

## Задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения с запаздывающим аргументом

Н. Т. Левашова,<sup>1,\*</sup> Н. А. Михеев<sup>1,†</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 21.06.2023; после доработки 02.07.2023; принята к публикации 04.07.2023)

В работе рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с, вообще говоря, нелинейной правой частью, зависящей, помимо искомой функции, еще и от этой же функции, но взятой с запаздыванием по времени. Рассмотренная задача является сингулярно возмущенной благодаря наличию малого параметра перед производной по времени. Для таких задач характерны решения, обладающие большим градиентом в окрестности начального момента времени и в окрестности момента, равного времени запаздывания. Целью работы является построение асимптотического приближения и доказательство существования гладкого решения задачи.

PACS: 02.30.Ks. УДК: 517.929.8

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, сингулярно возмущенная задача Коши, малый параметр, асимптотическое приближение решения.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.78.2350103](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2350103)

### ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с, вообще говоря, нелинейной правой частью, зависящей, помимо искомой функции, еще и от этой же функции, но взятой с запаздыванием по времени. Задачи с запаздывающим аргументом широко используются в различных приложениях, например для моделирования когерентно-оптических систем [1] или релаксационных колебаний в сетях импульсных нейронов [2]. К таким задачам относится широко используемое в экономических моделях логистическое уравнение [3]. В большинстве работ, посвященных уравнениям с запаздыванием, рассматриваются возникающие при этом автоколебательные циклы, исследуется динамика решений на больших промежутках времени или положения равновесия [4–7].

Рассмотренная здесь задача является сингулярно возмущенной благодаря наличию малого параметра перед производной по времени. Для таких задач характерны решения, обладающие большим градиентом в окрестности начального момента времени. В задаче с запаздывающим аргументом решение может иметь большой градиент также в окрестности моментов времени, кратных времени запаздывания. В настоящей работе для простоты мы подробно рассмотрим поведение решения на промежутке времени, не превосходящем удвоенное время

запаздывания. Целью работы является построение асимптотического приближения и доказательство существования гладкого решения задачи.

Среди публикаций, касающихся уравнений с запаздывающим аргументом, стоит отметить работы [8–10], поскольку в них тоже применялись асимптотические методы исследования решений. В частности, в работе [8] приведен алгоритм построения асимптотического приближения решения краевой задачи для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, одно из которых содержит малый параметр при старшей производной. Как и в настоящей работе, для построения приближения использовался метод Васильевой [11]. В работе [9] рассматривалась задача Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для системы было построено асимптотическое приближение решения, а также доказано его существование и единственность. Для этого применялся метод сведения к интегральным уравнениям и теорема о неподвижной точке. В работе [10] рассматривалась задача с быстро осциллирующим решением. Для построения асимптотического приближения в этом случае применялся метод ВКБ.

Наиболее близко в смысле применяемых методов к настоящей работе примыкает исследование [12], в котором рассматривалось решение с внутренним переходным и пограничными слоями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной правой частью, содержащей функции запаздывающего аргумента.

\* E-mail: [levashovant@physics.msu.ru](mailto:levashovant@physics.msu.ru)

† E-mail: [mikheev.na16@physics.msu.ru](mailto:mikheev.na16@physics.msu.ru)

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy}{dt} = f(y(t), y(t-\sigma), t, \varepsilon), & t \in (0, T), \\ y(t) = h(t), & t \in [-\sigma, 0], \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  — малый параметр,  $T$  — заданные числа:  $\sigma > 0$ ,  $\sigma < T < 2\sigma$ ,  $f$  и  $h$  — достаточно гладкие функции своих аргументов. Требование к классу гладкости этих функций связано с порядком строящегося асимптотического приближения. Если нужно построить приближение  $n$ -го порядка, то функция  $f(y(t), y(t-\sigma), t, \varepsilon)$  должна быть  $n+1$  раз непрерывно дифференцируемой на множестве  $I_y \times I_y \times (0, T] \times (0, \varepsilon_0]$ , где  $I_y$  — допустимый интервал изменения решения задачи, а функция  $h(t)$  —  $(n+1)$  раз непрерывно дифференцируемой на интервале  $t \in (-\sigma, 0)$ .

**Определение 1.** Под решением задачи (1) будем понимать функцию

$$y_\varepsilon(t) \in C[0, T] \cap C^1(0, T),$$

удовлетворяющую уравнению (1) при  $t \in (0, T]$  и начальному условию задачи (1).

Предположим, что выполнено следующее условие.

