ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Поляризация вакуума в гравитационном поле космической струны

Ю. В. Грац,[1,*] П. А. Спирин[1,†]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 14.06.2023; после доработки 26.06.2023; принята к публикации 29.06.2023)

В рамках однопетлевой квантовой гравитации рассмотрен эффект поляризации вакуума массивного скалярного поля с минимальной связью вблизи прямолинейной космической струны. Показано, что относительный вклад массивных полей в перенормированное вакуумное среднее тензора энергии-импульса (ТЭИ) становится пренебрежимо малым уже на расстоянии нескольких комптоновских длин волн от струны.

PACS: 11.25.Wx. УДК: 53.02

Ключевые слова: поляризация вакуума, эффективное действие, размерная регуляризация.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2350101

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с середины прошлого века квантовая теория поля в искривленном пространстве–времени привлекает к себе все большее внимание. Являясь прямым доказательством существования связи между квантованными полями и макроскопическими внешними условиями, эта теория представляет интерес с точки зрения как фундаментальной, так и прикладной физики. Меняя спектр вакуумных флуктуаций, кривизна пространства–времени порождает конечную добавку к энергии вакуума.

Одной из задач последнего типа является задача о поляризации вакуума в гравитационном поле космической струны.

Космические струны представляют собой одномерные протяженные замкнутые или бесконечные топологические дефекты, которые могли образоваться при космологических фазовых переходах [1, 2]. В настоящее время космические струны рассматриваются как возможная причина ряда наблюдаемых эффектов [3]. Это стимулирует поиск путей их обнаружения и, как следствие, изучение особенностей поведения классической и квантованной материи в конических пространствах.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением пространства–времени бесконечно тонкой прямолинейной струны. Замечательной особенностью прямолинейной струны является ее так называемая гравитационная стерильность, под которой понимается равенство нулю ньютоновского гравитационного потенциала прямолинейной струны и которая проявляется в отсутствии гравитационного взаимодействия между струной и окружающей материей на классическом уровне [1, 2]. Однако глобальное отличие конических пространств от пространства Минковского приводит к изменению спектра вакуумных флуктуаций квантованных полей и, как следствие, к появлению ряда нетривиальных квантово–гравитационных эффектов.

В случае безмассового поля вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса было вычислено в работах [4–10]. Целью настоящей работы является определение относительного вклада массивных мод в суммарный эффект поляризации вакуума в окрестности струны.

В работе используется система единиц $G = \hbar = c = 1$ и метрика пространства–времени с сигнатурой $(+\,,-\,,-\,,-\,)$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим четырехмерное пространство–время, которое представляет собой прямое произведение двумерного пространства Минковского (с координатами (t, z)) на двумерную риманову поверхность (с координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$). Тот факт, что двумерная риманова поверхность локально конформна евклидовой плоскости, позволяет соответствующим выбором координат привести метрику рассматриваемого пространства–времени к виду [11]

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - e^{-\sigma(\mathbf{x})}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right). \qquad (1)$$

В цилиндрически-симметричном случае $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(r)$, $r = [x_1^2 + x_2^2]^{1/2}$, и скалярная кривизна равна

$$R = e^{\sigma}\Delta_E\sigma\,, \qquad (2)$$

где Δ_E — двумерный евклидов лапласиан.

Для струны конечного радиуса r_0 внешняя область должна быть конической, но сглаживаться вершина конуса может разными способами. Поэтому, с учетом требования нужной гладкости кон-

* E-mail: grats@phys.msu.ru

† E-mail: salotop@list.ru

формного фактора σ, он должен быть выбран в виде [2]:

$$\sigma(r) = \begin{cases} 2(1-\beta) f(r/r_0)\,, & r \leqslant r_0\,; \\ 2(1-\beta)\ln(r/r_0)\,, & r \geqslant r_0\,, \end{cases} \tag{3}$$

где параметр $\beta < 1$, а $f(r)$ — дважды дифференцируемая функция радиальной координаты, удовлетворяющая условиям

$$f(r_0) = 0\,, \quad f'(r_0) = \frac{1}{r_0}\,. \tag{4}$$

При таком выборе конформного фактора скалярная кривизна

$$R(\mathbf{x}) = \Delta\sigma$$

(где Δ — ковариантный лапласиан, соответствующий метрике (1)) равна нулю всюду, где $r > r_0$:

$$R(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{\sigma(r)}\,\Delta_E\sigma(r)\,, & r \leqslant r_0\,; \\ 0\,, & r > r_0\,, \end{cases} \tag{5}$$

и в этой области метрика совпадает с метрикой бесконечно тонкой космической струны [12]. При этом критерием малости возмущения и возможности работать в рамках теории возмущений является малость параметров $(1-\beta)$. Предполагается, что для космических струн, рассматриваемых в рамках Теории Великого объединения (GUT), величина параметров $(1-\beta)$ имеет порядок 10^{-6}.

