

Модифицированный метод круглых колец Гаусса. Применение к двупланетной задаче

Б.П. Кондратьев,^{1,2,3,*} В.С. Корноухов,² Е.В. Басова¹

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра небесной механики, астрометрии и гравиметрии
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ). Россия, 119991, Москва, Университетский пр-т, д. 13

³Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия
(Поступила в редакцию 03.06.2023; после доработки 26.06.2023; принята к публикации 30.06.2023)

Изложена схема расширенного метода круглых колец Гаусса, предназначенного для изучения вековой эволюции орбит в системах, состоящих из центральной звезды и двух планет. Причиной вековой эволюции узлов и углов наклона орбит планет является их взаимное гравитационное притяжение. Орбиты планет моделируются однородными круглыми кольцами Гаусса, на которые переносятся массы, размеры и углы наклона орбит, а также орбитальные угловые моменты планет. Метод учитывает, что в общем случае восходящие узлы орбит могут не совпадать. Взаимная гравитационная энергия колец W_{mut} представлена в виде ряда в квадратичном приближении по степеням малых углов наклона. С помощью функции W_{mut} составлена замкнутая система из 4 дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит планет. Решение уравнений получено в конечном аналитическом виде, что упрощает интерпретацию изучаемых движений. Метод проверен на примере системы «Солнце–Юпитер–Сатурн»; для неё, в частности, впервые была рассчитана разность долгот узлов орбит Юпитера и Сатурна как функция времени. Новый подход применяется также для исследования прецессии узлов в экзопланетной системе K2-36. Построены графики всех неизвестных величин. Установлено, что в ходе эволюции угол взаимного наклона орбит остается постоянным, а либрации орбит по углу наклона и по движению узлов происходят синхронно.

PACS: 95.10.Ce, 96.15.De УДК: 521.1

Ключевые слова: планеты, экзопланеты, кольца Гаусса, вековая эволюция орбит.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2350801

ВВЕДЕНИЕ

В небесной механике для изучения вековых возмущений орбит планет и спутников применяются три основных подхода. Первый подход (аналитический) основан на разложении функции возмущений Лагранжа в ряд по малым значениям эксцентриситетов и углов наклона орбит [1–3]. Второй подход связан с численным интегрированием уравнений движения планет Солнечной системы [4, 5]. Хотя численные методы позволяют проводить расчеты с любой точностью, но они не дают качественную картину явлений.

Третий подход основан на методах осреднения [6]. Здесь одним из основных является метод колец Гаусса, предназначенный для изучения вековых возмущений первого порядка. Этот метод отличается наглядностью и основан на том, что возмущающее воздействие одного тела на другое при некоторых дополнительных условиях эквивалентно влиянию силового поля гравитирующего кольца (кольца Гаусса), полученного при распределении возмущающей массы по эллиптической орбите. При таком

подходе рассматриваются не только задачи с однократным усреднением по орбите возмущающего тела, но и задачи с дополнительным усреднением по орбите самого возмущаемого тела. В последнем случае задача сводится к изучению взаимодействия двух колец Гаусса.

Одномерная плотность вещества на кольце Гаусса обратна скорости движения планеты массой M на данном участке её траектории и элемент массы равен

$$dm = \frac{M(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}, \quad (1)$$

где v — угол истинной аномалии, e — эксцентриситет орбиты. В частном случае $e = 0$ кольцо превращается в однородный круглый обруч с пространственным потенциалом

$$\phi(r, x_3) = \frac{2GM}{\pi\sqrt{(R+r)^2 + x_3^2}} K(k), \quad (2)$$

$$k = \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2 + x_3^2}} \leq 1$$

(x_3 — аппликата пробной точки). В общем (невыврожденном) случае пространственный потенциал

* E-mail: work@boris-kondratyev.ru

эллиптического кольца Гаусса в аналитическом виде был получен в работе [7].

С открытием экзопланет интерес к кольцам Гаусса возрос. На базе эллиптических колец был создан общий метод изучения долгопериодических и вековых возмущений в задачах небесной механики [8]. Есть еще два метода, в основе которых лежит идея усреднения по быстрым переменным прецессирующего эллиптического гауссова кольца. Так, усреднение прецессии кольца по вращению линии апсид дает модель круглого двумерного диска (R-кольцо) [9], а дополнительное усреднение по движению узлов кольца дает модель 3D R-тороида [10].