**Условие (A1).** Пусть уравнение

$$f(y(t), h(t-\sigma), t, 0) = 0 \quad (2)$$

имеет на отрезке  $t \in [0, \sigma]$  решение  $\bar{y}(t) = \alpha(t)$ , причем на этом отрезке выполняется неравенство

$$f_y(\alpha(t), h(t-\sigma), t, 0) < 0. \quad (3)$$

Пусть уравнение

$$f(y(t), \alpha(t-\sigma), t, 0) = 0 \quad (4)$$

имеет на отрезке  $t \in [\sigma, T]$  решение  $\bar{y}(t) = \beta(t)$ , причем на этом отрезке выполняется неравенство

$$f_y(\beta(t), \alpha(t-\sigma), t, 0) < 0. \quad (5)$$

Далее мы будем исследовать решение задачи (1), близкое при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  к функции  $\alpha(t)$  внутри интервала  $(0, \sigma)$ , к функции  $\beta(t)$  внутри интервала  $(\sigma, T)$ , и резко изменяющееся в окрестности точки  $t = 0$  от значения  $h(0)$  до  $\alpha(t)$ , а в окрестности  $t = \sigma$  — от  $\alpha(t)$  до  $\beta(t)$ .

## 1.1. Присоединенная система

Введем так называемую присоединенную систему уравнений относительно функций  $\tilde{y}(\tau)$ ,  $\hat{y}(\tau)$ , где  $\tau$  изменяется на полупрямой  $[0; +\infty)$ :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = f(\tilde{y}, h(-\sigma), 0, 0), & \frac{d\hat{y}}{d\tau} = f(\hat{y}, \tilde{y}(\tau), \sigma, 0), & \tau > 0, \\ \tilde{y}(0) = h(0), & \hat{y}(0) = \alpha(\sigma). \end{cases} \quad (6)$$

Из условия (A1) следует, что положением равновесия этой системы является точка

$$(\tilde{y}, \hat{y}) = (\alpha(0), \beta(\sigma)). \quad (7)$$

Вычисляя собственные значения матрицы соответствующей линеаризованной системы, получаем

$$\lambda_1 = f_y(\alpha(0), h(-\sigma), 0, 0), \quad \lambda_2 = f_y(\beta(\sigma), \alpha(0), \sigma, 0).$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, условием асимптотической устойчивости точки покоя (7) являются неравенства  $\lambda_{1,2} < 0$ . Их выполнение обеспечивается условием (A1).

Потребуем выполнения еще одного условия.

**Условие (A2).** Пусть начальное условие  $\tilde{y}(0) = h(0)$  принадлежит области влияния точки покоя  $\tilde{y} = \alpha(0)$  первого уравнения системы (6).

Пусть начальное условие

$$\hat{y}(0) = \alpha(\sigma) \quad (8)$$

принадлежит области влияния точки покоя  $\hat{y} = \beta(\sigma)$  уравнения

$$\frac{d\hat{y}}{d\tau} = f(\hat{y}, \alpha(0), \sigma, 0). \quad (9)$$

**Замечание.** Структура области влияния устойчивых положений равновесия нелинейных задач Коши описана в [13].

**Лемма.** При выполнении условий (A1), (A2), задача (6) имеет решение, притягивающееся к точке покоя (7) при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Утверждение леммы следует из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра, применяя которую к задаче

$$\frac{d\hat{y}}{d\tau} = f(\hat{y}, \alpha(0) + \Delta, \sigma, 0), \quad \tau > 0, \quad \hat{y}(0) = \alpha(\sigma), \quad (10)$$

получаем, что решение этой задачи стремится к решению задачи (9),(8), если  $\Delta \rightarrow 0$ . В свою очередь, решение задачи (9),(8) стремится к точке покоя  $\beta(\sigma)$  этой задачи в силу условия (A2). Положим в (10)  $\Delta = \tilde{y} - \alpha(0)$  и заметим, что  $\Delta \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  в силу условия (A2). Итак, получаем:  $\tilde{y} \rightarrow \alpha(0)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ , и при этом  $\hat{y} \rightarrow \beta(\sigma)$ . В результате приходим к выводу, что решение системы (6) стремится к точке покоя (7) при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

В силу выполнения неравенства (3) справедлива оценка [13]

$$|\tilde{y}(\tau) - \alpha(0)| \leq C_0 e^{-\varkappa_0 \tau},$$

где  $C_0, \varkappa_0$  — положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ . Используя неравенство (5) и эту оценку, тем же способом, что и в [13], можно доказать, что

$$|\hat{y}(\tau) - \beta(\sigma)| \leq C e^{-\varkappa \tau},$$

где  $C, \varkappa$  — также положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Построим асимптотическое приближение решения  $y_\varepsilon(t)$  задачи (1), имеющее внутренний переходный слой в окрестности точки  $t = \sigma$  и пограничный слой в окрестности точки  $t = 0$ . В окрестности этих точек введем растянутые переменные

$$\tau_0 := \frac{t}{\varepsilon}, \quad \tau := \frac{t - \sigma}{\varepsilon}.$$

Асимптотическое приближение решения задачи (1) будем строить отдельно на отрезках  $[0, \sigma]$  и  $[\sigma, T]$ , непрерывно сшивая его левую и правую части в точке  $t = \sigma$ .