Рассматриваемая метрика является решением уравнения Эйнштейна, в правой части которого стоит тензор энергии-импульса (ТЭИ), tt-компонента которого равна

$$T_{tt} = \frac{R}{16\pi G} = \frac{1}{16\pi G}\, e^{\sigma}\Delta_E\sigma\,.$$

Следовательно, энергия струны дается выражением

$$\int T_{tt}\sqrt{-g}\,dz\,d^2x = \frac{1}{16\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int d^2x\,\Delta_E\sigma = \\ = \frac{1-\beta}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int d^2x\,\Delta_E f\,.$$

Таким образом, величину

$$\mu = \frac{1-\beta}{8\pi}\int d^2x\,\Delta_E f \tag{6}$$

можно интерпретировать как энергию на единицу длины струны.

Переход к пределу бесконечно тонкой струны предполагает стягивание носителя функции $\Delta_E\sigma$ в точку при сохранении численного значения интегралов по d^2x, т.е. при $r_0 \to 0$, что соответствует фиксации линейной плотности энергии струн.

Тогда, понимая указанный предел в смысле обобщенных функций, мы получаем

$$\lim_{r_0\to 0}\Delta_E\sigma = 4\pi(1-\beta)\,\delta^2(\mathbf{x})\,. \tag{7}$$

И, следовательно,

$$\sigma(\mathbf{x}) = 2(1-\beta)\ln r\,. \tag{8}$$

Таким образом, при выборе функции f в дополнение к (4) мы должны потребовать, чтобы

$$\int d^2x\,\Delta_E f = 2\pi\,.$$

Тогда из (6) мы получаем, что

$$\mu = \frac{1-\beta}{4}$$

и пределу бесконечно тонкой струны соответствует выражение [12]

$$T_{tt}(\mathbf{x}) = \mu\,\mathrm{e}^{\sigma(\mathbf{x})}\,\delta^2(\mathbf{x})\,, \tag{9}$$

где конформный фактор задается выражением (8).

При этом двумерная поверхность (x_1x_2) представляет собой локально плоскую гиперповерхность с конической особенностью, локализованной в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а параметр μ определяет связанный с особенностью дефицит угла: $\delta\varphi = 8\pi\mu = 2\pi(1-\beta)$.

В случае бесконечно тонкой струны особенностями пространства–времени являются отсутствие в метрике каких-либо размерных параметров и высокая степень симметрии. Первое позволяет утверждать, что в случае безмассового поля вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса может зависеть только от расстояния до особенности, причем,в случае четырех пространственно-временных измерений справедливо $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{vac}} \sim r^{-4}$ [11, 13]. Второе — разделить переменные в полевом уравнении, построить аналитическое выражение для соответствующей функции Грина и вычислить перенормированное вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса.

Переход к случаю массивного поля заметно усложняет задачу, поскольку появляется дополнительный параметр с размерностью длины — комптоновская длина $l_c = m^{-1}$. В этом случае из соображений размерности мы только можем утверждать, что вакуумное среднее ТЭИ может быть представлено в виде

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{vac}} \sim \frac{1}{r^4}\,F(mr)\,, \tag{10}$$

где $F(z)$ — некоторая однозначная функция, и характер зависимости результата от расстояния от струны требует отдельного исследования. И, следовательно, характерным масштабом, на котором влияние массы будет существенным, является комптоновская длина $l_c = 1/m$.

2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА ВБЛИЗИ СТРУНЫ

Случай скалярного поля с минимальной связью соответствует выбору действия в виде

$$S_\phi = -\frac{1}{2}\int d^d x\, \phi(x)\, L(x,\partial)\, \phi(x)\ ,$$

где оператор поля $L(x,\partial) = \sqrt{-g}\,(\Box + m^2)$, $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ — оператор Лапласа–Бельтрами и $d = 4$ — размерность пространства–времени.

