

## Квантовогидродинамическое представление обменного взаимодействия в теории описания магнитоупорядоченных сред

П.А. Андреев,<sup>1,\*</sup> М.И. Труханова<sup>1,2,†</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Лаборатория теоретической физики  
Россия, 115191, Москва, 2-ой Тульский пер., д. 2

(Поступила в редакцию 08.05.2023; после доработки 05.06.2023; принята к публикации 07.06.2023)

Ферромагнетики, мультиферроики и другие магнитоупорядоченные материалы описываются различными моделями эволюции намагниченности среды. В данной работе мы развиваем метод многочастичной квантовой гидродинамики для таких сред. Мы выводим уравнение эволюции макроскопической намагниченности, соответствующее бездиссипативной версии уравнения Ландау–Лифшица для частиц со спином  $1/2$ , используя гамильтониан Гейзенберга. Показано, что известная форма вклада обменного взаимодействия в уравнение Ландау–Лифшица возникает в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Обсуждаются возможности систематического обобщения полученного результата при рассмотрении пятого порядка по радиусу взаимодействия или систем частиц с большим спином.

PACS: 75.10.Dg, 75.10.-b. УДК: 538.9

Ключевые слова: ферромагнетизм, квантовая гидродинамика, гамильтониан Гейзенберга, уравнение Ландау–Лифшица.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.78.2340103](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2340103)

### ВВЕДЕНИЕ

Традиции вывода уравнений коллективной динамики систем многих частиц берут начало с работы Н.Н. Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике» [1], где был предложен метод построения цепочек кинетических уравнений и последующей процедуры их замыкания. Прежде всего метод цепочек Боголюбова позволяет получить кинетическое уравнение Больцмана для слабо-взаимодействующих газов, где взаимодействие атомов учитывается посредством интеграла столкновений. Кроме того, в [1] дан вывод кинетического уравнения Власова для плазмы, где дальнедействующее взаимодействие заряженных частиц учтено через самосогласованное электрическое поле. Данный результат был получен в квазистатистическом приближении, оставляя открытым вопрос о выводе полной системы уравнений Максвелла–Власова, который недавно был рассмотрен в работах [2–4].

Предложенный Н.Н. Боголюбовым подход получил огромное развитие и послужил примером для построения цепочек уравнений, основанных на иных методах описания физических систем. Яркими примерами является вывод кинетического уравнения Ландау–Силина для ферми-жидкости, выполненный А.С. Кондратьевым (см., к примеру, [5]), и диаграммный метод М.В. Келдыша, рассмотренный в работах [6, 7].

Важным вопросом гидродинамической и кинетической теорий, в контексте классической физики, является необходимость построения гладких материальных полей (скалярное поле плотности, векторное поле тока, поле давления, поле температуры и т.д.) исходя из динамики точечных частиц, которая рассматривается Ю.Л. Климонтовичем в виде суперпозиции дельта-функций [8, 9].

Одним из основных методов сглаживания (построения гладких полей) является метод усреднения по функции распределения [10]. Тем не менее такой подход справедлив для стохастических систем, когда система частиц «забывает» начальные условия спустя некоторое время  $\tau_0$ , что связано с частичным пренебрежением причинно-следственными связями в динамике отдельных частиц. Более общий подход к построению гладких материальных полей, с сохранением причинно-следственных связей в динамике взаимодействующих частиц, может быть реализован при явном усреднении по пространству, а именно по физически бесконечно малому объёму. Обычно в литературе эта операция либо остаётся в неявном виде, либо заменяется усреднением по функции распределения. Тем не менее аналитический оператор, дающий явное усреднение по физически бесконечно малому объёму определенной величины  $\Delta$ , был предложен М. Дрофой и Л.С. Кузьменковым в статье [11]. Такой подход позволил сформулировать классическую механику систем многих частиц в форме эволюции материальных полей, а замыкание систем уравнений при определённом ограничении набора материальных полей позволило дать вывод уравнений гидродина-

\* E-mail: [andreevpa@physics.msu.ru](mailto:andreevpa@physics.msu.ru)

† E-mail: [trukhanova@physics.msu.ru](mailto:trukhanova@physics.msu.ru)

мики в безвероятностной интерпретации, но с сохранением причинно-следственных связей в эволюции отдельных частиц. Рассмотрение материальных полей в шестимерном фазовом пространстве координат и импульсов даёт возможность безвероятностного вывода кинетических уравнений и соответствующей интерпретации «функции распределения». Эти результаты привели к необходимости реализации аналогичного подхода в рамках квантовой механики [12, 13].

