

## Паттерный анализ фракталоподобных систем

Ю. В. Рыжикова,<sup>1,\*</sup> С. Б. Рыжиков<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 20.02.2023; после доработки 22.05.2023; принята к публикации 13.06.2023)

Изучены особенности фурье-спектров фракталоподобных систем. На основе теоретических исследований определены особенности инвариантов скейлинга рассматриваемых объектов в световых полях, проявляющиеся в форме устойчивых локальных образований — паттернов. Особое внимание уделено проблеме устойчивости соотношений скейлинговых характеристик анализируемых систем и их фурье-образов. Рассмотрена возможность идентификации и систематизации различных фрактальных систем на основе оценки их скейлинговых параметров. Анализ устойчивости скейлинговых параметров зондирующего излучения к изменению параметров исследуемых систем указывает на перспективность паттерного подхода к совершенствованию методов оптической диагностики.

PACS: 42.25.Fx; 61.43.Nv; 07.05.Tr УДК: 535.015

Ключевые слова: фракталы, паттерны, фурье-анализ, скейлинг, оптическая диагностика, решетчатые объекты, дендриты, 2D функция Вейерштрасса, аппроксиманты.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2340406

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время паттерный анализ различных структур успешно применяется в междисциплинарных исследованиях, в том числе для описания их оптических характеристик [1, 2] (см. также статью Д.Д. Ружицкой и др. в этом журнале № 5. С. 3. (2021)). Под паттернами обычно понимают устойчивые структурные образования или регулярные закономерности, проявляющиеся в отдельных диапазонах анализируемых характеристик различных объектов или процессов. Регистрируя наличие и форму того или иного паттерна, можно судить об особенностях пространственной структуры исследуемой системы, а также о динамике ее изменения. Несмотря на широкое распространение спектрального анализа фрактальных объектов [3–6], базирующегося на выполнении пространственного фурье-преобразования, вопрос об устойчивости и характере связи структурных характеристик объекта с формой распределения его пространственных частот остается недостаточно изученным. Специфику отдельных видов фракталов можно учесть на основе анализа их спектральных свойств. Условно фракталы можно разбить на четыре основные группы. К первой группе относятся фракталы, в структуре и фурье-спектре которых в явном виде присутствуют самоподобные элементы с определенным соотношением их размеров. Это соотношение определяет так называемый коэффициент скейлинга  $\zeta$ , который является инвариантом рассматриваемых систем. Фракталы первой группы характеризуются наличием одного постоянного коэффициента скейлинга  $\zeta$  как

в структуре, так и в фурье-спектрах. Примерами двумерных фракталов первой группы являются ковер Серпинского, 2D-решетчатые структуры Кантора и их аппроксиманты и др. [7, 8].

Ко второй группе относятся объекты, обладающие внутренней (или скрытой) симметрией самоподобия (объекты Фибоначчи, двойного периода, Морса–Туэ и др. [9, 10]). Фракталоподобные структуры этой группы характеризуются наличием фрактальности фурье-спектров с одним значением коэффициента скейлинга.

Фракталы третьей группы отличаются от первых двух тем, что им присуще различие коэффициентов скейлинга в геометрии фрактала и его фурье-образе. К этой группе относятся так называемые звездные фракталы, некоторые системы Линденмайера или L-системы, например «снежинка» [11].

К четвертой группе относятся фрактальные объекты, которые не обладают фрактальностью фурье-спектров. К ней относятся дендритные структуры и фракталы, построенные на основе свойств множества Мандельброта (см. [12] и вышеуказанную статью Д.Д. Ружицкой и др.).

Кроме этого, существуют фракталы, занимающие промежуточное место, например 2D-системы Вейерштрасса при изменении начальных параметров меняют первую группу предлагаемой классификации на третью.

Целью данной работы является анализ устойчивости скейлинговых параметров зондирующего излучения к изменению геометрических параметров исследуемых фракталоподобных систем. Решение этой задачи опирается на поиск инвариантов (скейлинговых параметров) и оценку их устойчивости для структур рассматриваемых объектов и их фурье-образов, что дополняет критерии идентифика-