Представим оператор $L(x,\partial)$ в виде

$$L(x,\partial) = (\partial^2 + m^2) + \delta L(x,\partial)\ ,\qquad \partial^2 = \partial_t^2 - \partial_z^2 - \Delta_E\,. \tag{11}$$

В рассматриваемом случае соответствующий метрике (1) оператор $\delta L(x,\partial)$ имеет вид

$$\delta L(x,\partial) = \Lambda(\mathbf{x})\left(\partial_t^2 - \partial_z^2 + m^2\right)\ ,\qquad \Lambda(\mathbf{x}) = e^{-\sigma(\mathbf{x})} - 1 \approx -\sigma(\mathbf{x})\,. \tag{12}$$

Тогда в первом порядке теории возмущений по малому параметру $(1-\beta) \ll 1$ фейнмановская функция Грина может быть представлена в виде

$$G^F(x,x') = G_0^F(x-x') + \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}\sigma(\mathbf{q}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{\mathrm{e}^{ip(x-x')}[p_z^2 - p_0^2 + m^2]}{[p^2 - m^2 + i\epsilon]\,[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]}\ ,$$

где $q = (0,0,\mathbf{q})$, $\epsilon \to +0$, а $G_0^F(x-x')$ — фейнмановская функция Грина плоского пространства. Построение теории возмущений для функций Грина в фоновых пространствах с коническими особенностями рассмотрено, в частности, в [11].

В терминах функции Грина вакуумное среднее оператора ТЭИ дается выражением

$$\left\langle T_{\mu\nu}(x)\right\rangle_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{reg}} = -i \lim_{x'\to x}\ D_{\mu\nu}\, G^F_{\mathrm{reg}}(x,x')\ , \tag{13}$$

где $D_{\mu\nu}$ — дифференциальный оператор, который определяется классическим выражением для ТЭИ. В рассматриваемом случае массивного скалярного поля с минимальной связью

$$D_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_{\nu'} - \frac{1}{2}\,\nabla_\lambda \nabla^{\lambda'}\, g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, m^2\, g_{\mu\nu}\ , \tag{14}$$

где через ∇^μ и $\nabla^{\mu'}$ обозначены ковариантные производные по переменным x^μ и x'^μ, соответственно.

С принятой точностью

$$D_{tt} = \partial_t\,\partial_{t'} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu'}\partial_\mu\partial_{\nu'} + \frac{m^2}{2} + \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2}\,\delta^{ab'}\partial_a\partial_{b'}\ ,\qquad a,b,\,\ldots\, = 1,2\,, \tag{15}$$

и мы получаем, что

$$\begin{aligned}\left\langle T_{tt}(\mathbf{x})\right\rangle_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{reg}} = &-\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{2p_0^2 - p^2 + m^2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \\ &+ \frac{i}{4}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}\sigma(\mathbf{q}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{4p_0^2 - (p+q)^2 - p^2 + q^2 + 2m^2}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]}\left(p_z^2 - p_0^2 + m^2\right).\end{aligned}$$

Последующее использование стандартной техники метода размерной регуляризации [14] приводит к результату

$$\begin{aligned}\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\mathrm{vac}}^{\mathrm{reg}} = &\frac{\Gamma[-d/2]}{2\,(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{\tilde\mu}\right)^{d-4} m^4 - \frac{\Gamma[1-d/2]}{6\,(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{\tilde\mu}\right)^{d-4} m^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}|\mathbf{q}|^2\sigma(\mathbf{q}) + \\ &+ \frac{\Gamma[2-d/2]}{4(4\pi)^{d/2}} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q}) \int_0^1 d\alpha\left(\alpha - \frac{8}{3}\alpha^3 + \frac{4}{3}\alpha^4\right)\left(\frac{\Delta(\alpha\,,\mathbf{q})}{\tilde\mu^2}\right)^{d/2-2},\end{aligned} \tag{16}$$

где $d = 4 - 2\varepsilon\quad (\varepsilon \to +0)$, $\tilde\mu$ — параметр с размерностью массы, вводимый для сохранения размерности регуляризованного выражения, а

$$\Delta(\alpha,\mathbf{q}) = \alpha(1-\alpha)\,\mathbf{q}^2 + m^2\,.$$

При малых $\varepsilon \to +0$ справедливо разложение

$$\left(\frac{\Delta(\alpha\,,\mathbf{q})}{\tilde\mu^2}\right)^{d/2-2} = 1 - \left(2 - \frac{d}{2}\right)\ln\frac{\Delta(\alpha,\mathbf{q})}{\tilde\mu^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \tag{17}$$