Многочастичная волновая функция содержит информацию о квантовой системе частиц, а её эволюция удовлетворяет нестационарному уравнению Шрёдингера. Эту эволюцию можно переписать в терминах материальных полей, аналогичных тем, которые были введены в классической механике. Остановимся на определении простейшего материального поля в квантовой механике или скалярного поля концентрации (плотности числа частиц):

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{S=s_1, \dots, s_N} \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Psi_S^\dagger(R, t) \Psi_S(R, t), \quad (1)$$

где  $dR = \prod_{i=1}^N d\mathbf{r}_i$  — элемент объёма в  $3N$ -мерном конфигурационном пространстве. Здесь  $N$  — число частиц и  $\Psi(R, t)$  — волновая функция системы частиц. Формула (1) явно содержит суммирование по спиновым переменным (ниже, для компактности формул, суммирование по спину опущено:  $\sum_{S=s_1, \dots, s_N}$ ).

Представление квантовой механики в виде эволюции материальных полей, динамика которых происходит вслед за эволюцией многочастичной волновой функции, является общей концепцией. Тем не менее на этом пути удалось построить гидродинамические модели ряда физических систем. Спин-поляризованные плазмopodobные среды могут быть описаны системой уравнений квантовой гидродинамики, состоящей из уравнений эволюции концентрации, поля скоростей и плотности спина. Альтернативно спин-поляризованные плазмopodobные среды могут быть описаны на основе квантовой гидродинамики с раздельной спиновой эволюцией. Другим примером является вывод уравнений квантовой гидродинамики для ультрахолодных квантовых газов. При этом рассмотрены как бозоны (атомы со спином 0 или 1), так и фермионы (спин-1/2). Исследуется динамика спина в таких системах, хотя механизмы возникновения спиновой поляризации рассмотрены лишь частично. Одним из примеров является прямое действие внешнего магнитного поля на спины частиц. Однако в магнитоупорядоченных материалах может возникнуть спонтанная намагниченность. Одним из простейших механизмов её возникновения в ферромагнетиках и антиферромагнетиках является обменное взаимодействие, которое, в частности на микроскопическом уровне, можно записать в форме гамильтониана Гейзенберга:  $\hat{H}_H = -J \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ , где  $\hat{\mathbf{S}}_1$  и  $\hat{\mathbf{S}}_2$  — это спины двух взаимодействующих частиц, а  $J$  —

это обменный интеграл, связанный с перекрытием волновых функций.

С другой стороны, в уравнении Ландау–Лифшица для эволюции намагниченности среды  $\mathbf{M}$  существует вклад обменного взаимодействия, который может быть получен феноменологически из соображений симметрии [14]:  $\partial_t \mathbf{M} = -\frac{g|e|}{2m_e c} \alpha [\mathbf{M}, \Delta \mathbf{M}]$ , где  $g$  — гиромагнитное отношение для ферромагнетика,  $e$  — заряд электрона,  $m_e$  — масса электрона,  $c$  — скорость света. Симметричный тензор  $\hat{\alpha}$  выбран в диагональном виде, что соответствует кубическим кристаллам. В литературе представлена оценка параметра  $\alpha$  через температуру Кюри  $T_c$ , постоянную решётки  $a$  и модуль намагниченности  $M$ :  $\alpha \sim T_c / (aM^2)$  [14]. В этом уравнении правая часть обусловлена медленным изменением вектора намагниченности в среде с неоднородной плотностью магнитного момента. Фактически гамильтониан Гейзенберга уже был использован для вывода модели конденсата Бозе–Эйнштейна для атомов со спином-1 [15], где показан нулевой вклад данного гамильтониана в уравнение эволюции магнитного момента и уравнение эволюции нематического тензора.

Стандартная теория конденсата Бозе–Эйнштейна строится на уравнении Гросса–Питаевского, которое возникает в первом порядке по радиусу взаимодействия как в бесспиновом режиме, так и для частиц со спином. Поэтому уравнение эволюции спина в работе [15] было рассмотрено в первом порядке по радиусу взаимодействия. В представленной работе зависящее от спина короткодействующее взаимодействие, взятое в форме гамильтониана Гейзенберга, рассмотрено в третьем порядке по радиусу взаимодействия. Это позволило воспроизвести вклад неоднородного распределения намагниченности в образце.