Как известно, задачи по изучению вековой устойчивости систем небесных тел являются очень трудными и сложными, поэтому актуален поиск упрощенных методов решения таких задач. Один из приемов упрощения основан на замене эллиптических колец Гаусса на круговые [11, 12]. Метод круглых колец оказался востребованным, так как орбиты некоторых экзопланет действительно имеют очень малые эксцентриситеты. При этом следует подчеркнуть, что применение метода круглых колец заметно упрощает дифференциальные уравнения эволюции орбит, причем решения этих уравнений можно получить в конечном аналитическом виде. Это дает преимущества при изучении экзопланетных систем.

В первой части данной работы кратко изложен метод круглых колец Гаусса, в котором учитывается несовпадение узлов орбит. Необходимость введения такой поправки следует уже из того, что, как известно, угол $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ между узлами орбит Юпитера и Сатурна отличен от нуля и равен $\Delta\Omega \approx 13.0953^\circ$ [13]. В разд. 3 данный метод проверен на известном примере двухпланетной задачи «Солнце–Юпитер–Сатурн». В разд. 4 методом круглых колец впервые изучается вековая эволюция экзопланетной системы K2-36.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЗАИМНАЯ ЭНЕРГИЯ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

Рассмотрим в координатах $Oxyz$ систему из трех тел «Звезда–Планета 1–Планета 2». Пусть массы планет M_1 и M_2 равномерно распределены вдоль их орбит, представляющих собой концентрические круговые кольца Гаусса с радиусами R_1 и R_2 . Третье тело — звезда, находится в центре колец. Плоскости колец имеют малый угол наклона i_1 и i_2 к главной плоскости отсчета (в Солнечной системе — к эклиптике); поэтому угол между плоскостями также будет мал. Восходящие узлы орбит-колец Ω_1 и Ω_2 в общем случае не совпадают. Задачей является нахождения взаимных возмущений указанных колец Гаусса [11, 14].

В основе данного метода лежит применение функции взаимной гравитационной энергии колец W_{mut} . Эта функция была найдена ранее в работах [11, 14], поэтому здесь ограничимся только необ-

ходимыми пояснениями.

По определению вклад в энергию W_{mut} от двух элементарных точечных масс dm_1 и dm_2 , расположенных в точках (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , равен

$$dW_{mut} = -\frac{Gdm_1dm_2}{r_{12}}, \quad (3)$$

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

где r_{12} — расстояние между материальными точками. Полное выражение взаимной гравитационной энергии находится двукратным интегрированием по обоим кольцам. Так как $dm_1 = R_1\mu_1dv_1$ и $dm_2 = R_2\mu_2dv_2$, имеем

$$W_{mut} = -G\mu_1\mu_2R_1R_2 \int_0^{2\pi} dv_2 \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{r_{12}}. \quad (4)$$

Чтобы найти r_{12} заметим, что в указанной системе отсчета $Oxyz$ координаты пробной точки на круглом кольце 1 можно представить (см., например, [1]) формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 (\cos v_1 \cos \Omega_1 - \sin v_1 \sin \Omega_1 \cos i_1), \\ y_1 &= R_1 (\cos v_1 \sin \Omega_1 + \sin v_1 \cos \Omega_1 \cos i_1), \\ z_1 &= R_1 \sin v_1 \sin i_1, \end{aligned} \quad (5)$$

аналогичными формулами представим и координаты пробной точки на втором кольце:

$$\begin{aligned} x_2 &= R_2 (\cos v_2 \cos \Omega_2 - \sin v_2 \sin \Omega_2 \cos i_2), \\ y_2 &= R_2 (\cos v_2 \sin \Omega_2 + \sin v_2 \cos \Omega_2 \cos i_2), \\ z_2 &= R_2 \sin v_2 \sin i_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя формулы (5) и (6) в r_{12} из (3) и учитывая, что радиусы колец равны,

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ R_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

находим

$$r_{12} = \sqrt{2R_1R_2} \cdot \sqrt{a - b \sin v_1 - c \cos v_1}. \quad (8)$$

Здесь коэффициенты a, b и c определяются формулами [14]

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1R_2} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right) \geq 1, \quad n = \frac{r_2}{r_1} \leq 1, \\ b &= [\cos i_1 \cos i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \sin i_1 \sin i_2] \sin v_2 - \\ &\quad - \cos i_1 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) \cos v_2, \\ c &= \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \cos v_2 + \cos i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) \sin v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом r_{12} из (8), формула для взаимной энергии (4) примет вид

$$\begin{aligned} W_{mut} &= -G\mu_1\mu_2 \sqrt{\frac{R_1R_2}{2}} \int_0^{2\pi} dv_2 \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{dv_1}{\sqrt{a - b \sin v_1 - c \cos v_1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как показано в [14], выражение (10) можно представить однократным интегралом

$$W_{mut} = -2\sqrt{2}G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2} \times \int_0^{2\pi} \frac{dv_2}{\sqrt{a+p}} K\left(\sqrt{\frac{2p}{a+p}}\right). \quad (11)$$

Здесь $p = \sqrt{b^2 + c^2}$.

