ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Показатель Ляпунова и скорость роста геодезического отклонения в уравнении Якоби со случайной кривизной

А. Э. Мамедова,[1,*] Д. Д. Соколов[2,†]

[1] *Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Баку Азербайджан, AZ 1118, Баку, пос. Ходжасан, ул. Университетская, 1*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 08.06.2023; после доработки 23.06.2023; принята к публикации 28.06.2023)

Изучается скорость роста геодезического отклонения в однородной и изотропной в среднем космологической модели, в которой учитываются флуктуации кривизны. Методами численного моделирования показано, что скорость роста геодезического отклонения растет с ростом расстояния до небесного тела на геодезической с той же скоростью, что и длина двумерного вектора, составленного из геодезического отклонения и ее производной, скорость роста которой удается вычислить теоретически в так называемой теории Ферстенберга.

PACS: 95.10.Fh УДК: 519.2

Ключевые слова: Уравнение Якоби, теория Ферстенберга, показатель Ляпунова.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2350102

ВВЕДЕНИЕ

Развитие неустойчивостей в случайной среде во многом отличается от развития более привычных неустойчивостей, развивающихся в детерминированных средах. Например, вместо скорости роста участвующей в неустойчивости величины, являющей старшим собственным числом с положительной действительной частью некоторого дифференциального уравнения, возникает целый набор показателей роста. Среди них оказывается аналог старшего собственного числа в виде показателя Ляпунова, а также скорости роста среднего значения, корня из средней энергии и скорости роста других статистических моментов, которые не совпадают друг с другом (явление перемежаемости, см. напр. [1]). Для вычисления этих показателей роста используется математическая техника, опирающаяся на изучение поведения независимых случайных матриц или, более общо, операторов, восходящая к работам Ферстенберга [2, 3]. В этом подходе уравнения второго или более высоких порядков, с помощью которых обычно описывается неустойчивость, сводится к системе уравнений первого порядка, а растущая в результате неустойчивости физическая величина дополняется до вектора или тензора в некотором физическом или вспомогательном пространстве. Например, при изучении роста мелкомасштабного магнитного поля в конвективном или турбулентном потоке электропроводящей жидкости (мелкомасштабное динамо) исследователя прежде всего интересует средняя магнитная энергия, а замкнутое уравнение (уравнение Казанцева) удается получить для среднего корреляционного тензора магнитного поля [4]. Математические результаты теории Ферстенберга утверждают положительность показателя Ляпунова, характеризующего рост длины этого вектора или тензора, тогда как физическая интерпретация результатов относится к поведению скорости роста модуля исходной физической величины. Эта интерпретация основана на том, что в ходе развития неустойчивости в во вспомогательном пространстве, в котором задан вектор или тензор, для которого применяется теория Ферстенберга, возникает случайный базис, играющий роль базиса собственных векторов, а экспоненциально растущее решение интерпретируется как старший собственный вектор, у которого все компоненты (включая ту, которая нас и интересует), растут с одной скоростью, являющуюся показателем Ляпунова.

Приведенное рассуждение кажется правдоподобным и постоянно используется в различных работах по развитию неустойчивостей в случайных средах (напр. [5]), однако оно, естественно, заслуживает проверки. Эту проверку естественно провести методами математического моделирования, которые позволяют получить скорость роста и для основной физической величины, так и показатель Ляпунова. Это и составляет цель данной работы.

Мы проводим интересующую нас проверку на материале удобного модельного примера, предложенного в свое время Я.Б. Зельдовичем [6] в рамках задачи о распространении света в однородной и изотропной в среднем космологической модели, в которой в малых масштабах вещество собрано в отдельные небесные тела, так что кривизну пространства–времени можно рассматривать как случайное

* E-mail: aliyadupon@gmail.com

† E-mail: sokoloff.dd@gmail.com

поле. Суть замеченного Зельдовичем эффекта состоит в том, что если в среднем плотность в такой модели равна критической плотности, то в силу эффектов случайного распределения масс свет в ней, в силу возникающей неустойчивости, распространяется как в открытой космологической модели, кривизна которой несколько меньше критической.