Представленный ниже метод квантовой гидродинамики проявляет сходство со многими методами вывода уравнений гидродинамики или кинетики в квантовой физике (см., к примеру, метод функций Вигнера при выводе квантового обобщения уравнения Власова в книге В.П. Силина [16]). Основное отличие «метода квантовой гидродинамики» состоит в систематическом развитии метода полевого представления классической механики для систем квантовых частиц. Реализация вывода уравнений квантовой гидродинамики также может быть рассмотрена как обобщение работ Маделунга и Такабаяши на системы большого числа частиц. В случае систем нескольких частиц возникает необходимость проецирования многомерного конфигурационного пространства в трёхмерное физическое пространство, тогда как для одной частицы эти пространства эквивалентны друг другу.

Простейшая функция, описывающая динамику коллектива частиц, является концентрацией числа частиц. В классической физике её определение имеет ясный физический смысл числа частиц, находящихся в единице объёма. Рассматривая одинаковые элементы объёма в различных точках про-

странства, можно получить скалярное поле концентрации. В квантовой физике, где волновая функция имеет вероятностную интерпретацию, концентрация частиц может быть отождествлена с суммарной плотностью вероятности всех частиц системы, находящихся в окрестности выбранной точки пространства и имеет вид (1).

Формулу (1) можно переписать в следующем виде:

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \int \Psi^\dagger(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_N, t),$$

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_N, t) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{i-1} d\mathbf{r}_{i+1} \dots d\mathbf{r}_N, \quad (2)$$

где на месте координаты  $i$ -й частицы в волновой функции стоит координата без индекса  $\mathbf{r}$ . После неявного интегрирования по координатам всех частиц, кроме выбранной, мы получим плотность вероятности  $i$ -й частицы, спроецированной в физическое пространство  $n(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\mathbf{r}, t)$ , где  $\rho_i(\mathbf{r}, t)$  неявно зависит от состояния других частиц системы через общую волновую функцию  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ .

Эволюция концентрации определяется эволюцией волновой функции, а её вычисление требует явного вида гамильтониана системы частиц. В этой работе мы рассмотрим простейший модельный гамильтониан, необходимый для решения задачи о построении гидродинамической модели ферромагнетиков. Ключевым элементом гамильтониана является обменное кулоновское взаимодействие, которое для частиц со спином  $1/2$  задаётся гамильтонианом Гейзенберга  $\hat{H}_H = -J\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$  (см., к примеру, [17, 18]).

Данная статья организована следующим образом. В разд. II представлены основы метода квантовой гидродинамики. В разд. III обсуждается вывод уравнения эволюции спина/намагниченности среды под действием обменного взаимодействия. В разд. IV представлено краткое обсуждение полученных результатов.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Запишем нестационарное уравнение Шрёдингера в координатном представлении с модельным гамильтонианом, позволяющим рассмотреть одно из основных свойств исследуемых магнитоупорядоченных систем:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left( \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, j\neq i}^N U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{p}_i = -i\hbar\nabla_i$  — оператор импульса  $i$ -й частицы,  $\hbar$  — приведённая постоянная Планка,  $m$  — масса частицы,  $N$  — полное число частиц,  $\Psi = \Psi(R, t)$  — волновая функция системы частиц,  $R = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$  — совокупность координат  $N$  частиц, образующая вектор в  $3N$ -мерном конфигурационном пространстве,  $\hat{\mathbf{S}}_i$  — оператор спина  $i$ -й частицы. Первое (вто-

рое) слагаемое в правой части уравнения (3) представляет собой сумму кинетических энергий (сумму потенциальных энергий попарного взаимодействия), где потенциальная энергия выбрана в виде гамильтониана Гейзенберга. Предполагается, что все рассматриваемые частицы принадлежат одному сорту, поэтому масса  $m$  не содержит номер частицы. Фактически мы ограничиваемся частицами со спином  $1/2$ , так как для частиц с большим спином следует рассмотреть более общий вид обменного взаимодействия. Тем не менее полученные ниже результаты являются частью более общей модели, возникающей для больших спинов. Поэтому мы не конкретизируем вид спинового оператора  $\hat{\mathbf{S}}_i$ .

Гамильтониан Гейзенберга возникает как результат сравнения значений энергии обменного кулоновского взаимодействия при различной взаимной ориентации спинов двух взаимодействующих частиц. С точки зрения дальнейших приложений гамильтониан Гейзенберга характеризует эффективное короткодействующее спин-спиновое взаимодействие. Это позволяет нам следовать методу разложения по радиусу взаимодействия, представленному в работах [15], [19], [20], что соответствует разложению по малому безразмерному параметру, образованному отношением радиуса действия потенциала  $r_0$  (в нашем случае области перекрытия волновых функций валентных электронов взаимодействующих атомов или ионов, приводящая к обменному взаимодействию) к характерному масштабу неоднородности системы, в качестве которого может быть выбрана длина волны, ширина солитона или диаметр вихревой структуры.