В частном случае $\Omega_2 - \Omega_1 = 0$ узлы орбит совпадают и круговые кольца пересекаются по диаметрам. Ранее этот вариант был рассмотрен в монографии [11] (см. также статью [12]). В этом случае коэффициенты b и c из (9) упрощаются:

$$\begin{aligned} b &= \cos(i_1 - i_2) \sin v_2; \\ c &= \cos v_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$W_0 = -\frac{\sqrt{2}G m_1 m_2}{\pi\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{1+a}} K(k);$$

$$W_{11} = W_{22} = \frac{G\sqrt{2} m_1 m_2}{8\pi\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{1+a}} \left\{ \frac{a}{a-1} E(k) - K(k) \right\}; \quad (15)$$

$$W_{12} = -\frac{G\sqrt{2} m_1 m_2}{4\pi\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{1+a}} \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \left\{ \frac{a}{a-1} E(k) - K(k) \right\}.$$

Здесь модуль $k = \sqrt{\frac{2}{1+a}} \leq 1$.

После преобразований (14) приводится к виду

$$W_{mut} = -\frac{\sqrt{2}G m_1 m_2}{\pi\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{1+a}} \left\{ K(k) - \frac{1}{8} \left[\frac{a}{a-1} E(k) - K(k) \right] [i_1^2 + i_2^2 - 2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) i_1 i_2] \right\}. \quad (16)$$

Для удобства в численных расчетах, коэффициенты ряда (16) далее преобразуем с помощью вспомогательных формул:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right); & n &= \frac{r_2}{r_1} \leq 1; \\ k &= \frac{2\sqrt{n}}{1+n}; & a-1 &= \frac{(1-n)^2}{2n}; & \frac{a}{a-1} &= \frac{1+n^2}{(1-n)^2}; \\ & & \sqrt{1+a} &= \frac{1+n}{\sqrt{2n}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда взаимная гравитационная энергия двух круглых колец Гаусса в квадратичном приближении по углам наклона примет вид [14]:

$$\begin{aligned} W_{mut} &= -\frac{2Gm_1m_2}{\pi R_1} \times \\ &\times \left\{ K(n) - \frac{\Delta i'^2}{8(1-n^2)} \left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2} E(n) - K(n) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где угол взаимного наклона $\Delta i'$ колец связан с углами ориентации колец (i_1, i_2) относительно главной

и (11) приводится к полученному в [11] выражению

$$\begin{aligned} W_{mut} &= -16G\mu_1\mu_2\sqrt{R_1R_2} \int_0^{\pi/2} \frac{dv_2}{m} K\left(\frac{2n^{1/4}}{m}\right); \\ m &= \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2} + 2\sqrt{n'}}; & n' &= \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Интеграл (11) в конечном виде не берется, поэтому представим его в виде ряда по степеням малых углов i_1 и i_2 . Нахождение такого ряда также довольно трудоемкая операция. Как показано в [14], искомый ряд имеет вид

$$W_{mut} = W_0 + W_{11}i_1^2 + W_{22}i_2^2 + W_{12}i_1i_2, \quad (14)$$

где коэффициенты равны

плоскости соотношением

$$\cos \Delta i' = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (19)$$

С учётом малости наклонов колец к главной плоскости, $\Delta i'$ из (18) выражается через углы в системе координат, связанной с эклиптикой (нештрихованные координаты)

$$\Delta i'^2 \approx i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1). \quad (20)$$

Заметим: так как выражение (18) относится к случаю, когда малы углы наклона i_1 и i_2 , то мала и их разность $\Delta i = i_2 - i_1$; вместе с тем разность долгот узлов $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ не обязательно является малой величиной.

2. УРАВНЕНИЯ ВЕКОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ

В полном виде уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов выглядят сложно (см., например, формулы 8.6 в книге [2]). Однако в нашем частном случае, когда углы наклона i_1 и i_2 малы и орбиты круговые $e_1 = e_2 = 0$, эти уравнения упрощаются и для элементов, например, второго кольца имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= -\frac{1}{n_2 R_1^2 n^2 \sin i_2} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \Omega_2}, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{1}{n_2 R_1^2 n^2 \sin i_2} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial i_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где \bar{R}_2 — возмущающая функция, равная нормированной на массу взаимной энергии колец $\bar{R}_2 = -\frac{W_{mut}}{m_2}$.