\* E-mail: ryzhikova.ju@physics.msu.ru

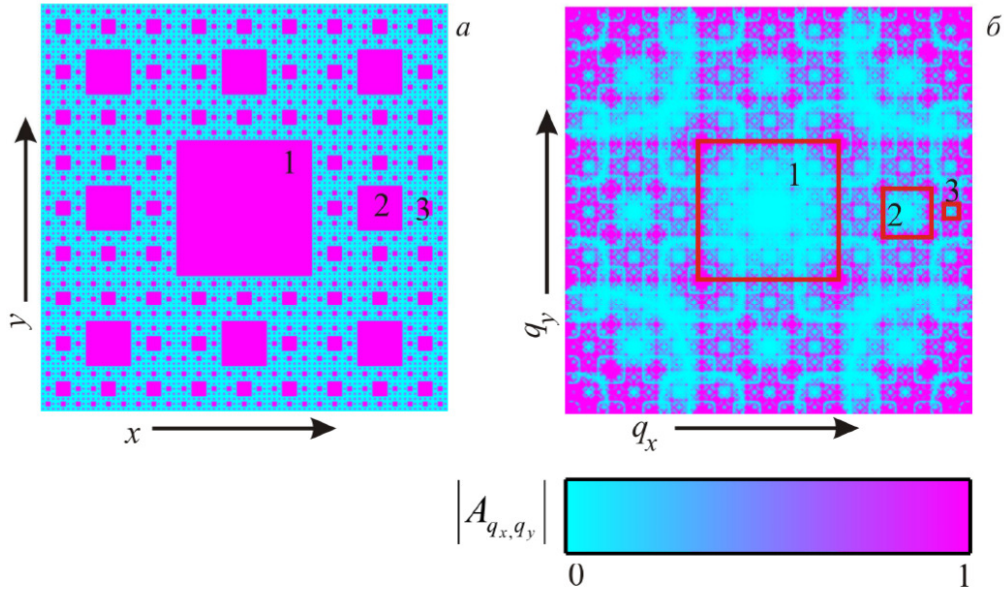


Рис. 1. Ковер Серпинского (а) и его пространственный спектр (б).  $x, y$  — поперечные координаты в плоскости объекта,  $q_x, q_y$  — пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта (а) и элементы паттерных образований в поле дифракции (б).  $A_{q_x, q_y}$  — амплитуда поля дифракции в дальней зоне

ции фракталоподобных систем. Кроме того, была дополнена классификация фрактальных структур по скейлинговым признакам, проявляющимся как в самих объектах, так и в их фурье-образах.

Проведенное исследование морфологических особенностей анализируемых фракталов и их спектральных характеристик базируется на основе матричных преобразований с привлечением фрактальной параметризации и паттерного подхода к совершенствованию методов оптической диагностики [10–12].

### 1. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР РАЗНЫХ ГРУПП

Для построения фракталов разных групп и моделирования их свойств использовались разработанные ранее алгоритмы формирования дендритов ([13] и вышеуказанная статья Д.Д. Ружицкой и др.) и свойства известных числовых последовательностей Фибоначчи, Морса–Туэ, двойного периода, множества Мандельброта, Кантора и его двумерного аналога (ковра Серпинского) [9], а также модифицированной двумерной функции Вейерштрасса [14, 15].

Расчет распределений амплитуд дифракционных картин фракталов разных групп производился нахождением фурье-образов их структуры [3, 4, 10]. Так, поле дифракции в дальней зоне характеризуется амплитудой  $A_q$  или  $A_{q_x, q_y}$  для одномерных или

двумерных структур соответственно:

$$A_q = \sum_{j=1}^J P^o(j) \omega_J^{(j-1)(q-1)} = F(P^o); \quad (1)$$

$$A_{q_x, q_y} = F(F(P^o)^T)^T,$$

где  $\omega_J = \exp\{-2\pi i s/J\}$ ,  $q, q_x, q_y$  — нормированные пространственные частоты,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $J$  — число элементов,  $s$  — масштабирующий множитель,  $P^o$  — бинарная функция пропускания фрактального объекта,  $T$  — неспрягаемое матричное транспонирование.

Время выполнения (1) зависит от длины преобразования. Это достигается быстрее всего при числе элементов, выраженных через степени двойки [16].

Бинаризация анализируемых структур дает возможность их представления в виде чередующихся в определенном порядке нулей и единиц  $\{0, 1\}$ , где значение 1 соответствует положению рассеивающего центра, а 0 — свободной вакансии.

Отметим, что фурье-спектры (1) рассматриваемых фрактальных объектов наиболее отчетливо передают их самоподобные свойства. Это согласуется с литературными данными [4, 7, 15, 17].

Для примера на рис. 1 приведен фрактал первой группы — ковер Серпинского и его пространственный спектр. Расчеты показывают, что инвариантом — наиболее устойчивым параметром для оценки самоподобия как исследуемых структур, так и их спектральных характеристик является коэффициент скейлинга  $\varsigma$ . Безразмерные коэффициенты скейлинга  $\varsigma$  структуры и ее фурье-спектра (см. рис. 1) определяются отношением сторон выделенных квадратных областей — паттернов (обозначен-

ны цифрами) — по принципу большая к меньшей и равны 3.

Решетчатые объекты второй группы предложенной классификации формировались на основе блочного метода с использованием элементов двух типов  $A$  и  $B$ , порядок чередования которых удовлетворял используемым аperiodическим числовым последовательностям. В качестве примера выберем двумерные решетки, построенные с использованием свойств числовой последовательности Фибоначчи  $\{A, B\}$ . Эти последовательности представлялись в виде чередующихся в определенном порядке нулей и единиц  $\{A, B\} = \{0, 1\}$ . Переход к более высокому структурному уровню решетки с большим количеством элементов в последовательности осуществляется с помощью правила замещения  $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$ .

На основе таких последовательностей формировались двумерные матрицы  $Q_{mn}$  и  $C_{mn}$  с различным расположением рассеивающих центров, формирующие двумерную структуру решеток [18]. На рис. 2, а, б приведены фрагменты разных решеток Фибоначчи, построение которых производилось с использованием матриц  $C_{mn}$  и  $Q_{mn}$ , соответственно. Несмотря на заметные отличия в распределении рассеивающих центров, двумерные решетки имеют совпадающие по форме фурье-образы (рис. 2, в). Паттерны, несущие информацию о структуре и фурье-спектре, помечены пунктиром.