Рассмотрим две задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy^{(-)}}{dt} = f(y^{(-)}(t), h(t - \sigma), t, \varepsilon), & t \in (0, \sigma), \\ y^{(-)}(0) = h(0). \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy^{(+)}}{dt} = f(y^{(+)}(t), y^{(-)}(t - \sigma), t, \varepsilon), & t \in (\sigma, T), \\ y^{(+)}(\sigma) = y^{(-)}(\sigma). \end{cases} \quad (12)$$

Будем искать асимптотические приближения решений каждой из задач в виде:

$$\begin{aligned} Y^{(-)}(t, \varepsilon) &= \bar{y}^{(-)}(t, \varepsilon) + L(\tau_0, \varepsilon), \\ Y^{(+)}(t, \varepsilon) &= \bar{y}^{(+)}(t, \varepsilon) + Q(\tau, \varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\bar{y}^{(\pm)}(t, \varepsilon)$  — регулярная часть,  $L(\tau_0, \varepsilon)$  — функция пограничного слоя в окрестности точки  $t = 0$ ;  $Q(\tau, \varepsilon)$  — функция переходного слоя в окрестности точки  $t = \sigma$ .

Каждое из слагаемых в представлениях (13) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\bar{y}^{(\pm)}(t, \varepsilon) = \bar{y}_0^{(\pm)}(t) + \varepsilon \bar{y}_1^{(\pm)}(t) + \varepsilon^2 \bar{y}_2^{(\pm)}(t) + \dots; \quad (14)$$

$$L(\tau_0, \varepsilon) = L_0(\tau_0) + \varepsilon L_1(\tau_0) + \varepsilon^2 L_2(\tau_0) + \dots; \quad (15)$$

$$Q(\tau, \varepsilon) = Q_0(\tau) + \varepsilon Q_1(\tau) + \varepsilon^2 Q_2(\tau) + \dots. \quad (16)$$

### 2.1. Регулярная часть

Подставляя разложения (14) для функций  $\bar{y}^{(\pm)}(t, \varepsilon)$  в уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau_0} L(\tau_0, \varepsilon) = f(\bar{y}^{(-)}(\varepsilon \tau_0, \varepsilon) + L(\tau_0, \varepsilon), h(\varepsilon \tau_0 - \sigma), \varepsilon \tau_0, \varepsilon) - f(\bar{y}^{(-)}(\varepsilon \tau_0, \varepsilon), h(\varepsilon \tau_0 - \sigma), \varepsilon \tau_0, \varepsilon), \\ L(0, \varepsilon) = h(0) - \bar{y}^{(-)}(0, \varepsilon). \end{cases} \quad (18)$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}^{(-)}}{dt} = f(\bar{y}^{(-)}(t), h(t - \sigma), t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}^{(+)}}{dt} = f(\bar{y}^{(+)}(t), \bar{y}^{(-)}(t - \sigma), t, \varepsilon),$$

раскладывая правые части этих уравнений по формуле Тейлора, а затем приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения для определения коэффициентов разложения (14).

Для определения функции  $\bar{y}_0^{(-)}(t)$  получим уравнение (2), а для определения функции  $\bar{y}_0^{(+)}(t)$  — уравнение (4).

Согласно условию (A1), следует положить  $\bar{y}_0^{(-)}(t) = \alpha(t)$ ,  $\bar{y}_0^{(+)}(t) = \beta(t)$ .

Уравнения для функций  $\bar{y}_k^{(\pm)}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  имеют вид:

$$\begin{aligned} f_y(\alpha(t), h(t - \sigma), t, 0) \bar{y}_k^{(-)}(t) &= \bar{b}_k^{(-)}(t), \\ f_y(\beta(t), \alpha(t - \sigma), t, 0) \bar{y}_k^{(+)}(t) &= \bar{b}_k^{(+)}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\bar{b}_k^{(\pm)}(t)$  — известные функции, зависящие от  $\bar{y}_j^{(\pm)}(t)$ ,  $0 \leq j \leq k - 1$  соответственно.

В частности,

$$\bar{b}_1^{(-)}(t) := f_\varepsilon(\alpha(t), h(t - \sigma), t, 0),$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1^{(+)}(t) &:= f_{y_\sigma}(\beta(t), \alpha(t - \sigma), t, 0) \bar{y}_1^{(-)}(t - \sigma) \\ &\quad + f_\varepsilon(\beta(t), \alpha(t - \sigma), t, 0). \end{aligned}$$

Здесь и далее  $f_y$  означает производную по первому аргументу, а  $f_{y_\sigma}$  — производную по второму аргументу (с запаздыванием).