Исследование эволюции концентрации частиц (1), очевидно, приводит к уравнению непрерывности  $\partial_t n + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , в котором возникает явное определение функции потока частиц (плотности импульса)  $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$  (см. [12, 15, 19], где также можно ознакомиться с методом введения поля скоростей  $\mathbf{v}$  в уравнениях квантовой гидродинамики). Эволюция потока частиц приводит к уравнению Эйлера

$$m\partial_t \mathbf{j}^\alpha + m\partial_\beta \Pi^{\alpha\beta} = F_{int}^\alpha, \quad (4)$$

где индексы соответствуют проекциям трёхмерных векторов. Величина  $\Pi^{\alpha\beta}$  представляет собой тензор плотности потока импульса, подробно рассмотренный в других работах (см. [15, 19, 20]). Величина  $F_{int}^\alpha$  является плотностью силы, обусловленной взаимодействием частиц, которая будет рассмотрена ниже после обсуждения плотности спина. Для данного гамильтониана плотность силы взаимодействия может быть выражена через двухчастичную функцию.

## 2. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОТНОСТИ СПИНА

Изменение намагниченности может происходить в результате перемещения спин-поляризованных частиц на макроскопические расстояния (спиновый

ток квазисвободных частиц), локальных смещений частиц или изменения проекции спина неподвижных частиц (как это происходит в модели Изинга для неподвижных атомов, находящихся в узлах кристаллической решётки). В частности, в модели Изинга концентрация частиц постоянна и поле скоростей равно нулю.

Рассмотрим эволюцию векторного поля плотности спина без ограничений на характер движения частиц, взяв за основу выбранный выше модельный гамильтониан (3). Определение плотности спина в квантовой гидродинамике возникает в следующем виде [15]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Psi^\dagger(R, t) \hat{S}_i \Psi(R, t). \quad (5)$$

Рассмотрим производную по времени от функции (5) для определения уравнения эволюции плотности спина. Производные по времени от многочастичных волновых функций могут быть выражены через гамильтониан согласно уравнению (3). Разделяя вклад кинематических слагаемых и слагаемых, описывающих взаимодействие, получим уравнение эволюции спиновой плотности в следующем виде:

$$\partial_t S^\alpha + \partial_\beta J^{\alpha\beta} = N_{int}^\alpha, \quad (6)$$

где  $J^{\alpha\beta}$  представляет собой плотность спинового тока, микроскопическое определение которого можно найти в работах [15, 21]. Уравнение эволюции спина (6) также содержит момент сил

$$N_{int}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int d\mathbf{r}' U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) S_2^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (7)$$

где

$$S_2^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \int dR \sum_{i,j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \times \Psi^\dagger(R, t) \hat{S}_i^\beta \hat{S}_j^\gamma \Psi(R, t) \quad (8)$$

представляет собой двухчастичную/двухкоординатную функцию спина. В большинстве случаев в литературе используется понятие двухчастичной функции. Соответственно концентрацию и плотность спина называют одночастичными функциями, несмотря на то обстоятельство, что они описывают многочастичные системы. Также в литературе встречается термин двухкоординатная функция, так как функция, описывающая эволюцию многочастичной системы зависит от двух координат  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ . При выводе уравнения эволюции спина (6) использованы коммутационные соотношения для операторов спина  $[\hat{S}_i^\alpha, \hat{S}_j^\beta] = i\hbar \delta_{ij} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_i^\gamma$ .

Отметим, что в приближении самосогласованного поля, которое, вообще говоря, несправедливо для рассматриваемых здесь короткодействующих/контактных взаимодействий, двухкоординатная функция спина имеет мультипликативную форму (8)  $S_2^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = S^\beta(\mathbf{r}, t) S^\gamma(\mathbf{r}', t)$ . В данной

формуле подчеркивается структура рассматриваемой двухкоординатной функции. Также отметим, что применение разложения по радиусу взаимодействия в уравнении Эйлера (4) в главном приближении приводит к выражению, полученному в дальнейшем и имеющему внешнее сходство с приближением мультипликативности.