Рассмотренный пример показывает, что даже в тех случаях, когда исследуемая структура не имеет выраженных фрактальных признаков, ее фурье-образ обладает внутренней симметрией самоподобия и несет информацию о скрытых геометрических пропорциях. Эти пропорции характеризуются коэффициентом скейлинга  $\zeta = \frac{ab}{ac} = \frac{ac}{dc} = \frac{dc}{de} = \frac{bf}{gf} = \frac{gf}{gh} \approx 1.618 \approx \Phi$ , где  $\Phi$  — коэффициент золотого сечения [18],  $a-h$  — реперные максимумы.

Также для 2D решетчатых структур с внутренней симметрией самоподобия были найдены инварианты — коэффициенты скейлинга, устанавливающие связь между структурными особенностями объектов и их пространственными спектрами. Коэффициенты скейлинга как в самих структурах, так и в их пространственных фурье-спектрах равны  $\zeta \approx 1.6$  (1D–2D объекты Фибоначчи) и  $\zeta \approx 2$  (1D–2D структуры Морса–Туэ и двойного периода).

Вопрос об устойчивости фурье-образов решетчатых структур решался путем рассмотрения их аппроксимантов. Аппроксиманты  $A_l$  рассматриваемых структур формируются на основе блочного метода [9] и представляются в виде последовательностей элементарных ячеек  $S_l: A_l = \{S_l\}^p$ , где  $l$  — уровень генерации, используемой аperiodической числовой последовательности,  $p$  — порядок аппроксиманта, определяемый числом элементарных ячеек.

Результаты моделирования показали, что значения коэффициентов скейлинга  $\zeta$  фурье-образов ис-

следуемых структур совпадают с соответствующими коэффициентами скейлинга  $\zeta$ , полученными для их аппроксимантов, сформированных по схожим геометрическим правилам построения.

Третью группу фрактальных объектов образуют структуры с неоднозначным соотношением между размерами самоподобных элементов, принадлежащих соседним уровням используемого алгоритма их построения. В частности, к этой группе могут быть отнесены фрактальные объекты со сложной природоподобной геометрией, полученные в результате применения стандартной процедуры построения  $L$ -систем, а также звездные фракталы различной геометрии [11, 19]. На рис. 3 в качестве примера приведен  $L$ -фрактал с геометрией снежинки и звездный фрактал с геометрией шестиугольника и их пространственные спектры.

Оценку коэффициента скейлинга на рис 3, а можно проводить или по изменению отношений размеров шестиугольных элементов  $\zeta = \frac{ob}{oa} = 3$  или же по размерам подобных участков ветвей, идущих из центра  $\zeta = \frac{oc}{bc} = 2.5$ . Особенность структуры на рис. 3, а состоит в том, что скейлинг характеристик ее фурье-образа на рис. 3, в определяется единым коэффициентом скейлинга. Соотношение размеров шестиугольных и треугольных элементов в картине дифракции дает для него величину  $\zeta = \frac{ob}{oa} = 2$ .

Моделирование объектов, обладающих звездной геометрией, осуществлялось на основе известной итерационной процедуры [11]. При ее выполнении задаются фракталы в виде замкнутых ломаных линий, последовательные отрезки которых пересекаются под одним и тем же углом  $\alpha$ . Рекуррентные соотношения, по которым определяется длина  $J+2$ -го отрезка при известной  $J+1$  длине отрезка для пространственных координат  $x$  и  $y$ , имеют вид

$$\begin{cases} x_{J+2} = x_{J+1} + \sin \alpha \cdot l_1 \cdot Z(R^n) \\ y_{J+2} = y_{J+1} - \cos \alpha \cdot l_1 \cdot Z(R^n) \end{cases}, \quad (2)$$

где  $l_1$  — заданная длина отрезка,  $Z(R^n)$  — функция выбора длины звена ломаной линии,  $R$  — параметр изменения длин,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — общее число шагов алгоритма построения.

Определение коэффициента скейлинга можно проводить по отношению сторон самоподобных элементов (обозначены цифрами 1, 2 на рис. 3, б), соответствующих соседним итерациям. Так, для звездного фрактала типа «шестиугольник» ( $\alpha = \pi/3$ ;  $R = 0.31$ ;  $l_1 = 220$ )  $\zeta = \zeta_{mn} = \zeta_{12} = AB/BC \approx 3.4$  и  $\zeta_{23} = BC/CD \approx 2.8$ , где  $m, n$  — итерационные индексы. Особенность таких структур состоит в том, что скейлинг характеристик их фурье-образов можно определить единым коэффициентом скейлинга. Так, соотношение размеров фиксируемых паттерных образований в центрированной картине дифракции рассматриваемого фрактала дает для него величину  $\zeta = OR/OP \approx 2$ . При варьировании угла  $\alpha$  изменяется форма звездных фракталов и их скейлинговые коэффициенты.