Уравнения (17) однозначно разрешимы в силу условия (A1).

### 2.2. Функции переходного и пограничных слоев

Задачи для пограничных функций и функций переходного слоя получаются стандартным образом согласно алгоритму Васильевой [11].

Для коэффициентов разложения (15), функций  $L_k(\tau_0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , описывающих пограничный слой в окрестности точки  $t = 0$ , они определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра в разложении Тейлора равенств

Задачи для коэффициентов разложения (16) и функций  $Q_k(\tau)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , описывающих переходный слой в правой полукрестности точки  $t = \sigma$ , получаются тем же способом из равенств

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} Q(\tau, \varepsilon) = f(\bar{y}^{(+)}(\sigma + \varepsilon\tau, \varepsilon) + Q(\tau, \varepsilon), \bar{y}^{(-)}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + L(\tau, \varepsilon), \sigma + \varepsilon\tau, \varepsilon) - \\ \quad - f(\bar{y}^{(+)}(\sigma + \varepsilon\tau, \varepsilon), \bar{y}^{(-)}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \sigma + \varepsilon\tau, \varepsilon), \\ Q(0, \varepsilon) = \bar{y}^{(-)}(\sigma, \varepsilon) - \bar{y}^{(+)}(\sigma, \varepsilon). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь  $L(\tau, \varepsilon)$  — сумма (15), в которой аргумент  $\tau_0$  заменен на аргумент  $\tau$ .

Отметим, что в силу способа построения функций в правых частях равенств (18) и (19), а также неравенств (3) и (5) из условия (A1) выполняются условия убывания функций  $L_k(\tau_0)$  и  $Q_k(\tau)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  до нуля на бесконечности и справедливость оценок

$$|L_k(\tau_0)| \leq C e^{-\varkappa_0 \tau_0}, \quad |Q_k(\tau)| \leq C e^{-\varkappa \tau}, \quad (20)$$

где  $C$ ,  $\varkappa_0$  и  $\varkappa$  — положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

### 2.3. Нулевое приближение функций переходного слоя

Приравнивая слагаемые при  $\varepsilon^0$  в равенствах (18) и (19), получим следующие задачи для определения функций  $L_0(\tau_0)$  и  $Q_0(\tau)$ :

$$\begin{cases} \frac{dL_0}{d\tau_0} = f(\alpha(0) + L_0, h(-\sigma), 0, 0), \quad \tau_0 > 0, \\ L_0(0) = h(0) - \alpha(0); \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_0}{d\tau} = f(\beta(\sigma) + Q_0, \alpha(0) + L_0(\tau), \sigma, 0), \quad \tau > 0, \\ Q_0(0) = \alpha(\sigma) - \beta(\sigma). \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Lf_1(\tau_0) := & (\bar{y}_1^{(-)}(0) + \alpha'(0)\tau_0)[f_y(\tilde{y}(\tau_0), h(-\sigma), 0, 0) - f_y(\alpha(0), h(-\sigma), 0, 0)] + \\ & + h'(-\sigma)\tau_0[f_{y_\sigma}(\tilde{y}(\tau_0), h(-\sigma), 0, 0) - f_{y_\sigma}(\alpha(0), h(-\sigma), 0, 0)] + \\ & + \tau_0[f_t(\tilde{y}(\tau_0), h(-\sigma), 0, 0) - f_t(\alpha(0), h(-\sigma), 0, 0)] + \\ & + f_\varepsilon(\tilde{y}(\tau_0), h(-\sigma), 0, 0) - f_\varepsilon(\alpha(0), h(-\sigma), 0, 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qf_1(\tau) := & f_{y_\sigma}(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0)L_1(\tau) + \\ & + (\bar{y}_1^{(+)}(\sigma) + \beta'(\sigma)\tau)[f_y(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0) - f_y(\beta(\sigma), \alpha(0), \sigma, 0)] + \\ & + (\bar{y}_1^{(-)}(0) + \alpha'(0)\tau)[f_{y_\sigma}(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0) - f_{y_\sigma}(\beta(\sigma), \alpha(0), \sigma, 0)] + \\ & + \tau[f_t(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0) - f_t(\beta(\sigma), \alpha(0), \sigma, 0)] + f_\varepsilon(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0) - f_\varepsilon(\beta(\sigma), \alpha(0), \sigma, 0). \end{aligned}$$

Функции  $L_k(\tau_0)$ ,  $Q_k(\tau)$  можно выписать в явном виде:

$$L_k = -\bar{y}_k^{(-)}(0, \varepsilon)\Phi_l(\tau_0) + \Phi_l(\tau_0) \int_0^{\tau_0} (\Phi_l(s))^{-1} Lf_k(s) ds,$$

Введем обозначения

$$\tilde{y}(\tau) = \alpha(0) + L_0(\tau), \quad \hat{y}(\tau) = \beta(\sigma) + Q_0(\tau).$$

С использованием этих обозначений уравнения (21) и (22) принимают вид уравнений присоединённой системы (6). Как отмечено ранее при выполнении условий (A1) — (A2) решения этих задач существуют и имеют экспоненциальные оценки, вида (20).

