой (16) и выражением для статистической суммы (46) с учётом (48):



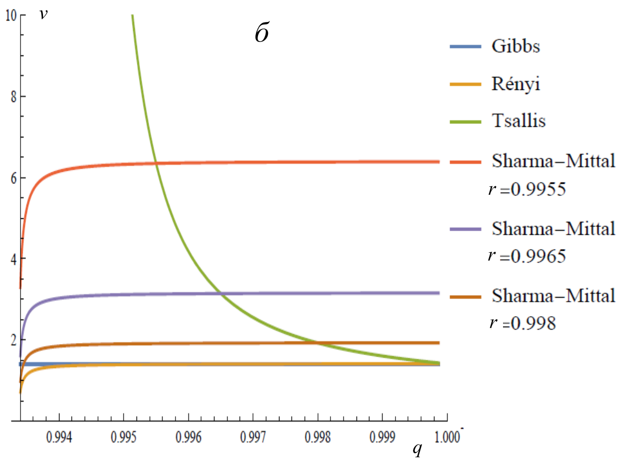


Рис. 6. Зависимость наиболее вероятной скорости частиц от параметра q: *а* — при параметрах $N=10$, $\theta=1$, *б* — при параметрах $N=100$, $\theta=1$

$$S^{(SM)} = \frac{1}{1-r}\cdot\left(C_{r,q}\theta^{1+y_r}\frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{\frac{3N}{2}(1-r)}\times\left(\frac{(\gamma V)^N}{N!}\right)^{1-r}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\left(1-\frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right)^{1-r}-\frac{1}{1-r}. \tag{62}$$

Данное выражение представляет собой обобщённую формулу Сакура–Тетроде. При $r\to1$ выражение примет вид:

$$S^{(R)} = \ln\left(\left(\theta\frac{2\pi m}{(2\pi\hbar)^2}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{(\gamma V)^N}{N!}\right)+\ln\left(\left(\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}\left(1-\frac{1-q}{q}\frac{3N}{2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right), \tag{63}$$

которое при $q\to1$ перейдёт в известное уравнение Сакура–Тетроде для идеального газа в формализме Гиббса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была доказана теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы классических статистических систем в формализме Шарма–Миттала. Рассмотрено распределение Шарма–Миттала, полученное путём максимизации одноимённого функционала энтропии. Данная теорема даёт возможность быстро получать величину средней энергии для статистических систем, описываемых рассматриваемым семейством формализмов.

Установлена связь между статистической энтропией Шарма–Миттала и термодинамической энтропией Клаузиуса. В результате получено выражение, связывающее множитель $\beta^{(SM)}$, фигурирующий в распределении Шарма–Миттала, и термодинамическую температуру θ.

В работе было получено обобщённое распределение Максвелла по скоростям в формализме Шарма–Миттала. Тем самым мы объединили результаты для формализмов Реньи и Тсаллиса. Мы продемонстрировали характеристики статистических систем, описываемых распределением: среднюю энергию системы, средний модуль скорости частиц, среднеквадратичую и наивероятнейшую скорости атомов газа.

Через связь энтропии Шарма–Миттала со статистическим интегралом системы было получено обобщённое уравнение Сакура–Тетроде для идеального газа.

Работа была поддержана фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

[1] *Caruso F., Tsallis C.* // Phys. Rev. E **78**. 021102. (2008).

[2] *Башкиров А.Г.* // ТМФ. **149**. 299. (2006).