Основное внимание в статье сфокусировано на уравнении эволюции спина, поэтому приведем явный вид кинематической части этого уравнения, следуя работе [21]:

$$n(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) s^\alpha - \frac{\hbar}{2m} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \partial_\beta (n s^\mu \partial^\beta s^\nu) + \mathfrak{S}^\alpha = N_{int}^\alpha, \quad (9)$$

где  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)/n$  — удельная плотность спина, а  $\mathfrak{S}$  — тепловая часть спинового тока. Величина  $\mathfrak{S}$  в уравнении (9) является аналогом давления. В случае систем вырожденных фермионов, где распределение частиц по квантовым состояниям обусловлено принципом Паули, спиновый ток  $\mathfrak{S}$  принимает отличное от нуля значение, которое может быть названо спиновым током Ферми. Пример систематического анализа тепловой части спинового тока можно найти в работе [21], хотя в большинстве работ его не принимают во внимание (к примеру, см. [22–24]). Представленное выражение возникает при введении поля скоростей в уравнения квантовой гидродинамики [21]. Слагаемое, пропорциональное постоянной Планка, отражает вклад потенциала Бома в эволюцию спина.

Рассмотрим основные шаги метода разложения по радиусу взаимодействия, представленного в работах [19, 20]. Для этого запишем плотность момента сил (7) без использования вспомогательных двухкоординатных функций

$$N_{int}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int dR \sum_{i,j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \Psi^\dagger(R, t) \hat{S}_i^\beta \hat{S}_j^\gamma \Psi(R, t), \quad (10)$$

где отдельно отметим вклад координат  $i$ -й и  $j$ -й частиц в аргумент волновой функции и  $3N$ -мерный дифференциал  $\Psi(R, t) = \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  и  $dR = d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j dR_{N-2}$ . Введем координаты центра масс и относительного движения для  $i$ -й и  $j$ -й частиц  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{R}_{ij} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$  и сделаем соответствующую замену в формуле (10). Более того, используя симметрию подынтегрального выражения в формуле (10), плотность момента сил можно переписать в следующем виде:

$$N_{int}^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \int dR \sum_{i,j} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) \times U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \Psi^\dagger(R, t) \hat{S}_i^\beta \hat{S}_j^\gamma \Psi(R, t), \quad (11)$$

где использована симметрия/антисимметрия волновой функции относительно перестановки координат. Ключевое свойство потенциала  $U(r_{ij})$  заклю-

чается в том, что он быстро спадать по мере увеличения относительного расстояния между частицами  $r_{ij}$ . Из-за этого всё подынтегральное выражение стремится к нулю при больших значениях относительного расстояния между частицами  $r_{ij}$ . Поэтому мы можем разложить подынтегральное выражение в ряд Тейлора по вектору относительного расстояния между частицами  $\mathbf{r}_{ij}$ . Разложение разности дельта-функций даёт нечетные степени проекций относительного расстояния  $r_{ij}^\alpha$ . Наименьший порядок разложения, дающий ненулевой вклад, возникает тогда, когда мы берём нулевой порядок разложения одной волновой функции и первый порядок разложения второй волновой функции. В итоге интеграл по координате относительного движения двух частиц отделяется и дает нам константу взаимодействия  $g_M \sim \int d\xi \xi^2 U(\xi)$ .

Описанная выше процедура позволяет учесть малый радиус действия потенциала. При дальнейшем вычислении мы рассматриваем многочастичную волновую функцию как произведение одночастичных волновых функций:

$$n(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{s} - \frac{\hbar}{2m} \partial^\beta [n \mathbf{s}, \partial^\beta \mathbf{s}] = g_M [n \mathbf{s}, \Delta(n \mathbf{s})], \quad (12)$$

где

$$g_M \equiv \frac{1}{6} \int d\xi \xi^2 U(\xi). \quad (13)$$

## 2.1. Плотность силы взаимодействия

Поле плотности силы взаимодействия, входящее в уравнение Эйлера, выражается через двухкоординатную функцию спина (8)

$$F_{int}^\alpha = \int d\mathbf{r}' (\nabla^\alpha U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)) S_2^{\beta\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \quad (14)$$

Аналогично результату, полученному для момента силы, действующего на плотность спина, можно вычислить плотность силы взаимодействия, ограничиваясь вкладом в разложении плотности силы в ряд по радиусу взаимодействия в главном, отличном от нуля, слагаемом. Это соответствует первому порядку по радиусу взаимодействия и приводит к следующему выражению для плотности силы:  $F_{int}^\alpha = g_0 S^\beta \partial^\alpha S^\beta$ , где  $g_0 = \int U(\xi) d\xi$  — константа взаимодействия, отличная от (13).