### 2.4. Функции переходного слоя первого и произвольного порядков

Объединяя коэффициенты при  $\varepsilon^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  в разложении Тейлора функций из равенств (18), (19), будем получать задачи следующего вида для функций  $L_k(\tau_0)$ ,  $Q_k(\tau)$ :

$$\begin{cases} \frac{dL_k}{d\tau_0} = f_y(\tilde{y}(\tau_0), h(-\sigma), 0, 0)L_k(\tau_0) + Lf_k(\tau_0), \quad \tau_0 > 0, \\ L_k(0) = -\bar{y}_k^{(-)}(0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_k}{d\tau} = f_y(\hat{y}(\tau), \tilde{y}(\tau), \sigma, 0)Q_k(\tau) + Qf_k(\tau), \quad \tau > 0, \\ Q_k(0) = \bar{y}_k^{(-)}(\sigma) - \bar{y}_k^{(+)}(\sigma), \end{cases}$$

где  $Lf_k(\tau_0)$ ,  $Qf_k(\tau)$  — известные на каждом шаге функции. В частности, в первом порядке

где

$$\Phi_i(\tau_0) = \exp\left(\int_0^{\tau_0} f_y(\tilde{y}(\xi), h(-\sigma), 0, 0) d\xi\right).$$

$$Q_k = (\tilde{y}_k^{(-)}(\sigma) - \tilde{y}_k^{(+)}(\sigma))\Phi_q(\tau) + \Phi_q(\tau) \int_0^\tau (\Phi_q(s))^{-1} Q f_k(s) ds,$$

где

$$\Phi_q(\tau) := \exp\left(\int_0^\tau f_y(\hat{y}(\xi), \tilde{y}(\xi), \sigma, 0) d\xi\right).$$

### 2.5. Асимптотическое приближение решения

Определим с помощью алгоритма, предложенного в предыдущем пункте, все функции  $y_i^{(\mp)}(t)$ ,  $L_i(\tau_0)$ ,  $Q_i(\tau)$  при  $i = 0, 1, \dots, n$  и составим суммы

$$Y_n^{(-)}(t, \varepsilon) := \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (y_i^{(-)}(t) + L_i(\tau_0)), \quad 0 \leq t \leq \sigma, \tau_0 \geq 0;$$

$$Y_n^{(+)}(t, \varepsilon) := \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (y_i^{(+)}(t) + Q_i(\tau)), \quad \sigma \leq t \leq T, \tau \geq 0.$$

(23)

Введем функцию

$$Y_n(t, \varepsilon) = \begin{cases} Y_n^{(-)}(t, \varepsilon), & 0 \leq t \leq \sigma; \\ Y_n^{(+)}(t, \varepsilon), & \sigma \leq t \leq T. \end{cases}$$

Дальше мы докажем, что эта функция является равномерным асимптотическим приближением решения задачи (1) с точностью  $O(\varepsilon^{n+1})$ .

### 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** Пусть выполнены условия (A1) и (A2), тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  на сегменте  $0 \leq t \leq T$  существует единственное решение  $y = y_\varepsilon(t)$  задачи (1) в смысле Определения 1, причем имеет место равномерная оценка

$$|y_\varepsilon(t) - Y_n(t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная, не зависящая от параметра  $\varepsilon$ .

Для обоснования существования решения задачи (1) в смысле Определения 1 можно воспользоваться теоремами существования решения применительно к каждой из задач Коши (11) и (12). Применение этих теорем гарантирует существование решения задачи (1) на каждом из интервалов

$0 \leq t \leq \sigma$ ,  $\sigma \leq t \leq T$  и выполнение равенства  $y^{(-)}(\sigma) = y^{(+)}(\sigma)$ . Гладкость решения задачи (1), функции

$$y_\varepsilon(t) = \begin{cases} y^{(-)}(t), & 0 \leq t \leq \sigma, \\ y^{(+)}(t), & \sigma \leq t \leq T \end{cases} \quad (25)$$

в точке  $t = \sigma$  следует из цепочки равенств

$$\frac{dy}{dt}(\sigma - 0) = \frac{1}{\varepsilon} f(y^{(-)}(\sigma), h(0), t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f(y^{(+)}(\sigma), y^{(-)}(0), t, \varepsilon) = \frac{dy}{dt}(\sigma + 0).$$

Равномерная оценка вида (24) для решения задачи (11) следует из теоремы Васильевой [11]. В случае задачи (12) эту оценку можно доказать, пользуясь теоремой Чаплыгина, путем построения верхнего и нижнего решений этой задачи как модификаций асимптотического приближения решения.

