ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Системы реакция–диффузия с нелинейными источниками разной интенсивности в случае кратного корня без условия квазимонотонности

Р. Е. Симаков[1, *]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 10.08.2023; после доработки 07.09.2023; подписана в печать 12.09.2023)

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных без требования квазимонотонности правых частей. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение погранслойного типа. Получено условие, которое заменяет собой условие квазимонотонности и расширяет класс задач, к которым применимы результаты работы.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv. УДК: 517.928.4
Ключевые слова: сингулярно возмущённые краевые задачи, асимптотика по малому параметру, кратный корень вырожденного уравнения, условие квазимонотонности.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2360102

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений асимптотического анализа в последние десять лет (см. [1]) является исследование дифференциальных уравнений и систем в случае кратного корня вырожденного уравнения. Основоположником данного направления В. Ф. Бутузовым вместе с учениками опубликовано значительное количество работ, объектом рассмотрения которых нередко становилась система уравнений

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2} = F(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon\frac{d^2v}{dx^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad 0<x<1, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ — искомые скалярные функции. Были построены асимптотические разложения погранслойных решений системы (1) с краевыми условиями различных типов в случае, когда вырожденное уравнение $F(u,v,x,0)=0$ имеет двукратный корень $u=\varphi(v,x)$ [2], [3], [4]. Отметим, что нелинейности в виде полиномов с кратными корнями могут возникать, например, в задачах фильтрации (см. [5]). Также кратный корень появляется в случае, когда устойчивый корень отличается от неустойчивого на асимптотически малую величину [6].

При исследовании таких задач неизменным оставалось требование квазимонотонности правых частей уравнений (1), т. е. монотонности функции F по переменной v и функции f по переменной u в некоторой области, которой принадлежит решение задачи. Новизна настоящей работы заключается в отказе от этого требования. На примере задачи из статьи [2] показано, что требование квазимонотонности является избыточным и может быть заменено на более слабое, легко проверяемое условие. Наиболее важным новым результатом является условие A5, позволяющее существенно расширить класс задач, к которым применимы уже известные теоремы о существовании и асимптотике решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим в точках $x=0$ и $x=1$ граничные условия Неймана

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{du}{dx}(1,\varepsilon) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon) = \frac{dv}{dx}(1,\varepsilon) = 0 \tag{2}$$

и будем рассматривать задачу (1), (2) при тех же условиях, что и в статье [2], за исключением требования квазимонотонности.

<u>Условие A0.</u>

Функции $F(u,v,x,\varepsilon)$ и $f(u,v,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими при $(u,v,x,\varepsilon) \in D = I_u \times I_v \times [0;1] \times [0;\varepsilon_0]$, где I_u и I_v — некоторые интервалы изменения переменных u и v, $\varepsilon_0 > 0$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить.

<u>Условие A1.</u>

Функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon) = h(u,v,x)(u-\varphi(v,x))^2 - \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где $\varphi(v,x) \in I_u$ при $(v,x) \in I_v \times [0;1]$.

* E-mail: simakov.re14@physics.msu.ru

Условие A2.
Уравнение $g(v,x) := f(\varphi(v,x),v,x,0) = 0$ имеет корень $v = \bar{v}_0(x) \in I_v$, $x \in [0;1]$, причём

$$\bar{g}_v(x) := \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0(x),x) > 0, \quad x \in [0;1]. \tag{3}$$

Условие A3.
Функция $\bar{h}(x) := h(\bar{u}_0(x),\bar{v}_0(x),x)$ положительна при $x \in [0;1]$, где $\bar{u}_0(x) := \varphi(\bar{v}_0(x),x)$.
Условие A4.
Функция $\bar{F}_1(x) := F_1(\bar{u}_0(x),\bar{v}_0(x),x,0)$ положительна при $x \in [0;1]$.
По аналогии с $\bar{g}_v(x)$ и $\bar{F}_1(x)$ введём обозначения $\bar{\varphi}_v(x)$, $\bar{f}_u(x)$, $\bar{f}_v(x)$.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

В работе [2] при условиях A0–A4 была построена погранслойная асимптотика решения задачи (1), (2). На этом этапе не использовалась квазимонотонность функций F и f, вследствие чего алгоритм построения асимптотики переносится из [2] без изменений. Напомним его ключевые моменты.