Работа [6] вполне востребована и хорошо известна в контексте космологии, однако для нас сейчас она интересует как пример неустойчивости в случайной среде, который достаточно прост для того, чтобы в нем можно было в деталях исследовать различные стороны явления, в том числе и ту, которая нас интересует.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим некоторую точку O в пространственном сечении космологической модели, из которой проводятся наблюдения удаленного небесного тела. Пусть Γ и Γ' — два направления, под которыми видны две точки в наблюдаемом теле (скажем, две точки на разных концах скопления галактик), а x — расстояние до этого скопления, отложенное вдоль каждого направления. Обозначим малый угол между этими направлениями как θ. Тогда размер скопления галактик равен $y\theta$, где величина y называется полем Якоби, или геодезическим отклонением, которое подчиняется уравнению геодезических отклонений, или уравнению Якоби

$$y'' + Ky = 0, \tag{1}$$

где производные берутся по переменной x, являющейся расстоянием до скопления. Если $K = 0$, то решение уравнения Якоби y растет с ростом x линейно. Однако если распределение кривизны K вдоль геодезической рассматривать как случайный процесс, то y растет экспоненциально, что и означает, что космологическая модель похожа на открытую модель. Замечательно, что при таком подходе к задаче о распространении света описание этого явления сводится до простого уравнения.

Для простоты далее мы считаем, что случайный процесс K является кусочно-постоянным на отрезках длины Δ, причем значения K на различных отрезках независимы и равнораспределены. Такую модель принято называть моделью с обновлением, а Δ называть расстоянием обновления.

Поскольку ко времени написания работы [6] теория Ферстенберга еще была в зачаточном состоянии, в ней используется гораздо более громоздкая аргументация, которая, однако, приводит к правильному выводу. О том, как эта задача сводится к теории Ферстенберга, см. [7]. При этом, в частности, уравнение (1) переписывается как система двух уравнений первого порядка

$$z'(x) = z(x)A(x), \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1, z_2)$ — вектор-строка

$$z_1 = y(x), \quad z_2 = y'(x)\Delta.$$

Здесь

$$A(x) = A_n = \begin{pmatrix} 0 & -K_n\Delta \\ \frac{1}{\Delta} & 0 \end{pmatrix},$$

где K_n — независимые случайные равнораспределенные случайные числа, соответствующие тому отрезку обновления, в которое попадает точка x.

Тому, что две геодезические выходят из одной точки, соответствует начальное условие $y(0) = 0$, которое естественно дополнить условием нормировки поля Якоби $y'(0) = 0$. Далее мы измеряем расстояния в единицах Δ.

Уравнение (2) легко решается явно на каждом интервале обновления. В зависимости от знака K на этом интервале фундаментальное решение системы строится с помощью матриц B_n следующего строения.

Для $K_n \geq 0$

$$B(n) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K_n} & -\sqrt{K_n}\sin\sqrt{K_n} \\ \sin\sqrt{K_n}\sqrt{K_n} & \cos\sqrt{K_n} \end{pmatrix}.$$

Если $K_n < 0$, то

$$B(n-1, n) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\sqrt{-K_n} & \sqrt{-K_n}\mathrm{sh}\sqrt{-K_n} \\ \mathrm{sh}\sqrt{-K_n}/\sqrt{-K_n} & \mathrm{ch}\sqrt{-K_n} \end{pmatrix}.$$

Также нетрудно заметить, что

$$\det B(n) = \det\exp\begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

а фундаментальное решение за n интервалов обновления строится как произведение матриц $B(n)$:

$$z(x_n) = z(x_0)B(x_0, x_1)B(x_1, x_2)\ ...B(x_{n-1}, x_n). \tag{3}$$

Итак, интересующая нас задача сводится к изучению поведения большого числа независимых унимодулярных случайных матриц.

В теории Ферстенберга изучается поведение длины вектора z_n в моменты обновления x_n и вводится показатель Ляпунова как предел почти наверное:

$$\lim_{nto\infty} \frac{\ln|z(x_n)|}{n\Delta} = \lambda \tag{4}$$

и доказывается его положительность. С точки зрения физической интерпретации результата более интересным было бы вычисление предела

$$\lim_{nto\infty} \frac{\ln|y(x_n)|}{n\Delta} = \tilde{\lambda}\,. \tag{5}$$

Однако само существование последнего предела гораздо труднее обосновать, поскольку в некоторых точках оси x (вряд ли совпадающих с точками обновления) растущий по модулю вектор z может поворачиваться так, что его первая координата обращается в нуль. Само существование нулей поля Якоби представляет непосредственный интерес, поскольку с точки зрения геометрии это сопряженные точки на геодезической, а с физической точки зрения это гравитационные линзы.

Для полноты картины мы изучаем также предел

$$\lim_{nto\infty} \frac{\ln|y'(x_n)\Delta|}{n\Delta} = \hat{\lambda}\,, \tag{6}$$

который не так мотивирован физически, как предыдущий предел, но интересен с точки зрения того, насколько показатель Ляпунова похож на собственное значение.

Теперь мы можем более точно фиксировать цель нашего исследования. Мы хотим выяснить, в какой степени данные численного моделирования говорят в пользу существования предела (4) и насколько близки λ, $\tilde{\lambda}$ и $\hat{\lambda}$. Еще раз отметим, что обычно положительный ответ на этот вопрос предполагается заранее, но проверка этой гипотезы кажется тем не менее полезной.

2. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Мы решаем нашу задачу численно методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Поскольку мы интересуемся прежде всего поведением решения в точках обновления, мы могли бы непосредственно перемножать матрицы согласно соотношению (3), однако, принимая во внимание более широкий физический контекст, мы не хотим привязывать исследование специально к случаю модели с обновлением. Мы используем генератор случайных чисел из среды GNU Octave, в которой и проводятся расчеты.

Естественно, мы должны выбрать конкретное распределение вероятностей для случайной кривизны. Отметим, что в задаче возникают три физически различные ситуации — кривизна флуктуирует, оставаясь отрицательной; распределение кривизн симметрично относительно нуля; кривизна флуктуирует, оставаясь положительной. В работе [5] показано, что рост модуля вектора z в указанном ряду моделей становится все менее регулярным, но все более флуктуационным, хотя положительность показателя Ляпунова во всех трех случаях сохраняется. Во всех трех случаях мы считали распределение вероятностей равномерным, в первом случае оно равномерно на отрезке $[-1, 0]$ (модель I) , во втором — на отрезке $[-1/2, 1/2]$ (модель II) , в третьем — на отрезке $[0, 1]$ (модель III).

Мы проверили, что для наших целей достаточно брать шаг по времени в методе Рунге–Кутта равным 0.1, т.е. десятой части от длины обновления. Естественно, мы учли известный результат о том, что решение нашей задачи экспоненциально растет во всех трех случаях, хотя скорость этого роста существенно уменьшается по первой модели к третьей. Мы убедились и в том, что в решении время от времени возникают глубокие минимумы величины $\ln|y|$, связанные с возникновением сопряженных точек. Мы не воспроизводим здесь эти стандартные результаты.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы промоделировали решение нашей задачи на большом интервале значений переменной x вплоть до $x = 200$ и во всех трех случаях построили зависимость от координаты x_n для $\ln|z(x_n)|$, $\ln|y(x_n)|$ и $\ln|y'(x_n)|\Delta$, а также аппроксимировали их прямыми, аппроксимацию графиков строили в программном пакете OrigiLab используя программу «Linear fit». Угловой коэффициент графиков представляет собой искомые оценки скоростей роста (см. рисунок, табл. 1).

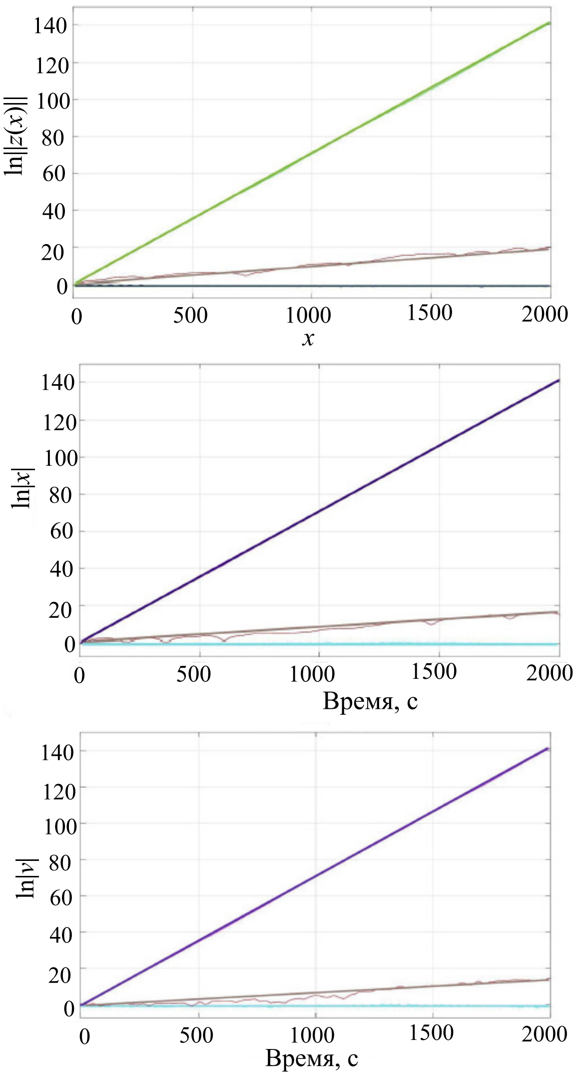

Рисунок. Сравнение роста длины вектора z (сверху), его первой y (в середине) и второй $y'\Delta$ (снизу) компонент в точках обновления для моделей I (снизу), II (средняя кривая) и III (нижняя кривая) и аппроксимирующие их прямые, которые, с учетом толщины линий во многих случаях неотличимы от аппроксимируемых кривых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видим из табл. 1, что все три показателя роста близки друг у другу, хотя, конечно, не совпадают в точности. Этот результат является ожидае-