Сформулируем определение верхнего и нижнего решений задачи (12).

#### Определение 2.

Функция  $\bar{U}^{(+)}(t) \in C^1((\sigma; T]) \cap C([\sigma; T])$  называется верхним решением задачи (12), если она удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon \frac{d\bar{U}^{(+)}}{dt} > f(\bar{U}^{(+)}(t), y^{(-)}(t - \sigma), t, \varepsilon), \quad \sigma < t \leq T;$$

$$\bar{U}^{(+)}(\sigma) > y^{(-)}(\sigma).$$

В определениях нижних решений знаки в операторных неравенствах и неравенствах в начальный момент времени меняются на противоположные.

### 3.1. Построение верхнего и нижнего решений

Верхнее,  $\bar{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon)$  и нижнее,  $\underline{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon)$  решения задачи (11) построим в виде:

$$\bar{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon) := Y_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} v^{(+)} + \varepsilon^{n+1} q_{n+1}(\tau), \quad \sigma \leq t \leq T,$$

$$\underline{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon) := Y_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon) - \varepsilon^{n+1} v^{(+)} - \varepsilon^{n+1} q_{n+1}(\tau), \quad \sigma \leq t \leq T.$$

Здесь  $Y_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon)$  — сумма вида (23),  $v^{(+)}$  — положительная константа, обеспечивающая выполнение операторного неравенства из Определения 2 верхнего решения и аналогичного неравенства для нижнего решения вдали от точки  $t = \sigma$ , функция  $q_{n+1}(\tau)$  устраняет невязки в операторных неравенствах, возникающие за счет добавления  $v^{(+)}$ . Эта функция определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dq_{n+1}}{d\tau} - f_y(\hat{y}, \tilde{y}, \sigma, 0)(q_{n+1} + v^{(+)}) + v^{(+)} f_y(\alpha, \beta, \sigma, 0) = 0, & \tau > 0; \\ q_{n+1}(0) + v^{(+)} = \delta, \end{cases}$$

где  $\delta > 0$ . При таком выборе функции  $q_{n+1}(\tau)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon}^{(+)}[\bar{Y}_{n+1}^{(+)}] &= \varepsilon \frac{d\bar{Y}_{n+1}^{(+)}}{dt} - \\ &- f(\bar{Y}_{n+1}^{(+)}(t), Y_{n+1}^{(-)}(t - \sigma) + O(\varepsilon^{n+2}), \sigma, 0) = \\ &= -\varepsilon^{n+1} v^{(+)} f_y(\alpha, \beta, \sigma, 0) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{aligned}$$

В силу условия **(A1)** операторное неравенство из Определения 2 будет выполнено при достаточно малых  $\varepsilon$ , если  $v^{(+)} > 0$ , а неравенство при  $t = \sigma$  будет выполнено, если  $\delta > 0$ . Выполнение аналогичных неравенств для нижнего решения гарантировано при тех же значениях  $v^{(+)}$  и  $\delta$ .

Из приведенных выше рассуждений следует, что пара функций  $\bar{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon)$ ,  $Y_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon)$  является верхним и нижним решением задачи (12). Согласно теореме Чаплыгина выполняются неравенства

$$Y_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon) < y^{(+)}(t) < \bar{Y}_{n+1}^{(+)}(t, \varepsilon), \quad \sigma \leq t \leq T.$$

Из этих неравенств и вида верхнего и нижнего решений следует оценка вида (24) для решения задачи (12).

Из полученного выше следует, что для решения  $y_{\varepsilon}(t)$  задачи (1), определенного выражением (25), справедлива оценка (24).

#### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy}{dt} = a(t)y(t) - b(t)y(t - \sigma), & t \in (0, 1), \\ y(t) = h(t), & t \in [-\sigma, 0], \end{cases} \quad (26)$$

где  $a(t), b(t), h(t)$  — достаточно гладкие функции, а  $\sigma$  — число из интервала  $(0.5; 1)$ , причем выполняется неравенство  $a(t) < 0$ ,  $t \in (0, 1)$ .