и для регуляризованного вакуумного среднего мы получаем

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm reg} = \frac{\Gamma[-d/2]}{2\,(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{\tilde\mu}\right)^{d-4} m^4 - \frac{\Gamma[1-d/2]}{6\,(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{m}{\tilde\mu}\right)^{d-4} m^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^2\sigma(\mathbf{q}) + \frac{\Gamma[2-d/2]}{40(4\pi)^{d/2}}\times$$
$$\times \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q}) - \frac{1}{4(4\pi)^{d/2}}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q})\int\limits_0^1 d\alpha\Big(\alpha-\frac{8}{3}\alpha^3+\frac{4}{3}\alpha^4\Big)\ln\frac{\Delta(\alpha,\mathbf{q})}{\tilde\mu^2}\,. \tag{18}$$

В безмассовом пределе

$$\ln\frac{\Delta(\alpha,\mathbf{q})}{\tilde\mu^2} = \ln\alpha(1-\alpha) + \ln\frac{\mathbf{q}^2}{\tilde\mu^2}$$

и

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm reg} = \frac{1}{40(4\pi)^{d/2}}\left(\Gamma[2-d/2]+\frac{16}{15}\right)\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q}) - \frac{1}{20(4\pi)^{d/2}}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q})\ln\frac{|\mathbf{q}|}{\tilde\mu}\,. \tag{19}$$

Первый член в полученном выражении представляет собой вычисленную в рассматриваемом приближении и умноженную на $2/\sqrt{-g}$ вариационную производную расходящейся части эффективного действия, которая отбрасывается в ходе его перенормировки и, следовательно, должна быть отброшена и в выражении для перенормированного ТЭИ [15].

Таким образом,

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm ren} = -\frac{1}{20(4\pi)^{d/2}}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}|\mathbf{q}|^4\sigma(\mathbf{q})\,\ln\frac{|\mathbf{q}|}{\tilde\mu}\,. \tag{20}$$

Дальнейшие вычисления сводятся к использованию известных в теории обобщенных функций интегралов [16].

Для фурье-образа мы имеем

$$\sigma(\mathbf{q}) = 2(1-\beta)\int d^2x\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{qx}}\ln r = -\frac{4\pi(1-\beta)}{|\mathbf{q}|^2}\,. \tag{21}$$

Оставшийся интеграл также хорошо определен:

$$\int d^2q\,|\mathbf{q}|^2\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}\ln|\mathbf{q}| = \frac{8\pi}{r^4}\,. \tag{22}$$

Подстановка полученного выражения в (20) дает

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm ren} = \frac{\mu}{10\pi^2r^4}\,, \tag{23}$$

что совпадает с результатами работ [4–10].

Для учета массы мы должны вернуться к выражению (18). В этом случае перенормировка эффективного действия требует отбрасывания первых трех членов в этом выражении [15], и мы получаем

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm reg} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}q^2\int\limits_0^1 d\alpha\Big(\alpha-\frac{8}{3}\,\alpha^3+\frac{4}{3}\,\alpha^4\Big)\Big(\ln m^2+\ln\big[\alpha(1-\alpha)\,\mathbf{q}^2/m^2+1\big]\Big). \tag{24}$$

Интегрирование по α позволяет привести это выражение к виду

$$\left\langle T_{tt}(x)\right\rangle_{\rm vac}^{\rm reg} = \frac{\mu}{20\pi}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,e^{i\mathbf{qx}}q^2\left[\ln m+\frac{A(u)}{3}\Big(3-\frac{16}{u^2}+\frac{8}{u^4}\Big)-\frac{1}{45}\Big(24-\frac{230}{u^2}+\frac{120}{u^4}\Big)\right], \tag{25}$$

где

$$A(u) = \sqrt{1+(2/u)^2}\,\mathrm{Arsh}\frac{u}{2}\,, \quad u=\frac{|\mathbf{q}|}{m}\,. \tag{26}$$

Фурье-образы членов подынтегрального выражения, которые не содержат функции $A(u)$, известны [16].

Оставшиеся интегралы имеют вид

$$b_k = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}}{q^{2(1-k)}}\,A\big(|\mathbf{q}|/m\big)\,, \quad k=0,1,2\,. \tag{27}$$

Они представляют собой фурье-интегралы от функций медленного роста и должны быть хорошо определены в смысле обобщенных функций, но из-за наличия арксинуса они не известны в табличном виде.