Проведенное исследование показало, что структура фурье-образов рассмотренных фрактальных

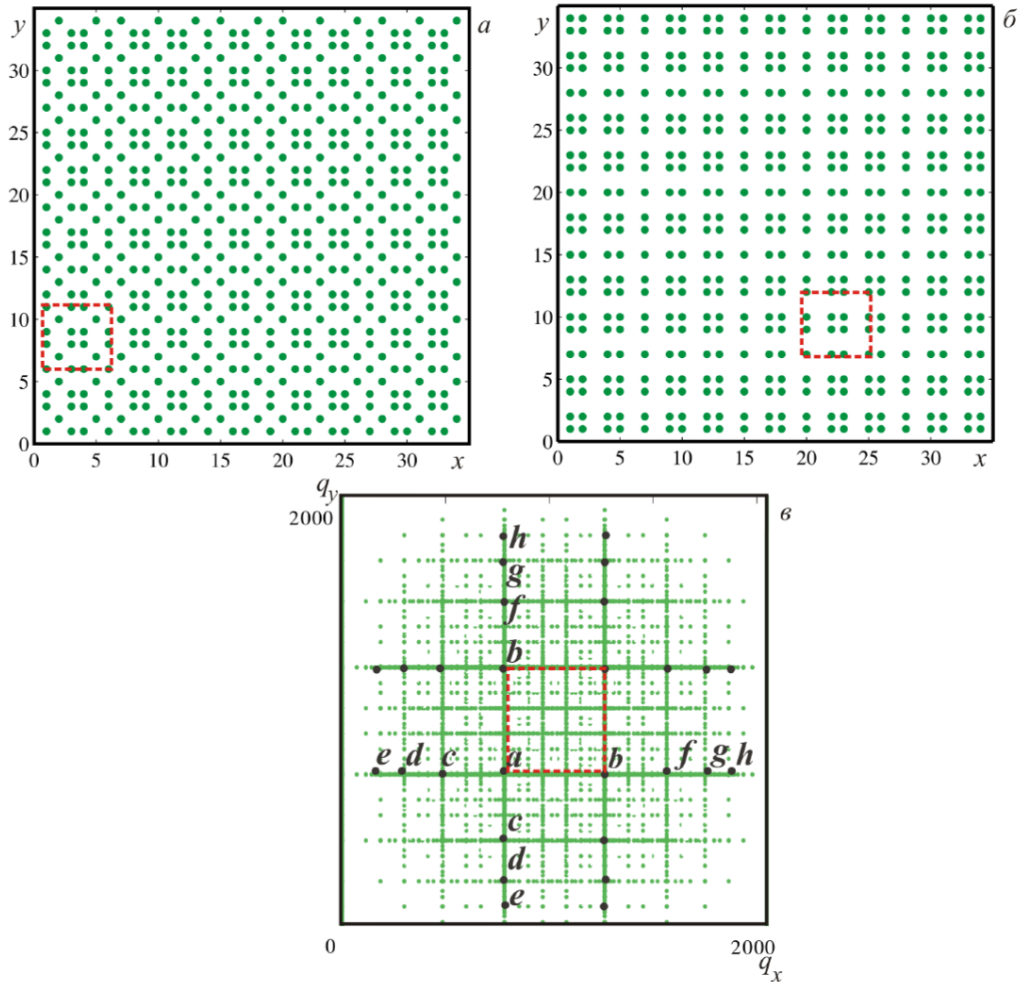


Рис. 2. Примеры двумерных решеток Фибоначчи ( $a$ ,  $b$ ) и их фурье-спектр ( $c$ );  $a$ – $h$  — реперные максимумы пространственного спектра, величины  $x$ ,  $y$ ,  $q_x$ ,  $q_y$  приведены в относительных единицах. Пунктиром выделены паттерны

объектов первого и третьего типов характеризуется наличием сходных по форме паттернов. Так, из представленных на рис. 1 и рис. 3 результатов видно, что паттерные образования, фиксируемые как в структуре, так и в пространственном спектре, сходны по форме.

К четвертой группе относятся самоподобные объекты, которые не обладают фрактальностью пространственных фурье-спектров. Примерами таких фракталов являются дендриты ([13] и вышеуказанная статья Д.Д. Ружицкой и др.), а также фрактальные структуры, которые создавались на основе использования свойств множеств Мандельброта и Жюлиа [6, 12, 19].

В качестве примера на рис. 4 приведены дендритные структуры. Их фрактальный рост показан изменением цвета составляющих частиц. Паттернами структуры центрально-симметричных дендритов являются уменьшенные копии дендрита, взятые на разных этапах его фрактального роста.

Предложенная нами модель формирования дендрита со спонтанно образующимися центрами ро-

ста [13] не учитывает явным образом абсолютные размеры частиц, образующих фрактальные кластеры. Размеры составляющих дендрит частиц задаются относительными величинами, связанными с размерами модельной сетки.