Для функций  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  из условия **(A1)** получаем выражения

$$\alpha(t) := \frac{b(t)}{a(t)} h(t - \sigma), \quad \beta(t) := \frac{b(t)}{a(t)} \alpha(t - \sigma).$$

Функция  $\bar{y}_1^{(-)}(t)$  определяется из уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt} = a(t)\bar{y}_1^{(-)}(t)$$

и имеет вид

$$\bar{y}_1^{(-)}(t) = \frac{[b'(t)h(t - \sigma) + b(t)h'(t - \sigma)]a(t) - b(t)h(t - \sigma)a'(t)}{a^3(t)}.$$

Функция  $\bar{y}_1^{(+)}(t)$  определяется из уравнения

$$\frac{d\beta}{dt} = a(t)\bar{y}_1^{(+)}(t) - b(t)\bar{y}_1^{(-)}(t - \sigma)$$

и имеет вид

$$\bar{y}_1^{(+)}(t) = \frac{[b'(t)\alpha(t - \sigma) + b(t)\alpha'(t - \sigma)]a(t) - b(t)\alpha(t - \sigma)a'(t)}{a^3(t)} + \frac{b(t)}{a(t)}\bar{y}_1^{(-)}(t - \sigma).$$

Функция  $L_0(\tau_0)$  определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dL_0}{d\tau_0} = a(0)L_0(\tau_0), & \tau_0 > 0, \\ L_0(0) = h(0) - \alpha(0) \end{cases}$$

и имеет вид

$$L_0(\tau_0) = (h(0) - \alpha(0))e^{a(0)\tau_0}.$$

Функция  $Q_0(\tau)$  определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{dQ_0}{d\tau} = a(\sigma)Q_0(\tau) - b(\sigma)L_0(\tau), & \tau > 0, \\ Q_0(0) = \alpha(\sigma) - \beta(\sigma) \end{cases}$$

и имеет вид

$$Q_0(\tau) = \left( \alpha(\sigma) - \beta(\sigma) - \frac{b(\sigma)(h(0) - \alpha(0))}{a(\sigma) - a(0)} \right) e^{a(\sigma)\tau} + \frac{b(\sigma)(h(0) - \alpha(0))}{a(\sigma) - a(0)} e^{a(0)\tau}.$$

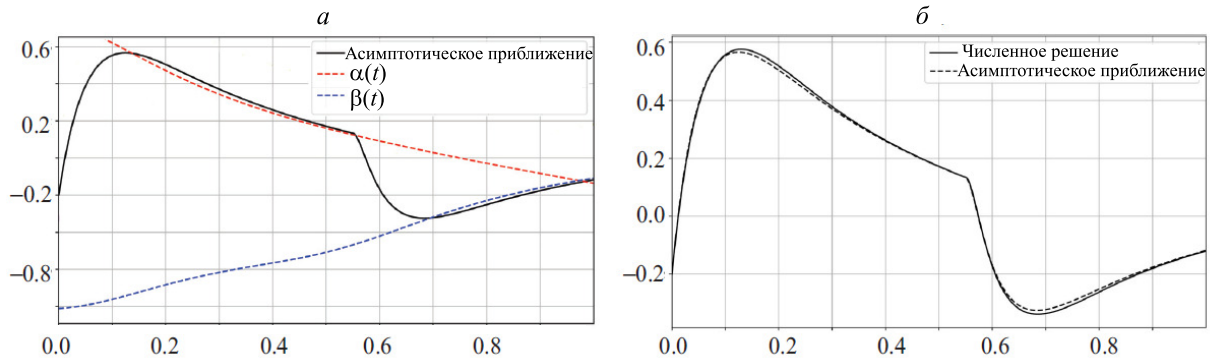


Рисунок. *a* – Численное решение задачи (26) и функции  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ; *б* – численное решение задачи (26) и асимптотическое приближение нулевого порядка ( $\varepsilon = 0.01$ ,  $\sigma = 0.55$ , а функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $h(t)$  заданы равенствами (27))

Функция  $L_1(\tau_0)$  определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{dL_1}{d\tau_0} = a(0)L_1(\tau_0), & \tau_0 > 0, \\ L_1(0) = -\bar{y}_1^{(-)}(0) \end{cases}$$

и имеет вид  $L_1(\tau_0) = -\bar{y}_1^{(-)}(0)e^{a(0)\tau_0}$ .

Функция  $Q_1(\tau)$  определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{d\tau} = a(\sigma)Q_1(\tau) - b(\sigma)L_1(\tau), & \tau > 0, \\ Q_1(0) = \bar{y}_1^{(-)}(\sigma) - \bar{y}_1^{(+)}(\sigma). \end{cases}$$

Решение этой задачи

$$Q_1(\tau) = \left( \bar{y}_1^{(-)}(\sigma) - \bar{y}_1^{(+)}(\sigma) - \frac{b(\sigma)L_1(0)}{a(\sigma) - a(0)} \right) e^{a(\sigma)\tau} + \frac{b(\sigma)L_1(\tau)}{a(\sigma) - a(0)}.$$

Таким образом построено асимптотическое приближение решения задачи (26) первого порядка вида

$$Y_1(t, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha(t) + L_0(\tau_0) + \varepsilon \bar{y}_1^{(-)}(t) + \varepsilon L_1(\tau_0), & 0 \leq t \leq \sigma, \\ \beta(t) + Q_0(\tau) + \varepsilon \bar{y}_1^{(+)}(t) + \varepsilon Q_1(\tau), & \sigma \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения задачи (26)