Поскольку двумерный интеграл Фурье берется от сферически-симметричной функции от переменной $|\mathbf{q}|=q$, то результат преобразования будет сферически-симметричной функцией от переменной $r=|\mathbf{x}|$. Будем иметь в виду, что интегрирование по полярному углу φ в плоскости q_1q_2 может быть осуществлено с помощью табличного интеграла [17]

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\mathrm{e}^{\pm iqr\cos\varphi} = 2\pi J_0(qr)\,. \tag{28}$$

Но остающиеся одномерные интегралы по $|\mathbf{q}|$ содержат либо инфракрасную (b_0), либо ультрафиолетовую (b_1, b_2) расходимости. Наша задача — привести их к суперпозиции сходящихся одномерных римановых интегралов и уже введенных обобщеннофункциональных интегралов преобразований Фурье.

Для оценки сходимости нам нужно знать разложение $A(u)$ при малых и больших значениях аргумента; тейлорово разложение имеет вид

$$A(u) = 1 + \frac{1}{12}\,u^2 - \frac{1}{120}\,u^4 + \frac{1}{840}\,u^6 + \mathcal{O}(u^8)\,, \quad (29)$$

а асимптотическое разложение дается выражением

$$A(u) = \ln u + \frac{2\ln u + 1}{u^2} - \frac{2\ln u - 1/2}{u^4} + \mathcal{O}\Big(\frac{\ln u}{u^6}\Big). \quad (30)$$

Тогда в каждом из интегралов b_k, в зависимости от характера неинтегрируемой особенности, мы вычтем и добавим низшие члены соответствующих разложений (контрчлены), следя за тем, чтобы от контрчленов не возникало новой особенности на противоположном пределе интегрирования. Тогда вычитаемые контрчлены будут регуляризовывать неинтегрируемую особенность, а двумерные интегралы от контрчленов уже будут являться табличными интегралами Фурье обобщенных функций.

Для примера при вычислении b_0, согласно (29), вычтем и добавим единицу к A:

$$b_0(r) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\,(A-1) + \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{e^{i\mathbf{qx}}}{q^2}\,. \quad (31)$$

Второй интеграл стандартно вычисляется, а в первом после интегрирования по углу инфракрасная особенность исчезнет, а новой ультрафиолетовой расходимости не возникнет:

$$b_0(r) = \int_0^\infty dq\,\frac{J_0(qr)}{2\pi}\,\frac{A-1}{q} - \frac{\ln r}{2\pi}\,. \quad (32)$$

Оставшийся интеграл сходится в римановом смысле и может быть вычислен численно.

Собирая все вклады в (25) и опуская дельта-функции с носителем на струне, мы получаем следующее выражение для перенормированной плотности энергии:

$$\big\langle T_{tt}(r)\big\rangle^{\text{ren}}_{\text{vac}} = \frac{\mu}{40\pi^2}\int_0^\infty qJ_0(qr)\Big[A\Big(q^2 - \frac{16}{3}\,m^2 + \frac{8}{3}\,\frac{m^4}{q^2}\Big) + \ln\frac{q}{m}\Big(\frac{10}{3}\,m^2 - q^2\Big) - m^2\Big(1 + \frac{8}{3}\,\frac{m^2}{q^2}\Big)\Big]dq + \frac{\mu}{10\pi^2}\Big(\frac{1}{r^4} + \frac{5}{6}\,\frac{m^2}{r^2}\Big)\,. \quad (33)$$

Сделав замену переменной, мы получим окончательно:

$$\big\langle T_{tt}(r,m)\big\rangle^{\text{ren}}_{\text{vac}} = \frac{\mu}{10\pi^2 r^4}\,F(mr),$$
$$F(z) = \frac{z^4}{4}\int_0^\infty s^3 J_0(zs)\Big[A(s)\Big(1 - \frac{16}{3s^2} + \frac{8}{3s^4}\Big) + \Big(\frac{10}{3s^2} - 1\Big)\ln s - \frac{1}{s^2}\Big(1 + \frac{8}{3s^2}\Big)\Big]ds + \Big(1 + \frac{5}{6}\,z^2\Big)\,. \quad (34)$$

Функция $F(z)$ определяет вклад массивных мод в эффект поляризации вакуума в окрестности струны относительно вклада безмассового поля. График функции $F(z)$ представлен на рисунке. Из приведенного рисунка видно, что вклад массивного поля становится пренебрежимо малым уже на расстоянии порядка нескольких комптоновских длин волн, как это и следовало из размерных соображений. Из него также следует, что для скалярного поля с массой m на расстояниях, меньших приблизительно $0.7l_c$, плотность энергии выше, чем для безмассового поля.