## 2.2. О структуре дисперсионной зависимости магнонов

Исследуем дисперсионную зависимость спиновых волн, возникающую в рамках предложенной модели. Рассмотрим неограниченную среду нейтральных атомов, у которых спины/магнитные моменты поляризованы в одном направлении (выберем ось  $z$  параллельно этому направлению). Проанализируем малые возмущения равновесного состояния, которые заданы равновесными значениями концентрации  $n_0$  и удельной плотности спи-

на  $\mathbf{s}_0 = s_0 \mathbf{e}_z$ . Поле скоростей в равновесном состоянии равно нулю. Диполь-дипольное взаимодействие, как это видно из представленной выше модели, предполагается малым по сравнению с обменным взаимодействием. Такое приближение справедливо только в отдельных случаях, но мы нацелены на рассмотрение выбранного модельного случая. Представим динамические величины как сумму равновесных значений и малых возмущений, к примеру,  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \delta \mathbf{s}$ , в уравнении эволюции спина, пренебрегая слагаемыми, нелинейными по малым возмущениям. В итоге мы получим линеаризованное уравнение эволюции спина:

$$n_0 \partial_t \delta \mathbf{s} - \frac{\hbar}{2m} n_0 [\mathbf{s}_0, \Delta \delta \mathbf{s}] - g_M n_0^2 [\mathbf{s}_0, \Delta \delta \mathbf{s}] = 0. \quad (15)$$

Отметим, что полученное уравнение является замкнутым в рассматриваемом приближении.

Исследуем малые возмущения в виде плоских монохроматических волн  $|\delta \mathbf{s}| \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , которые распространяются в произвольном направлении  $\mathbf{k}$ . Их дисперсионная зависимость получается в следующем виде:

$$\omega = s_0 k^2 \left| n_0 g_M + \frac{\hbar}{2m} \right|. \quad (16)$$

Для рассматриваемых здесь ферромагнетиков константа  $g_M > 0$  является положительной, поэтому знак модуля можно опустить. Представленная выше модель, включая выбранную форму равновесного состояния, не учитывает периодическое расположение атомов в решётке. Следовательно, мы получаем длинноволновый предел дисперсионной зависимости магнонов в кристалле. Сравним полученный результат с формулами, возникающими для цепочки классических магнитных моментов (см., к примеру, [17]), где появляется следующее выражение  $\omega = 2Js_0(1 - \cos(ka))$ , переходящее в длинноволновый предел  $\omega = Js_0 a^2 k^2$ , здесь  $a$  — период решётки кристалла  $a = n_0^{-1/3}$ , и для рассматриваемых магнитоупорядоченных систем  $J > 0$ . Из представленных выше формул видно, что дисперсионная зависимость на решётке выражается через значение обменного интеграла, тогда как предложенная модель приводит к интегралу от обменного интеграла. Более полное сравнение может быть получено при приближенном вычислении константы взаимодействия (13) для модельных форм потенциала короткодействующего взаимодействия/обменного интеграла.

Прежде чем мы представим результат оценки константы взаимодействия, можно отметить, что длинноволновая дисперсионная зависимость (16) содержит квантовый вклад  $\sim \hbar$  в сравнении с цепочкой классических магнитных моментов. В качестве первого примера рассмотрим обменный интеграл в виде функции Хевисайда  $U(\xi) = J$  при  $\xi \leq r_0$  и  $U(\xi) = 0$  при  $\xi > r_0$ . В качестве эффективного радиуса действия потенциала примем период решётки кристалла  $r_0 = a$  и в результате

получим  $g_M = 2\pi J a^5/15$ . Возникающий здесь множитель  $a^3 = n_0^{-1}$  приводит к сокращению соответствующего коэффициента в дисперсионной зависимости. Это даёт следующий квазиклассический предел формулы (16)  $\omega = 2\pi s_0 k^2 J a^2/15$ . Лишний множитель  $2\pi/15$  можно скомпенсировать соответствующим выбором радиуса действия потенциала  $r_0$ .

Рассмотрим второй модельный пример эффективного потенциала в виде дельта-функции на сфере радиуса  $a$ :  $U(\xi) = J a \delta(\xi - a)$ . Это приводит к следующему виду константы взаимодействия  $g_M = 2\pi J a^5/3$  и частоты  $\omega = 2\pi s_0 k^2 J a^2/3$ . Рассмотренные примеры показывают прямую связь полученного выражения для частоты с дисперсионной зависимостью для цепочки классических магнитных моментов.