На рис. 4 показаны дендриты с разным числом частиц, полученные при разных условиях и их сходный по форме паттерн в фурье-образе (рис. 4,  $c$ ). На пространственном спектре (рис. 4,  $c$ ) видны кольца разной амплитуды, число и радиусы которых определяются параметрами задачи агрегации (размеры дендрита, размеры составляющих дендрит частиц). Причем радиусы и видимость колец прямо связаны с линейными размерами отдельной взятой частицы по отношению к размерам самого дендрита, что описывается теориями Фраунгофера и Ми. Так, радиусы соответствующих колец растут при уменьшении относительного размера частицы, и наоборот, уменьшаются при увеличении последних. Аналогично радиусы колец растут при увеличении числа частиц, составляющих дендрит. Дендрит на рис. 4,  $a$  получен с помо-



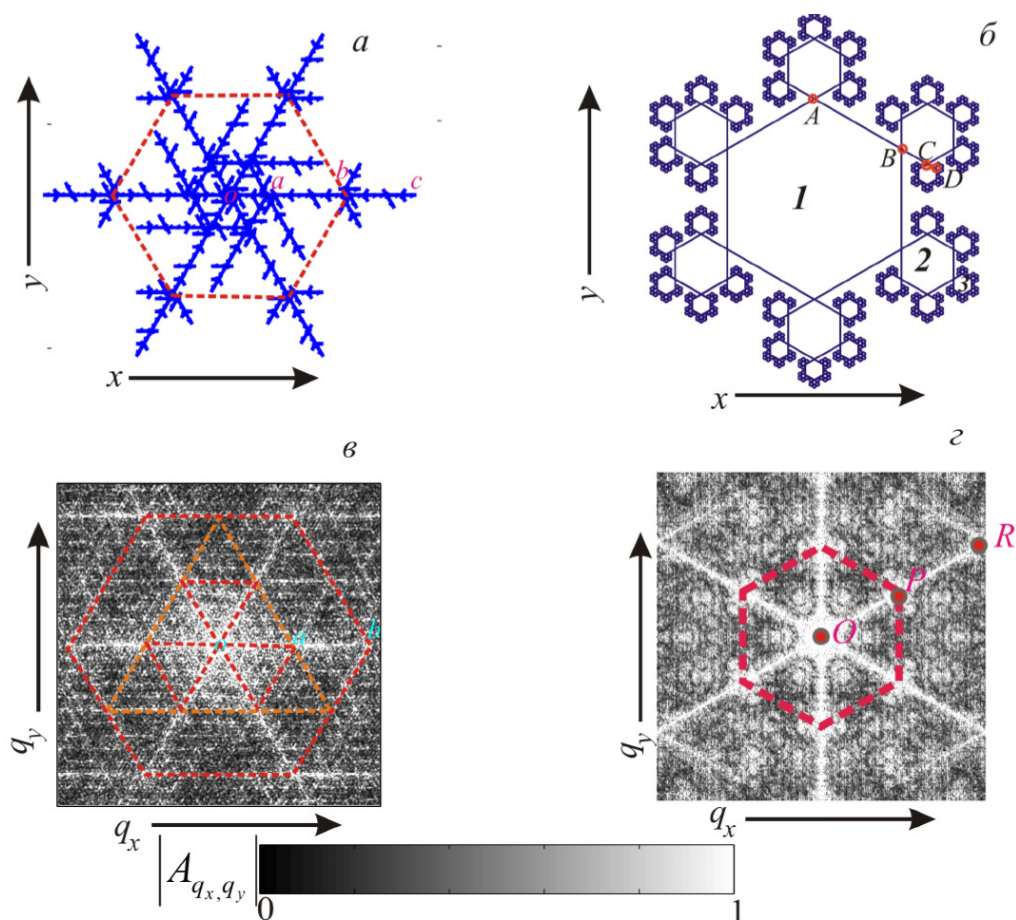


Рис. 3. Структура  $L$  фрактала с геометрией снежинки (а) и звездного фрактала «шестиугольник» (б) и их пространственные спектры (е) и (z) соответственно.  $x, y$  — поперечные координаты в плоскости объекта,  $q_x, q_y$  — пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта (б) и пунктиром элементы паттернов

щью метода [13] в отсутствии магнитного поля, и рис. 4, б получен по методу [20] с учетом воздействия магнитного поля и неоднородности составляющих дендрит частиц. Результаты моделирования показывают, что структуре дендрита ставится в соответствие несколько разных параметров скейлинга. Так, для структур дендритов классической модели диффузия, ограниченной агрегацией (ДОВА) [21, 22], вычисленные параметры скейлинга принимают значения:  $\zeta_1 \approx 1.4 \pm 0.1$ ;  $\zeta_2 \approx 1.8 \pm 0.1$ ;  $\zeta_3 \approx 2.1 \pm 0.1$ ;  $\zeta_4 \approx 2.4 \pm 0.1$ . Детальный алгоритм определения коэффициентов скейлинга дендритов приводятся в обзорной работе Д.Д. Ружицкой и др. в этом журнале № 5, С. 3. (2021). Анализ полученных результатов показывает, что приложенное внешнее магнитное поле приводит к изменению морфологии дендрита и его фрактальная размерность начинает возрастать. Причем чем выше значение приложенного поля, тем более сильные искажения проявляются в структуре кластера. Так, при высоком значении приложенного магнитного поля ветви дендрита начинают закручиваться по спирали (проявление хирально-

сти), а в отдельных случаях способны вырождаться в игольчатые структуры.

При сравнении характеристик фракталов различных типов следует указать на важное значение уникальных свойств дендритных образований. Особенности динамических характеристик дендритов во многом обусловлены фактом наличия ограничений на изменение фрактальной размерности при увеличении числа образующих частиц. Несмотря на определенный разброс предельных значений фрактальной размерности, наиболее характерным оказывается значение близкое к величине  $D = 1.71$  ( $2D$  — модели без воздействия магнитного поля). Этот феномен в литературе известен как «геометрическое критическое явление». Он свойствен как искусственно построенным по технологии «ограниченная диффузией агрегация» дендритам неживого происхождения, так и дендритам, формирующим определенные биологические структуры и объекты.