при

$$\begin{aligned} a(t) &= -2(t^2 + 0.1), & b(t) &= t^2 + 0.2, \\ h(t) &= t - 0.2, & \varepsilon &= 0.01, \quad \sigma = 0.55 \end{aligned} \quad (27)$$

представлена на рисунке. Численное решение было получено методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сингулярно возмущенные задачи для дифференциальных уравнений в случае, когда функция в правой части нелинейно зависит от запаздывающего аргумента, в плане применения асимптотических методов схожи с задачами с разрывными правыми частями [14]. Однако построение асимптотических приближений, а также обоснование применимости классических методов доказательства существования решения, равномерно приближенного построения асимптотикой, имеет некоторые отличия. В настоящей работе были отмечены особенности применения этих методов в случае решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Проведенные исследования могут быть полезны для создания экономических или популяционных моделей, в которых необходимо учитывать функции запаздывающего аргумента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-11-00069).

- [1] Кащенко И.С., Кащенко С.А. // ДАН 435, N 1. 14. (2010). (Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. // Doklady Mathematics. 82, N 3. 850. (2010)).
- [2] Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. // УМН 70, вып. 3(423). 3. (2015). (Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. // Russian Math. Surveys. 70, N 3. 383. (2015)).
- [3] Голубенец В.О. // Матем. заметки. 107, № 6. 833. (2020). (Golubenets V.O. // Math. Notes. 107:6. 920. (2020)).
- [4] Кащенко И.С. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 48, № 12. 2141. (2008). (Kashchenko I.S. // Comput. Math. Math. Phys. 48, N 12. 2172. (2008)).
- [5] Кащенко И.С., Кащенко С.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 54, № 5. 766. (2014). (Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. // Comput. Math. Math. Phys.

- 54, N 5. 785. (2014)).
- [6] *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **55**, № 4. 610. (2015). (*Kashchenko I.S., Kashchenko A.A.* // *Comput. Math. Math. Phys.* **55**, N 4. 607. (2015)).
- [7] *Кащенко А.А.* // *Теоретическая и математическая физика.* **202**, № 3. 437. (2020). (*Kashchenko A.A.* // *Theoretical and Mathematical Physics.* **202**, N 3. 381. (2020)).
- [8] *Кань Н.М.* // *Дифференциальные уравнения.* **49**, № 8. 971. (2013). (*Ni M.* // *Diff. Equat.* **49**. 941. (2013)).
- [9] *Hongjiong Tian* // *J. Math Anal Appl.* **281**. 678. (2003).
- [10] *Lange C.G., Miura R.M.* // *SIAM J. Appl. Math.* **54**. 273. (1994). <http://www.jstor.org/stable/2101624>
- [11] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* М.: Высшая школа. 1990.
- [12] *Ни М.К., Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т.* // *Дифференциальные уравнения.* **56**, № 3. 303. (2020). (*Ni M.K., Nefedov N.N., Levashova N.T.* // *Differential Equations.* **56**, N 3. 290. (2020)).
- [13] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* М.: Наука, 1973.
- [14] *Нефедов Н.Н.* // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **61**, № 12. 2074. (2021). (*Nefedov N.N.* // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* **61**, N 12. 2068. (2021)).

## Cauchy Problem for a Singularly Perturbed Delay Equation

N. T. Levashova<sup>a</sup>, N. A. Mikheev<sup>b</sup>

<sup>1</sup> *Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*  
*E-mail: <sup>a</sup>levashovant@physics.msu.ru, <sup>b</sup>mikheev.na16@physics.msu.ru*

In the study, the Cauchy problem for a singularly perturbed first-order ordinary differential equation is considered, with, generally speaking, a nonlinear right-hand side that depends not only on the desired function but also on this same function taken with a time delay. The problem under consideration is singularly perturbed due to the presence of a small parameter in front of the time derivative. For such problems, solutions that possess a large gradient in the vicinity of the initial time moment and in the vicinity of the moment equal to the delay time are typical. The aim of the work is to construct an asymptotic approximation and to prove the existence of a smooth solution to the problem.

PACS: 02.30.Ks.

*Keywords:* delay equation, singularly perturbed Cauchy problem, small parameter, asymptotic approximation of a solution.

*Received 21 June 2023.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2023. **78**, No. 5, pp. 595–602.

### Сведения об авторах

1. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: [levashovant@physics.msu.ru](mailto:levashovant@physics.msu.ru).
2. Михеев Никита Алексеевич — магистр; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: [mikheev.na16@physics.msu.ru](mailto:mikheev.na16@physics.msu.ru).