В итоге, добавив к (21) уравнения для первого кольца, и учитывая третий закон Кеплера

$$GM = n_1^2 a_1^3 = n_2^2 a_1^3 n^3, \quad (22)$$

где M — масса центрального тела (звезды), n_1 и n_2 — средние движения планет по орбитам, уравнения вековой эволюции двух круглых колец запишем в виде [14]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= -\sigma_1 \left(1 - \frac{i_2}{i_1} \cos \Delta\Omega \right), & \frac{di_1}{dt} &= -\sigma_1 i_2 \sin \Delta\Omega, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= -\sigma_2 \left(1 - \frac{i_1}{i_2} \cos \Delta\Omega \right), & \frac{di_2}{dt} &= \sigma_2 i_1 \sin \Delta\Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{n_1}{2\pi(1+n)} \frac{m_2}{M} \left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2} E(k) - K(k) \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{n_2 n}{2\pi(1+n)} \frac{m_1}{M} \left[\frac{1+n^2}{(1-n)^2} E(k) - K(k) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ

Для анализа полученных уравнений (23) введём переменные

$$\begin{aligned} h_1 &= i_1 \cos \Omega_1, & k_1 &= i_1 \sin \Omega_1, \\ h_2 &= i_2 \cos \Omega_2, & k_2 &= i_2 \sin \Omega_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда уравнения (23) преобразуются к более простому виду

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\sigma_1 (k_2 - k_1), & \frac{dk_1}{dt} &= \sigma_1 (h_2 - h_1), \\ \frac{dh_2}{dt} &= \sigma_2 (k_2 - k_1), & \frac{dk_2}{dt} &= -\sigma_2 (h_2 - h_1), \end{aligned} \quad (26)$$

где коэффициенты (24) являются частотами вековых колебаний.

Решение системы дифференциальных уравнений (26) имеет вид [14]:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= C_1 + \sigma_1 [C_3 \cos \sigma t + C_4 \sin \sigma t], \\ k_1(t) &= C_2 + \sigma_1 [-C_3 \sin \sigma t + C_4 \cos \sigma t], \\ h_2(t) &= C_1 - \sigma_2 [C_3 \cos \sigma t + C_4 \sin \sigma t], \\ k_2(t) &= C_2 - \sigma_2 [-C_3 \sin \sigma t + C_4 \cos \sigma t]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь введена сумма частот

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (28)$$

а константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sigma_1 h_2^0 + \sigma_2 h_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}, & C_2 &= \frac{\sigma_1 k_2^0 + \sigma_2 k_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}, \\ C_3 &= -\frac{h_2^0 - h_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}, & C_4 &= -\frac{k_2^0 - k_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{aligned} \quad (29)$$

включают в себя начальные условия

$$\begin{aligned} h_1^0 &= h_1(0), & k_1^0 &= k_1(0), \\ h_2^0 &= h_2(0), & k_2^0 &= k_2(0). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив (27) в (23), приходим к выводу, что в линейном приближении угол взаимного наклона орбит в ходе эволюции остаётся постоянным:

$$\Delta i' = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + (k_1 - k_2)^2} = \text{const}. \quad (31)$$

4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОРБИТ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ

Поскольку параметры орбит оцениваются, как правило, для экзопланет, открытых транзитным способом, наклоны орбит таких планет к картинной плоскости варьируются вблизи 90° . Поэтому, чтобы использовать уравнения (23), нужно переходить от картинной плоскости к такой главной плоскости, чтобы новые наклоны орбит были малыми, например к плоскости Лапласа. Альтернативно можно использовать другие уравнения, которые работают в случае использования картинной плоскости в качестве главной.