Кроме этого, существуют фракталы, занимающие промежуточное место между приведенными группами. Например, 2D-системы Вейерштрасс-

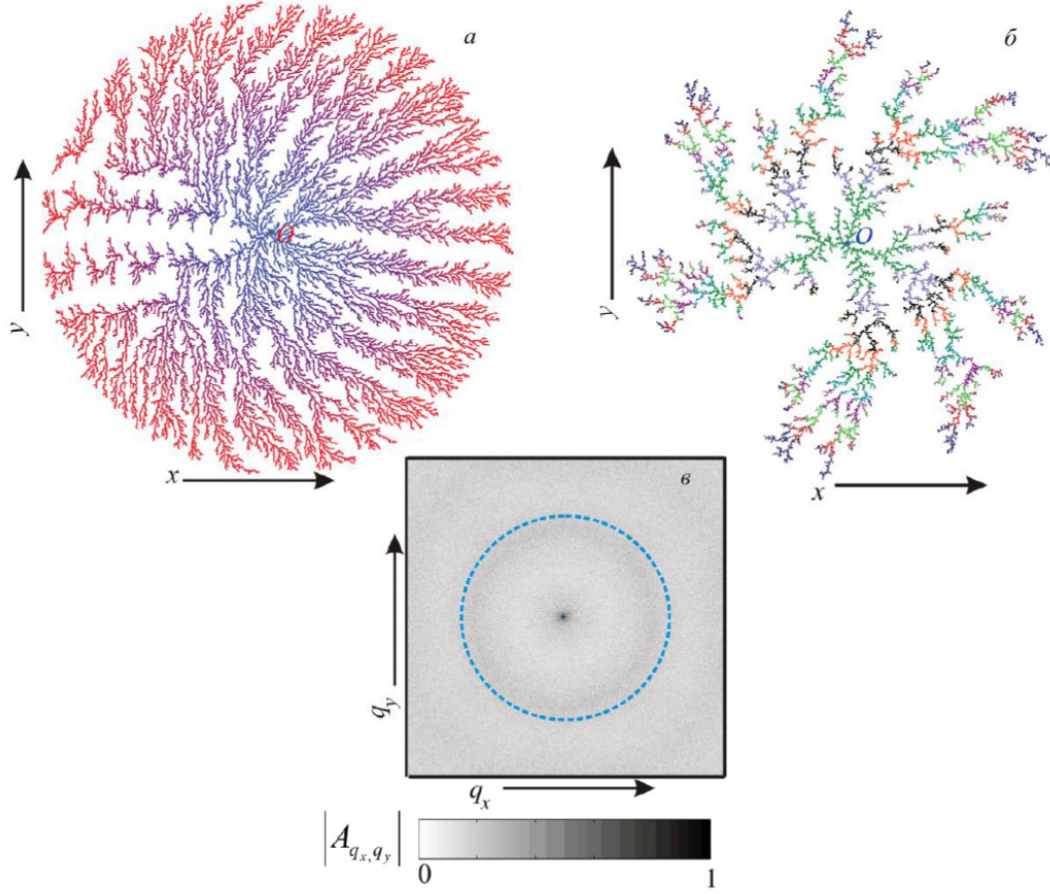


Рис. 4. Структуры дендритов с клеточной фрактальной размерностью  $D = 1.71$  (а) и  $D = 1.88$  (б) и типичный вид пространственного спектра приведенных дендритов (в).  $x, y$  — поперечные координаты в плоскости объекта,  $q_x, q_y$  — пространственные частоты.  $A_{q_x, q_y}$  — амплитуда поля дифракции в дальней зоне. Цветом на (а) и (б) выделен прирост фрактальных кластеров. Число частиц дендритов  $N = 70000$  (а) и  $N = 10000$  (б). Пунктиром выделен паттерн фурье-преобразования

са при изменении начальных параметров меняют первую группу предлагаемой классификации на третью.

Для формирования таких двумерных структур использовалась модифицированная 2D-функция Вейерштрасса (3) [14]:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(x, y) = & \left( C \cdot \sum_{n=0}^{N-1} b^{(D-3) \cdot n} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{m=1}^M \sin \left[ K \cdot b^n \times (A_m x + B_m y) + \phi_{n,m} \right] \right)^2, \quad (3) \\ A_m = & \cos \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{M} \right), \quad B_m = \sin \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{M} \right), \end{aligned}$$

где  $x, y$  — поперечные координаты;  $C$  — нормировочная константа;  $b > 1$  — параметр пространственно-частотного масштабирования;  $D$  — фрактальная размерность ( $2 < D < 3$ );  $K$  — основное пространственное волновое число;  $N$  и  $M$  — число гармоник,  $\phi_{n,m}$  — фаза, заданная в интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Для удобства выявления самоподобных свойств функции (3) было проведено ее дополнительное масштабирование:

$$W(x, y) = (\alpha + \tilde{W}(x, y))/2, \quad (4)$$

где  $\tilde{W}(x, y) > \alpha$ , значение  $\alpha$  выбиралось равным  $\alpha = 0.4$ .