Таблица 1. Сравнение различных оценок для показателя Ляпунова

Модель	λ	$\tilde{\lambda}$	$\hat{\lambda}$
I	0.0708	0.0718	0.0711
II	0.0091	0.0086	0.0067
III	0.0007	0.0006	0.0005

Таблица 2. Сравнение свободных членов в аппроксимации для различных моделей

Модель	b	$\tilde{b}$	$\hat{b}$
I	0.3340	–1.1757	–1.2661
II	0.6288	0.6821	–0.5671
III	0.0609	–0.1615	–0.8446

мым, хотя раньше, насколько нам известно, такая проверка не проводилась.

Отметим также другие обстоятельства, которые прямо не вытекают из смысла теории Ферстенберга, но тоже представляются естественными. Во-первых, показатели λ и $\tilde{\lambda}$ ближе друг к другу, чем показатели λ и $\hat{\lambda}$. Это представляется естественным, поскольку смысл величины y более непосредственно связан с физической интерпретацией задачи, чем смысл величины $y'\Delta$. Совпадение трех показателей постепенно уменьшается от модели I к модели III, что тоже не вытекает из теории Ферстенберга, но кажется естественным, поскольку эффект роста гораздо лучше выражен в первой модели, чем в третьей, а вторая модель занимает промежуточное положение между ними.

Аппроксимируя наши графики прямыми, мы, естественно, получили не только их наклон a, т.е. скорость роста, но и координату b, при которой прямая пересекает вертикальную ось. Теория Ферстенберга не содержит прямых указаний на свойства величины a и ее аналогов $\tilde{a}$ для двух координат $\hat{a}$, однако мы видим (табл. 2), что эти три величины находятся в разумном согласии для всех трех моделей и между ними видны качественно те же соотношения, что и для показателей роста. Видно также, что это согласие несколько хуже, чем для показателей роста. Эти факты не противоречат физической интуиции.

В целом можно сказать, что проведенная проверка подтвердила обычные представления о том, как нужно использовать теорию Ферстенберга для изучения неустойчивостей в случайных средах.

Д. Соколов. благодарен фонду Базис (грант № 21-1-1-4-1) за поддержку работы.

[1] *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // УФН **152**, № 1. 3. (1987). (*Zel'dovich Ya.B., Molchanov S.A., Ruzmaikin A.A., Sokolov D.D.* // Sov. Phys. Usp. **30**. 353. (1987)).

[2] *Furstenberg H.* // Annals of Mathematics. **77**, N 2. 335. (1963).

[3] *Furstenberg H.* // Trans. of Amer. Math. Soc. **108**, N 3. 377. (1963).

[4] *Казанцев А.П.* // ЖЭТФ. 53(5). 1806. (1967)

[5] *Illarionov E.A.,Sokoloff D.D.* // Phys. Rev. D. **107**, N 4. 044110. (2023).

[6] *Зельдович Я.Б.* // Астрономический журнал. **41**. 19. (1964).

[7] *Ламбурт В.Г.,Тутубалин В.Н.,Соколов Д.Д.* // Математические заметки. **74**, № 3. 416. (2003). (*Lamburt V.G., Sokolov D.D., Tutubalin V.N.* // Mathematical Notes. **74**. 393. (2003))

Lyapunov exponent and the growth rate of geodesic deviation in the Jacobi equation with random curvature

A.E. Mammadova[1,a], **D.D. Sokoloff**[2,b]

[1] *Bacu branch of Lomonosov Moscow State University. Azerbaijan, AZ 1118, Bacu*
[2] *Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*
E-mail: [a] *aliyadupon@gmail.com*, [b] *sokoloff.dd@gmail.com*

The growth rate of geodesic deviation in a homogeneous and isotropic on average cosmological model, in which curvature fluctuations are taken into account, is studied. Using numerical simulation methods, it is shown that the growth rate of geodesic deviation increases with the increase in distance to the celestial body on a geodesic at the same rate as the length of the two-dimensional vector, composed of geodesic deviation and its derivative whose growth rate can be theoretically calculated in the so-called Furstenberg theory.

PACS: 95.10.Fh.
Keywords: Jacobi equation, Furstenberg theory, Lyapunov exponent.
Received 08 June 2023.
English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2023. **78**, No. 5, pp. 591–594.

Сведения об авторах

1. Мамедова Алия Эльчин — студентка; e-mail: aliyadupon@gmail.com.
2. Соколов Дмитрий Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: Sokoloff.dd@gmail.com.