Выберем картинную плоскость в качестве главной. Тогда малыми величинами будут являться не только взаимный наклон орбит $\Delta i = i_2 - i_1$, но и разность долгот восходящих узлов $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Угол взаимного наклона колец в системе координат наблюдателя выражается теперь через малые параметры из формулы (20) в таком виде:

$$\Delta i'^2 \approx \Delta i^2 + \sin^2 i \cdot \Delta\Omega^2, \quad i = \frac{i_1 + i_2}{2}. \quad (32)$$

С помощью уравнений (21) аналогично (23) получаем уравнения вековой эволюции круглых орбит для экзопланетных систем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= \sigma_1 \cdot \frac{\Delta i}{\sin i}, & \frac{di_1}{dt} &= -\sigma_1 \cdot \sin i \cdot \Delta\Omega, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= -\sigma_2 \cdot \frac{\Delta i}{\sin i}, & \frac{di_2}{dt} &= \sigma_2 \cdot \sin i \cdot \Delta\Omega. \end{aligned} \quad (33)$$

Введём новые переменные

$$p = \sin i \cdot \Delta\Omega, \quad q = \Delta i, \quad (34)$$

к которым добавятся средний наклон из (32) и средняя долгота восходящего узла

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}, \quad (35)$$

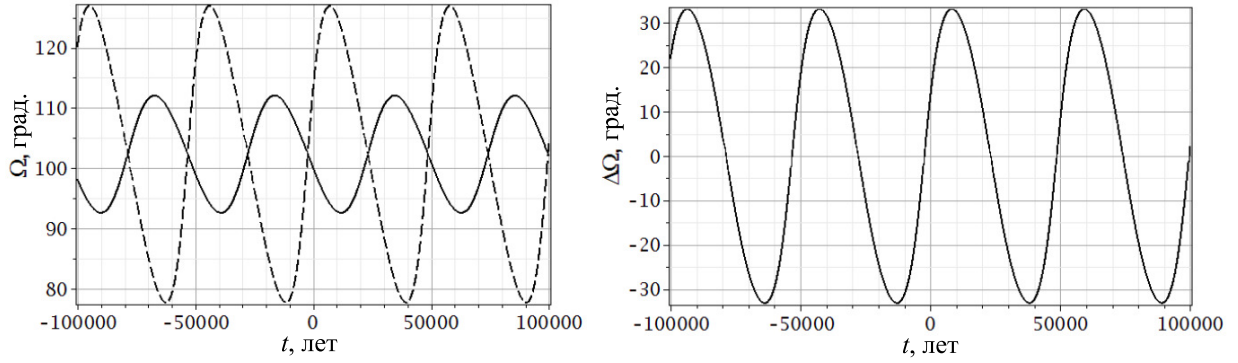


Рис. 1. Слева — зависимость изменения долготы восходящего узла для Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штрихи), представляющие вековую прецессию плоскостей орбит планет-гигантов под действием взаимного возмущения; справа — разность долгот узлов орбиты Юпитера и Сатурна как функция времени

тогда уравнения (33) эволюции двух круглых колец приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\sigma q, & \frac{dq}{dt} &= \sigma p, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma} \frac{dq}{dt}, & \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\sin i} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения (36) имеют такие решения:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sigma [-C_1^2 \sin(\sigma t) + C_2^2 \cos(\sigma t)], \\ q(t) &= \sigma [C_1^2 \cos(\sigma t) + C_2^2 \sin(\sigma t)], \\ i(t) &= C_3^2 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma} q(t), \\ \Omega(t) &= C_4^2 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma \sin i(t)} p(t), \end{aligned} \quad (37)$$

где константы, выраженные через начальные условия

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{i_1^0 + i_2^0}{2} = i(0), & \Delta i_0 &= i_2^0 - i_1^0 = \Delta i(0), \\ \Omega_0 &= \frac{\Omega_1^0 + \Omega_2^0}{2} = \Omega(0), & \Delta \Omega_0 &= \Omega_2^0 - \Omega_1^0 = \Delta \Omega(0), \end{aligned} \quad (38)$$

записываются в виде

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{\Delta i_0}{\sigma_1 + \sigma_2}, & C_2^2 &= \frac{\sin i_0 \Delta \Omega_0}{\sigma_1 + \sigma_2}, \\ C_3^2 &= \frac{\sigma_1 i_2^0 + \sigma_2 i_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}, & C_4^2 &= \frac{\sigma_1 \Omega_2^0 + \sigma_2 \Omega_1^0}{\sigma_1 + \sigma_2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из решения (37) с учётом (32) следует (как и в первом варианте (31)), что при эволюции угол взаимного наклона орбит в линейном приближении остаётся постоянным:

$$\Delta i' = \sqrt{p^2 + q^2} = \text{const}. \quad (40)$$

Обратим внимание на то, что полученные здесь в линейном приближении составляющие частоты либраций σ_1 и σ_2 из (24), как и их сумма σ из (28), не зависят от разности долгот узлов орбит $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$.