На рис. 5, а представлен рассчитанный 2D-график функции  $W(x, y)$  при  $\phi_{n,m} = \pi/4$ . Использовались следующие значения параметров (3):  $C = 0.04$ ;  $b = 2$ ;  $D = 2.15$ ;  $K = 1.5$ ;  $M = N = 15$ . Величины  $x, y$  задавались в области  $[-10, 10]$  с числом точек разбиения отрезка  $J = 512$ . В качестве паттернов приводятся кольца  $b, a$ .

Существенным образом изменялась структура изображения, когда значение фазы  $\phi_{n,m}$  приобретало случайное распределение в интервале  $[-\pi, \pi]$  при сохранении значений других параметров, как показано на рис. 5, б. В этом случае вид изображения приобретал спеклоподобный вид нейроноподобных нитевидных кластеров. В нем можно выделить локальные паттерны  $A$  и  $B$  (выделены пунктиром) с локальными коэффициентами скейлинга

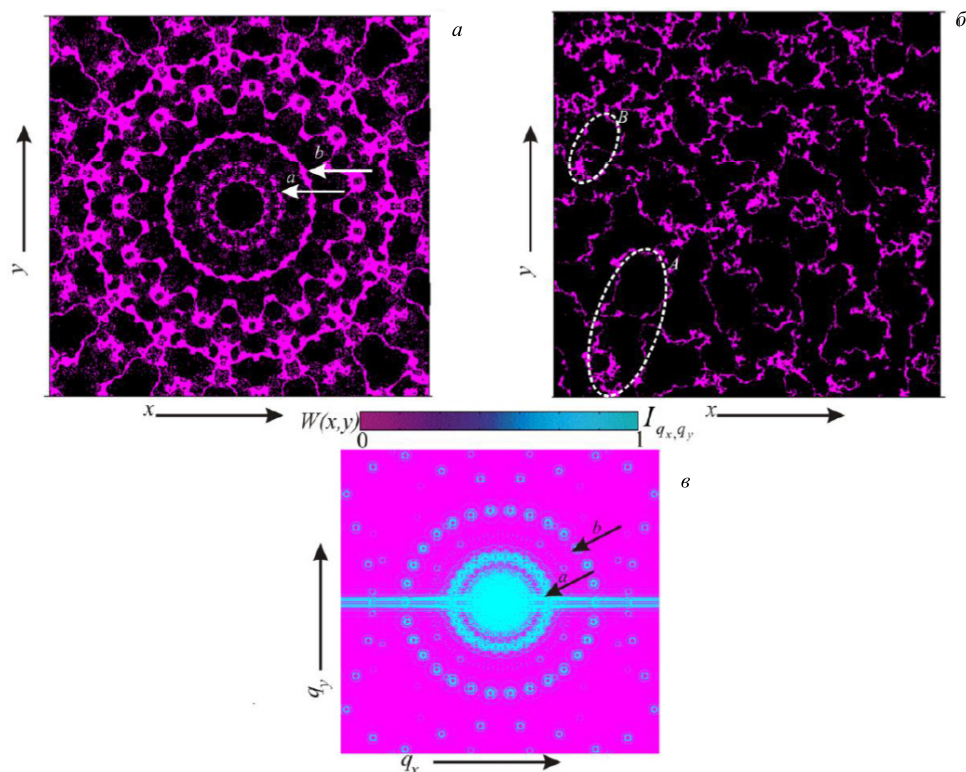


Рис. 5. 2D-представление функции  $W(x, y)$  с постоянной фазой  $\phi_{n,m} = \pi/4$  (а) и фазой распределенной по случайному закону (б). Форма их фурье-спектров  $I_{q_x, q_y}$  (в).  $I_{q_x, q_y}$  – коэффициенты фурье-разложения функции (по мощности); координаты  $x, y$  представлены в условных единицах. Паттерны – кольца  $b$  и  $a$ . Локальные паттерны выделены пунктиром

$\zeta_{\max} \approx 2.1$ ,  $\zeta_{\min} \approx 1.7$  (отношение длин и ширины паттернов  $A/B$ ). Однако, учитывая статистический характер формируемых спеклоподобных изображений, локальные коэффициенты скейлинга немного отличаются для разных реализаций. На рис. 5, в показан спектр Фурье (по мощности) двумерной функции Вейерштрасса (4). Отношение радиусов соседних колец  $b/a$ , (рис. 5, а и рис. 5, в) определяющее величину коэффициента скейлинга  $\zeta$  близко к величине  $\zeta \approx 2$ . При изменении фазы (рис. 5, а, б) форма и коэффициент скейлинга фурье-спектра кардинальным образом не менялись (рис. 5 в).

Таким образом, дополнена классификация фрактальных структур – по типу проявления их скейлинга как в самих объектах, так и в их пространственных спектрах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные расчеты показали, что скейлинговыми свойствами обладают рассмотренные фрактальные объекты различных групп и их фурье-образы. Определены паттерные образования, как в структуре объектов, так и их пространственных спектров.

Рассчитанные коэффициенты скейлинга, характеризующие масштабную инвариантность, в сочетании с определением фрактальной размерности и областью скейлинга служат системами идентификаторов для диагностики анализируемых структур.