[3] *Shannon C.E.* // Bell Syst. Techn. J. **27**. 379. 623. (1948). 10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x
[4] *Ilic V.M., Stankovic M.S.* // Physica A. **411**. 138. (2014).
[5] *Bizet N.C., Fuentes J., Obregon O.* // EPL. (2020). **128**. 60004.
[6] *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.* et al. // Phys. Rev. A. **33**, N 2. 1141 (1986).
[7] *Zander C., Plastino A.R., Casas M., Plastino A.* // Eur. Phys. J. D. **66**, N 1. 14. (2012).
[8] *Geilikman M.B., Golubeva T.V., Pisarenko V.F.* // Earth Planet. Sci. Lett. **99**, N 1-2. 127. (1990).
[9] *Renyi A.* et al. // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. **1**. 547. (1961). MR: 132570 Zbl: 0106.33001
[10] *Renyi A.* // Probability theory. North-Holland, 1970.
[11] *Бакиев Т.Н., Накашидзе Д.В., Савченко А.М.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 6. 45. (2020). (*Bakiev T.N., Nakashidze D.V., Savchenko A.M.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **75**, N 6. 559. (2020)).
[12] *Tsallis C.* // J. Stat. Phys. **52**. 479. (1988).
[13] *Tsallis C.* // Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Springer, Berlin. 2009.
[14] *Tsallis C., Cirto L.J.L.* // Eur. Phys. J. C. **73**, 2487. (2013).
[15] *J.C. Carvalho* et al. // EPL **84**, 59001. (2008).
[16] *Weili S., Yu M., Zhanfang C.* Research of automatic medical image segmentation algorithm based on Tsallis entropy and improved PCNN // Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. 2009.
[17] *Sharma B.D., Mittal D.P.* // J. Math. Sci. **10**. 28. (1975).
[18] *Masi M.* // Physics Letters A. **338**. 217. (2005).
[19] *Koltcov S., Ignatenko V., Koltcova O.* // Entropy. **21**. 660. (2019).
[20] *Rani S., Jawad A., Bamba K., Malik I.* // Symmetry. **11**. 509. (2019).
[21] *Ahmed F., Ramachandran S. K., Fuge M.* et al. // ASME. J. Mech. Des. **143** N.6, 61702. (2021).
[22] *Kesavan H. K.* Jaynes' maximum entropy principle / Encyclopedia of optimization. (2008). **7**.
[23] *Бакиев Т.Н., Накашидзе Д.В., Савченко А.М., Семенов К.М.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 5. 53. (2022). (*Bakiev T.N., Nakashidze D.V., Savchenko A.M., Semenov KM.* // Moscow Univ. Phys. Bull. № 5. 628. (2022)).
[24] *Arimitsu T., Arimitsu N.* // Physica A. **305**, N 1-2. 218. (2002).
[25] *Shao-Zhen Lin, Peng-Cheng Chen, Liu-Yuan Guan* et al. // Adv. Biosys. **8**, 2000065. (2020).
[26] *Arpita Upadhyaya, Jean-Paul Rieu, James A. Glazier, Yasuji Sawada* // Elsevier. **293**. 549. (2001).
[27] *Douglas P., Bergamini S., Renzoni F.* // Phys. Rev. Lett. **96**, N 11. 110601. (2006).
[28] *Gradstein I. S., Ryzhik I. M.* // Tables of Integrals, Sums, Series and Productions, 5th ed. Academic Press, 1994. MR: 1243179 ISBN: 0-12-294755-X

Some properties of the Sharma–Mittal statistical distribution

T. N. Bakiev[1], **D. V. Nakashidze**[2], **A. M. Savchenko**[2,a], **K. M. Semenov**[2,b]

[1]*Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics, Moscow 119048, Russia*
[2]*Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia*
E-mail: [a]*a.m.savchenko@gmail.com*, [b]*semenovkm@protonmail.com*

The statistical theory based on the two-parameter Sharma–Mittal functional is a generalization of the statistics of Gibbs, Renyi and Tsallis. In this paper, the formalism of statistical mechanics based on the Sharma–Mittal entropy functional is considered, and the theorem on the equidistribution of energy for classical statistical systems by degrees of freedom is proved. A generalized Maxwell distribution for the corresponding statistics is obtained and the characteristics of statistical systems described by the distribution are calculated: the average velocity modulus, the root-mean-square and the most probable velocities of gas particles. A generalized Sakura–Tetrode formula is also obtained.

PACS: 05.20.-y, 05.70.-a, 05.90.+m.
Keywords: Sharma–Mittal entropy, equidistribution theorem, power distribution, Maxwell distribution, Sakura–Tetrode formula.
Received 24 April 2022.
English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2023. **78**, No. 4. Pp. 434-444.

Сведения об авторах

1. Бакиев Тимур Наилевич — аспирант; e-mail: tnbakiev@edu.hse.ru.
2. Накашидзе Дмитрий Викторович — магистр; e-mail: nakashidze.dv16@physics.msu.ru.
3. Савченко Александр Максимович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.
4. Семенов Константин Михайлович — аспирант; e-mail: semenovkm@protonmail.com.