Решение разд. 4 не является частным случаем решения разд. 3. Между этими решениями существует нетривиальное преобразование. Тривиальна только инвариантность периодов либрации при преобразовании к другой системе координат. Подчеркнем: задача преобразования решения между системами координат не столь тривиальна, как может показаться на первый взгляд, чего стоит только проблема малых знаменателей.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРУГЛЫХ КОЛЕЦ

5.1. Двупланетная задача «Солнце–Юпитер–Сатурн»

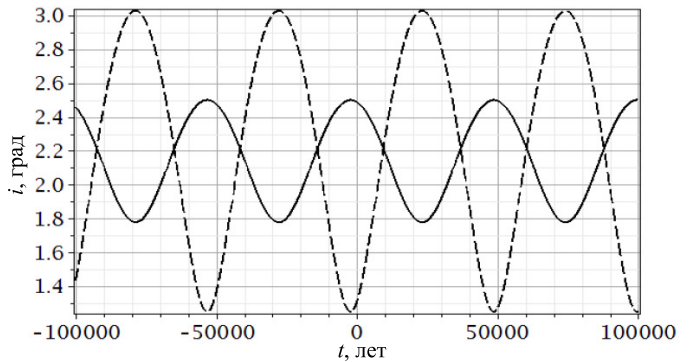


Рис. 2. Зависимость от времени наклона (к эклиптике) кольца Юпитера (сплошная линия) и Сатурна (штриховая)

В Солнечной системе в рамках двупланетной задачи обычно рассматриваются планеты-гиганты Юпитер и Сатурн. Начальные данные для орбит Юпитера и Сатурна (табл. 1) можно взять, например, в книге [13].

По формулам разд. 3 на интервале 200 000 лет была рассчитана эволюция долгот восходящих узлов и наклонов орбит планет-гигантов Юпитера и Сатурна. Результаты этих расчетов показаны на рис. 1, 2.

Таблица 1. Параметры системы Юпитер–Сатурн по книге [13]

Параметр	Юпитер	Сатурн
e	0.0474622	0.0575481
M/M_{\odot}	$9.54786 \cdot 10^{-4}$	$2.85837 \cdot 10^{-4}$
$a, a.e.$	5.202545	9.554841
$n, ^{\circ}/\text{год}$	30.3374	12.1890
$i, ^{\circ}$	1.30667	2.48795
$\Omega, ^{\circ}$	100.0381	113.1334

По нашим формулам, период либраций для наклона T_i и движения узлов T_{Ω} одинаков и составляет примерно $T_{\Omega} = T_i \approx 50950$ лет (ранее в [12], где изучался вариант с совпадением узлов, было получено $T_{\Omega} \approx 50625$ лет, причиной малого расхождения в 0.5% является отличие в начальных условиях).

5.2. Эволюции орбит в системе экзопланет K2-36

Вековая эволюция орбит для системы из двух планет вокруг звезды K2-36 ранее не изучалась. Параметры этой системы даны в табл. 2.

Таблица 2. 10 параметров экзосистемы K2-36. Погрешности параметров симметризованы для удобства оценки погрешности периода прецессии. Период прецессии T_{prec} круговых орбит планет рассчитан нами по формуле $T_{prec} = 2\pi / (A_{11} + A_{21})$. Данные по статьям [15, 16]

Система	K2-36
M_*, M_{Sun}	0.79 ± 0.01
m_b, M_{Earth}	3.9 ± 1.1
m_c, M_{Earth}	7.8 ± 2.3
a_b, au	0.0223 ± 0.0004
a_c, au	0.054 ± 0.001
$i_b, ^{\circ}$	84.45 ± 0.063
$i_c, ^{\circ}$	86.917 ± 0.061
$P_b, \text{дни}$	1.422614 ± 0.000038
$P_c, \text{дни}$	5.340888 ± 0.000086
$T_{prec}, 10^3 \text{ лет}$	1.3 ± 0.3

Как следует из наших формул, период либрации орбит по углу наклона и либрации по узлу будет одинаковым. Расчеты показывают, что эти периоды для системы K2-36 одинаковы и примерно равны:

$$T_{\Omega} = T_i \approx 1306 \text{ лет.} \quad (41)$$

Результаты расчетов по формулам разд. 4 показаны на рис. 3, 4. Как и следовало ожидать, во всех

трех вариантах расчета происходят либрационные колебания углов наклона и долготы восходящего узла орбиты.