Проведенное исследование, подтверждающее наличие устойчивой количественной взаимосвязи между морфологическими свойствами фрактальных объектов и их оптическими характеристиками, дает возможность проводить идентификацию фрактальных объектов на основе определения скейлинговых параметров и привлечения паттерного анализа.

[1] Рыжикова Ю.В., Мухартова Ю.В., Рыжиков С.В. // Изв. РАН. Сер. физ. 84, №1. 142. (2020). (Ryzhikova Yu.V., Mukhartova Yu.V., Ryzhikov S.V. // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. 84, N 1. 111. (2020)).

[2] Денисов Е.В., Вечерин А.В., Коростелева Е.Ю., Яксик Э. // Вестник ВГУ. Серия: Право. № 3 (50). 300. (2022).

[3] Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 2. С. 20.



- (2011). <http://vnu.phys.msu.ru/abstract/2011/2/11-2-020> (Bogolyubov A.N., Petukhov A.A., Shapkina N.E. // Moscow Univ. Phys. Bull. **66**, N 2. 122. (2011)).
- [4] Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г. // Изв. РАН. Сер. физ. **74**, № 10. 1432. (2010). (Arzamasceva G.V., Evtikhov M.G., Lisovskii F.V., Mansvetova E.G. // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. **74**, N 10. 1370. (2010)).
- [5] Korolenko P., Ryzhikova Yu. // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **862**. 052079. (2020).
- [6] Короленко П.В., Косырев А.В., Рыжикова Д.Д. и др. // Физические основы приборостроения. **10**, № 1. 62. (2021).
- [7] Negro L.D. Optics of Aperiodic Structures — Fundamentals and Device Applications. / CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
- [8] Ryzhikova Y.V., Korolenko P.V., Ryzhikov S.B. // Progress In Electromagnetics Research Symposium Spring (PIERS). St. Petersburg, Russia. P. 2742-2745. (2017).
- [9] Albuquerque E.L., Cottam M.G. // Phys. Rep. **376**. 225. (2003).
- [10] Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V. // Physics of Wave Phenomena. **21**(4). 256. (2013).
- [11] Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. / Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [12] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. / М.: Институт компьютерных исследований, 2002. (Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. Freeman: N.Y., 1983).
- [13] Косырев А.В., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В. // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, № 1. 74. (2021). (Kosyrev A.V., Korolenko P.V., Ryzhikova Yu.V. // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **85**, N 1. 57. (2021)).
- [14] Потапов А.А. // Журнал радиоэлектроники. № 1. 1. (2010).
- [15] Зотов А.М., Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В. // <http://vnu.phys.msu.ru/abstract/2019/6/19-6-052> Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 6. 52. (2019). (Zotov A.M., Korolenko P.V., Mishin A.Yu., Ryzhikova Yu.V. // Moscow Univ. Phys. Bull. **74**, N 6. 625. (2019)).
- [16] Кандидов В.П., Чесноков С.С., Шленов С.А. Дискретное преобразование Фурье. Учебное пособие. / М.: физический факультет МГУ, 2019.
- [17] Macia E. E // Rep. Prog. Phys. **75**. 036502. (2012).
- [18] Зотов А.М., Ким Е.Г., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. **18**, № 12. 10. (2013).
- [19] Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / М.: Постмаркет, 2000.
- [20] Рыжикова Д.Д., Рыжикова Ю.В. // Изв. РАН. Сер. физ. **86**. 902. (2022). (Ruzhitskaya D.D., Ryzhikova Yu.V. // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. **86**, N 6. 756. (2022)).
- [21] Witten Jr T. A., Sander L. M. // Phys. Rev. Let. **47**, N 19. 1400. (1981).
- [22] Ryzhikova Yu., Mukhartova Iu., Ryzhikov S. // J. of Physics: Conference Series. **1141**. 012059. (2018).

## Pattern analysis of fractal-like systems

Yu.V. Ryzhikova<sup>a</sup>, S.B. Ryzhikov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

E-mail: <sup>a</sup>[ryzhikovaju@physics.msu.ru](mailto:ryzhikovaju@physics.msu.ru)

The features of the Fourier spectra of fractal-like systems are studied. On the basis of theoretical studies, the features of the scaling invariants of the objects under consideration in light fields are determined, which manifest themselves in the form of stable local formations — patterns. Particular attention is paid to the problem of stability of the ratios of the scaling characteristics of the analyzed systems and their Fourier transforms. The possibility of identifying and systematizing various fractal systems based on the estimation of their scaling parameters is considered. An analysis of the stability of the scaling parameters of the probing radiation to changes in the parameters of the systems under study indicates that the pattern approach to improving the methods of optical diagnostics is promising.

PACS: 42.25.Fx; 61.43.Hv; 07.05.Tr

Keywords: fractals, patterns, Fourier analysis, scaling, optical diagnostics, lattice objects, dendrites, 2D Weierstrass function, approximants.

Received 20 February 2023.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 4. Pp. 513-520.

### Сведения об авторах

1. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: [ryzhikovaju@physics.msu.ru](mailto:ryzhikovaju@physics.msu.ru).
2. Рыжиков Сергей Борисович — доктор пед. наук, доцент кафедры общей физики; тел.: (495) 939-57-40.