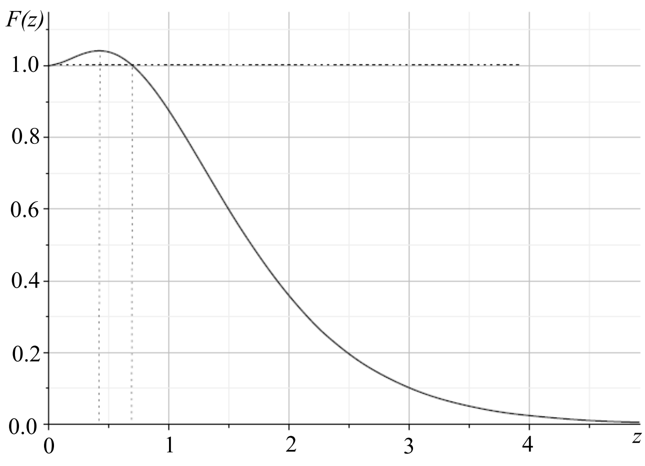

Рисунок. График $F(z)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках однопетлевой квантовой гравитации рассмотрен эффект поляризации вакуума массивного скалярного поля с минимальной связью вблизи прямолинейной космической струны. Показано, что относительный вклад массивных полей в перенормированное вакуумное среднее тензора энергии-импульса становится пренебрежимо малым уже на расстоянии нескольких комптоновских длин волн от струны.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология».

Благодарности

Ю. В. Грац благодарит проф. И. П. Волобуева за ценные замечания.

[1] The Formation and Evolution of Cosmic Strings. *Gibbons G. W., Hawking S. W., Vachaspati T.* (eds.) Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[2] *Vilenkin A., Shellard E. P. S.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[3] *Copeland E. J., Pogosian L., Vachaspati T.* // Class. Quant. Grav. **28**, 204009. (2011).
[4] *Helliwell T. M., Konkowski D. A.* // Phys. Rev. D. **34**. 1918. (1986).
[5] *Frolov V. P., Serebriany E. M.* // Phys. Rev. D. **35**. 3779. (1987).
[6] *Linet B.* // Phys. Rev. D. **35**. 536. (1987).
[7] *Dowker J. S.* // Phys. Rev. D. **36**. 3095. (1987).
[8] *Dowker J. S.* // Phys. Rev. D. **36**. 3742. (1987).
[9] *Hiscock W. A.* // Phys. Lett. B. **188**. 317. (1987).
[10] *Гальцов Д.В., Грац Ю. В. , Лаврентьев А. Б.*// ЯФ. **58**. 570. (1995). (*Gal'tsov D. V., Grats Yu. V., Lavrent'ev A. B.* // Phys. Atom. Nucl. **58**. 516. (1995)).
[11] *Grats Y. V., Spirin P.* // Eur. Phys. J. C. **77**. 101. (2017).
[12] *Vilenkin A.* // Phys. Rev. D. **23**. 852. (1981).
[13] *Grats Y. V., Spirin P.* // Int. J. Mod. Phys. A. **35** N 02-03. 2040030. (2020).
[14] *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Т. 2. М.: Мир, 1984. (*Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980.)
[15] *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве–времени. М.: Мир, 1984. (*Birrell N. D., Davies P. C. W.* Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press, 1982.)
[16] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Т. 1. М.: Физматгиз, 1958. (*Gel'fand I. M., Shilov G. E.* Generalized Functions: Properties and operations. Academic Press, Waltham, 1964.)
[17] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. (*Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.* Table of Integrals, Series and Products. Academic Press: New York, USA, 2007.)

Vacuum polarization in the cosmic-string background

Yu. V. Grats[a], **P. A. Spirin**[b]

Department of theoretical physics Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*grats@phys.msu.ru*, [b]*pspirin@physics.uoc.gr*

Within the framework of one-loop quantum gravity, we consider the vacuum polarization effect of the minimally-coupled massive scalar field near the infinitely-thin straight cosmic string. It is shown that the massive-field relative contribution to the renormalized vacuum mean of the energy density becomes negligible at a distance of several Compton lengths.

PACS: 11.25.Wx.
Keywords: vacuum polarization, effective action, dimensional regularization.
Received 14 June 2023.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 5, pp. 585–590.

Сведения об авторах

1. Грац Юрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.
2. Спирин Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.