Опираясь на представленный анализ константы взаимодействия, остановимся на поправках, возникающих в уравнении эволюции спина в пятом порядке по радиусу взаимодействия. Соответствующее разложение в уравнении (11) приводит к дополнительной константе взаимодействия  $g_{2M} \sim \int d\xi \xi^4 U(\xi)$ , которая для модельных потенциалов может быть выражена через обменный интеграл  $J$  или константу взаимодействия  $g_M$  (13), в частности  $g_{2M} \sim a^2 g_M \sim n_0^{-2/3} g_M$ . Функциональная зависимость может выражаться через производные амплитуды или фазы волновой функции. В первом случае, который соответствует представленному выше результату, можно ожидать поправки, содержащие пространственные производные более высокого порядка. Второй случай приводит ко вкладу тензора кинетического давления или кинетических функций более высокого тензорного ранга. Такие примеры реализуются в некоторых типах систем фермионов [20].

При рассмотрении частиц с большим спином, вообще говоря, возникают дополнительные слагаемые в гамильтониане (3), описывающие дополнительное эффективное взаимодействие спинов. Это взаимодействие пропорционально более высоким степеням скалярного произведения операторов спина пары взаимодействующих частиц и приводит ко вкладу дополнительных к плотности спина макроскопических функций и соответствующему обобщению уравнения эволюции спина. При малых отклонениях от равновесного ферромагнитного состояния дополнительные функции можно приближённо выразить через плотность спина, а дополнительные слагаемые принимают форму, совпадающую с правой частью уравнения эволюции спина (12).

Рассмотрим влияние динамики спина на звуковые волны, описываемые уравнением Эйлера, в котором нужно учесть не зависящее от спина короткодействующее взаимодействие. Оценим вклад эффективного спин-спинового взаимодействия, связанного с обменным взаимодействием Гейзенберга в уравнении Эйлера. Соответствующая плотность силы имеет вид  $\mathbf{F} \sim \nabla(ns)^2/2$ . В линейном приближении плотность спина может быть представлена в форме  $\mathbf{F} \sim n_0 \mathbf{s}_0 \nabla(n_0 \delta \mathbf{s} + \mathbf{s}_0 \delta n)$ . Отметим, что

уравнение эволюции спина приводит к выражению  $\mathbf{s}_0 \delta \mathbf{s} = s_0 \delta s_z = 0$ . В итоге дополнительное слагаемое в плотность силы отлично от нуля и выражается через возмущение концентрации  $\mathbf{F} = g_0 n_0 s_0^2 \nabla \delta n$ , что приводит к изменению квадрата скорости звука, по сравнению с аналогичной бесспиновой системой, на величину  $\Delta v^2 = g_0 s_0^2 n_0/m$ . Константа взаимодействия  $g_0$  также может быть выражена через эффективное значение обменного интеграла  $J$  при использовании модельной зависимости обменного интеграла от расстояния. Как и выше, рассмотрим пример обменного интеграла в виде функции Хевисайда:  $U(\xi) = J$  при  $\xi \leq r_0 = a$  и  $U(\xi) = 0$  при  $\xi > r_0$ . Это даёт представление константы взаимодействия в виде  $g_0 = 4\pi r_0^3 J/3 = 4\pi J/3n_0$  и изменение квадрата скорости звука в форме  $\Delta v^2 = 4\pi J s_0^2/3m$ .

Остановимся на коротком упоминании феррожидкостей и отметим, что предложенная модель, несмотря на свою гидродинамическую форму, разработана для описания магнитоупорядоченных сред в различных агрегатных состояниях, в которых основную роль в динамике спина играет обменное кулоновское взаимодействие.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что метод квантовой гидродинамики позволяет получить уравнение эволюции магнитного момента для магнитоупорядоченных сред, где динамические свойства магнитного момента обусловлены обменным взаимодействием. Такой подход включает в себя рассмотрение мультиферроиков, однако магнитоэлектрический эффект, который отличает их от других магнитоупорядоченных сред, будет рассмотрен отдельно. На микроскопическом уровне, для фермионов со спином  $1/2$ , обменное взаимодействие задано гамильтонианом Гейзенберга. В работе продемонстрирован переход от микроскопической модели к макроскопической. Показано возникновение набора констант взаимодействия и их приближенное представление в терминах определенного эффективного значения обменного интеграла.