Как видно из рис. 3 и 4, разность долгот узлов $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ влияет на смещение графиков либраций, но (только в линейном приближении!) не влияет на величину самого периода колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены следующие результаты. Изложена схема модифицированного метода круглых колец Гаусса, предназначенного для изучения вековой эволюции орбит в системах, состоящих из центральной звезды и двух планет. Орбиты планет моделируются однородными круглыми кольцами Гаусса, на которые переносятся массы, размеры и углы наклона орбит, а также орбитальные угловые моменты планет. Восходящие узлы орбит в общем случае не совпадают. Данный метод опирается на взаимную гравитационную энергию колец W_{mut} , которая представлена в виде ряда в квадратичном приближении по степеням малых углов наклона. С помощью этой функции составлена система из 4 дифференциальных уравнений, описывающих вековую эволюцию орбит планет. Решение уравнений эволюции было получено в конечном аналитическом виде, что позволяет в наглядном виде интерпретировать все движения оскулирующих орбит для двухпланетных систем.

Заметим, что решение разд. 4 не является частным случаем решения разд. 3. Между этими решениями существует нетривиальное преобразование. Тривиальна только инвариантность периодов либрации при преобразовании к другой системе координат. Заметим: задача преобразования решения между системами координат не столь тривиальна, как может показаться на первый взгляд, чего стоит только проблема малых знаменателей.

Адекватность метода круглых колец подтверждена на примере системы «Солнце–Юпитер–Сатурн», для которой впервые была рассчитана зависимость от времени разности долгот узлов орбит Юпитера

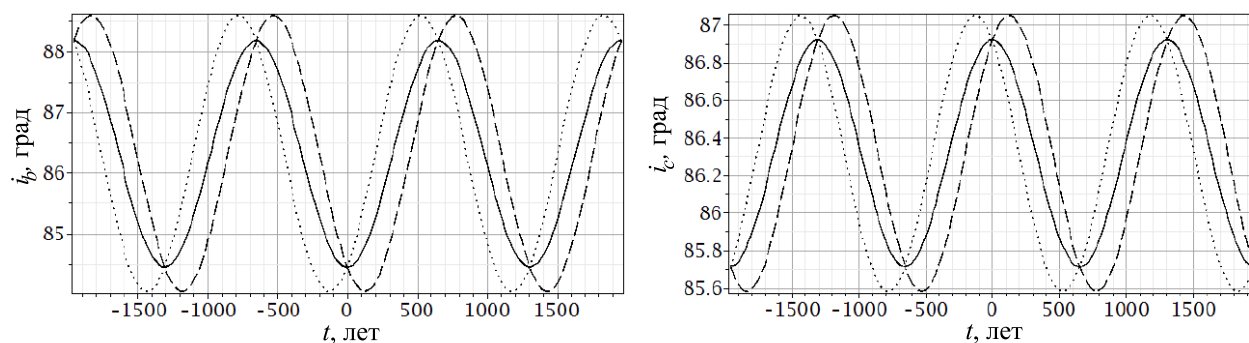


Рис. 3. Зависимость угла наклона орбиты для внутренней планеты K2-36 *b* (левый график) и внешней планеты K2-36 *c* (правый график) от времени. Пунктирная линия соответствует значению $\Delta\Omega_0 = -\Delta i_0$, сплошная линия — значению $\Delta\Omega_0 = 0$, а штрихованная — значению $\Delta\Omega_0 = \Delta i_0$

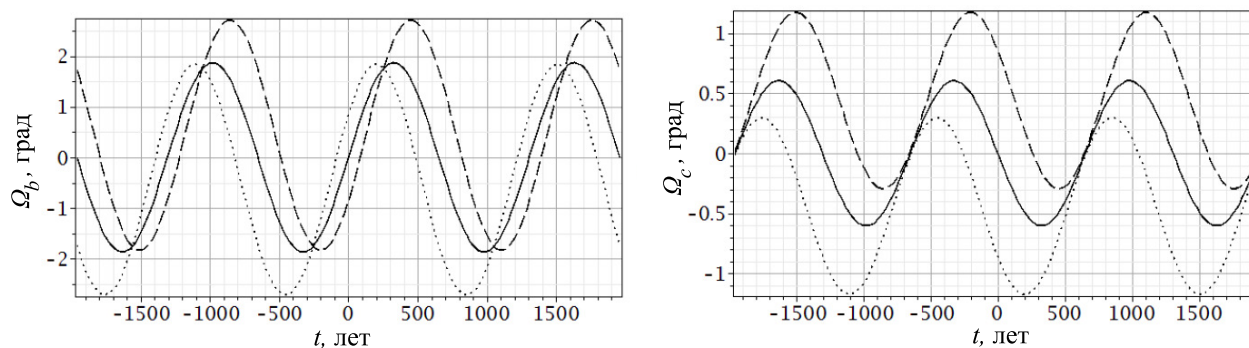


Рис. 4. Зависимость долгот восходящих узлов для планеты K2-36 *b* (левый график) и планеты K2-36 *c* (правый график) от времени. Пунктирная линия соответствует значению $\Delta\Omega_0 = -\Delta i_0$, сплошная линия — значению $\Delta\Omega_0 = 0$, а штрихованная — значению $\Delta\Omega_0 = \Delta i_0$

и Сатурна. Кроме того, с помощью данного метода изучается и вековая эволюция орбит в экзопланетной системе K2 -36. Для неё построены графики всех неизвестных величин. Установлено, что в ходе эволюции угол взаимного наклона орбит остается постоянным, а либрации орбит по углу наклона и по движениям узлов происходят синхронно.

Подчеркнем, что полученные здесь в линейном приближении составляющие частоты либраций σ_1 и σ_2 из (24), а также их сумма σ из (28) не зависят от разности долгот узлов орбит $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Указанная зависимость проявляется себя только в следующем (втором) приближении.

- [1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. 1975.
- [2] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. 1968.
- [3] Емельянов Н.В. Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. 2019.
- [4] Laskar J. // *Astron. Astrophys.* **198**. 341. (1988).
- [5] Simon J.L, Bretagnon P., Chapront J. et al. // *A&A.* **282**. 663. (1994).
- [6] Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. 1986.
- [7] Кондратьев Б.П. // *Астрономический вестник.* **46**, № 5. 380. (2012).
- [8] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. // *Астрономический журнал.* **97**, № 5. 408. (2020).
- [9] Kondratyev B.P. // *MNRAS.* **442**. 1755. (2014).
- [10] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. // *Астрономический журнал.* **98**, № 7. 571. (2021).
- [11] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. 2007.
- [12] Кондратьев Б.П. // *Астрономический вестник.* **48**, № 5. 396. (2014).
- [13] Моррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. 2009.
- [14] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. // *Астрономический журнал.* 2023. Принята в печать.
- [15] Damasso M., Zeng L., Malavolta L. et al. // *Astronomy & Astrophysics.* **624**, A38. (2019).
- [16] Sinukoff E., Howard A. W., Petigura E.A. et al. // *ApJ.* **827**, 78. (2016).

Modified method of round Gaussian rings. Application to the two-planetary problem

B.P. Kondratyev^{1,2,3,a}, V.S. Kornoukhov², E.V. Basova¹

¹*Department of Celestial Mechanics, Astrometry and Gravimetry, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

²*P.K. Sternberg State Astronomical Institute (GAISH MSU). Moscow, 119991, Russia*

³*Main (Pulkovo) Astronomical Observatory RAS. St. Petersburg, Russia*

E-mail: ^awork@boris-kondratyev.ru

A scheme of the modified method of round Gaussian rings, designed to study the secular evolution of orbits in systems consisting of a central star and two planets, is presented. The reason for the secular evolution of the nodes and inclinations of the orbits of the planets is their mutual gravitational attraction. The orbits of the planets are modeled by homogeneous round Gaussian rings, to which the masses, sizes and angles of inclination of the orbits, as well as orbital angular momenta of the planets, are transferred. The method takes into account the fact that, in general, the ascending nodes of the orbits may not coincide. The mutual gravitational energy of the rings W_{mut} is represented as a series in the quadratic approximation in powers of small inclination angles. Using this function W_{mut} , a closed system of four differential equations describing the secular evolution of the planets' orbits is composed. The solution to the equations is obtained in finite analytic form, which simplifies the interpretation of the investigated planetary motions. The method was tested on the example of the Sun-Jupiter-Saturn system; for it, in particular, the difference in the longitudes of the nodes of the orbits of Jupiter and Saturn was calculated as a function of time. New approach is also used to study the precession of nodes in the exoplanetary system K2-36; graphs of all unknown quantities are obtained. It has been established that in the course of evolution the mutual inclination angle of the orbits remains constant, and the librations of the orbits in the inclination angle and in the motion of the nodes occur synchronously.

PACS: 95.10.Ce, 96.15.De, 96.12.De.

Keywords: planets, exoplanets, Gaussian rings, secular evolution of orbits.

Received 03 June 2023.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 5, pp. 681–688.

Сведения об авторах

1. Кондратьев Борис Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: work@boris-kondratyev.ru.
2. Корноухов Вадим Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, инженер.
3. Басова Екатерина Владимировна — студентка физфака МГУ.