## НАЛИЧИЕ ДАННЫХ

Вопрос о доступности данных неприменим к этой статье, поскольку в этом исследовании, которое носит чисто теоретический характер, не создавались и не анализировались новые данные.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа Марии Трухановой поддержана грантом Российского научного фонда в рамках Проекта № 22-72-00036.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

- [1] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
- [2] Zubkov V.V. // *J. Phys.: Conf. Ser.* **1352**. 012067. (2019).
- [3] Andreev P.A. // *Phys. Plasmas*. **29**. 122102 (2022).
- [4] Andreev P.A. // *Contrib. Plasma Phys.* e202200191. (2023).
- [5] Кондратьев А.С., Кучма А.Е. Лекции по теории квантовых жидкостей. Издательство Ленинградского университета, 1989.
- [6] Tanamoto T., Ueda M. // *Phys. Rev. B*. **57**. 14638. (1998).
- [7] Келдыш Л.В. // *ЖЭТФ* **47**. 1515. (1964)
- [8] Klimontovich Yu.L. *Statistical Physics*. Harwood, New York (1986).
- [9] Weinberg S. *Gravitation and Cosmology*. / John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
- [10] de Groot S.R., Suttrop L.G. *Foundations of Electrodynamics*. North-Holland, 1972.
- [11] Drofa M.A., Kuz'menkov L.S. // *Theoretical and Mathematical Physics*. **108**. 849. (1996).
- [12] Kuz'menkov L.S., Maksimov S.G. // *Theoretical and Mathematical Physics*. **118**. 227. (1999).
- [13] Kuz'menkov L.S., Maksimov S.G., Fedoseev V.V. // *Theoretical and Mathematical Physics*. **126**. 110. (2001).
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 9. Статистическая физика, часть 2. Теория конденсированного состояния. М.: Физматлит, 2001.
- [15] Andreev P.A., Mosaki I.N., Trukhanova M.I. // *Phys. Fluids*. **33**. 067108. (2021).
- [16] Силлин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. URSS, 2019.
- [17] Куммель Ч. Введение в физику твёрдого тела. М.: Наука, 1978.
- [18] Kotliar G., Savrasov S.Y., Haule K. et al. // *Rev. Mod. Phys.* **78**. 865. (2006).
- [19] Andreev P.A., Kuz'menkov L.S. *Phys. Rev. A*. **78**. 053624. (2008).
- [20] Andreev P.A. // *Laser Phys*. **31**. 045501. (2021).
- [21] Andreev P.A., Kuz'menkov L.S. // *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2019**. 053J01. (2019).
- [22] Mahajan S.M., Asenjo F.A. // *Phys. Rev. Lett.* **107**. 195003. (2011).
- [23] Koide T. // *Phys. Rev. C* **87**. 034902. (2013).
- [24] Uzdensky D.A., Rightley S. // *Rep. Progr. Phys.* **77**. 036902. (2014).

## Quantum hydrodynamic representation of the exchange interaction in the theory of description of magnetically ordered media

P.A. Andreev<sup>1,a</sup>, M.I. Trukhanova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

<sup>2</sup>Nuclear Safety Institute of the Russia Academy of Sciences, Moscow 115191, Russia

E-mail: <sup>a</sup>andreevpa@physics.msu.ru, <sup>b</sup>trukhanova@physics.msu.ru

Ferromagnets, multiferroics and other magnetically ordered materials are described by various models of the evolution of the magnetization of the medium. In this paper, we develop the method of many-particle quantum hydrodynamics for such media. We use the Heisenberg Hamiltonian and derive an equation for the evolution of macroscopic magnetization, corresponding to the non-dissipative version of the Landau-Lifshitz equation for particles with spin 1/2. It is shown that the well-known form of the contribution of the exchange interaction to the Landau-Lifshitz equation arises in the third order in terms of the interaction radius. The possibilities of the systematic generalization of the result obtained are discussed when considering the fifth order in the interaction radius or when considering particles with a large spin.

PACS: 75.10.Dg, 75.10.-b.

*Keywords:* ferromagnetism, quantum hydrodynamics, Heisenberg Hamiltonian, Landau-Lifshitz equation.

*Received 08 May 2023.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 4. Pp. 445-452.

### Сведения об авторах

1. Труханова Мария Ивановна — канд. физ.-мат. наук, ассистент; e-mail: [rukhanova@physics.msu.ru](mailto:rukhanova@physics.msu.ru).
2. Андреев Павел Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: [andreevpa@physics.msu.ru](mailto:andreevpa@physics.msu.ru).