Асимптотика решения строится в виде

$$U(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + \Pi u(\xi,\varepsilon) + Pu(\zeta,\varepsilon) + \\ + \tilde{\Pi}u(\tilde{\xi},\varepsilon) + \tilde{P}u(\tilde{\zeta},\varepsilon),$$

$$V(x,\varepsilon) = \bar{v}(x,\varepsilon) + \Pi v(\xi,\varepsilon) + Pv(\zeta,\varepsilon) + \\ + \tilde{\Pi}v(\tilde{\xi},\varepsilon) + \tilde{P}v(\tilde{\zeta},\varepsilon).$$

Регулярные части асимптотики $\bar{u}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}(x,\varepsilon)$ строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x), \quad \bar{v}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i(x).$$

Главными членами этих рядов являются функции $\bar{u}_0(x)$, $\bar{v}_0(x)$, определённые в условиях A2 и A3.

Для описания пограничного слоя в окрестности точки $x = 0$ строятся две пары рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi u(\xi,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}\Pi_i u(\xi),$$

$$\Pi v(\xi,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}\Pi_i v(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \geq 0,$$

$$Pu(\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}P_i u(\zeta),$$

$$Pv(\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}P_i v(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}} \geq 0.$$

Погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 1$ ($\tilde{\Pi}u(\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\tilde{\Pi}v(\tilde{\xi},\varepsilon)$ и $\tilde{P}u(\tilde{\zeta},\varepsilon)$, $\tilde{P}v(\tilde{\zeta},\varepsilon)$) имеют аналогичные выражения, где $\tilde{\xi} = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}$, $\tilde{\zeta} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$. Все погранслойные функции экспоненциально убывают с ростом соответствующей растянутой переменной.

В качестве асимптотики n-го порядка берутся суммы

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}(\Pi_i u(\xi) + \tilde{\Pi}_i u(\tilde{\xi})) + \\ + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}(P_i u(\zeta) + \tilde{P}_i u(\tilde{\zeta})), \tag{4}$$

$$V_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\bar{v}_i(x) + \sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}(\Pi_i v(\xi) + \tilde{\Pi}_i v(\tilde{\xi})) + \\ + \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4}(P_i v(\zeta) + \tilde{P}_i v(\tilde{\zeta})). \tag{5}$$

Из алгоритма построения асимптотики следуют равенства

$$L_\varepsilon(U_n,V_n) := \varepsilon^2\frac{d^2U_n}{dx^2} - F(U_n,V_n,x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+3/4}), \tag{6}$$

$$M_\varepsilon(V_n,U_n) := \varepsilon\frac{d^2V_n}{dx^2} - f(U_n,V_n,x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1/2}) \tag{7}$$

и

$$\frac{dU_n}{dx}(0,\varepsilon) = o(\varepsilon^N), \quad \frac{dU_n}{dx}(1,\varepsilon) = o(\varepsilon^N),$$
$$\frac{dV_n}{dx}(0,\varepsilon) = o(\varepsilon^N), \quad \frac{dV_n}{dx}(1,\varepsilon) = o(\varepsilon^N)$$

для любого $N > 0$.

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Будем доказывать существование решения с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств [7], т. е. построив верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) на основе формальной асимптотики (4), (5). Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (1), (2).

Определение 1. Две пары функций $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0;1) \cap C^{(1)}[0;1]$, называются *упорядоченными верхним и нижним решениями* задачи (1), (2), если они удовлетворяют следующим условиям:

1. при $x \in [0;1]$ выполнены неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \leq \overline{U}(x,\varepsilon) \quad \text{и} \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \leq \overline{V}(x,\varepsilon);$$

2. при $x \in (0;1)$ справедливы неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},v) \leq 0 \leq L_\varepsilon(\underline{U},v) \text{ при } \underline{V}(x,\varepsilon) \leq v \leq \overline{V}(x,\varepsilon),$$
$$M_\varepsilon(\overline{V},u) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\underline{V},u) \text{ при } \underline{U}(x,\varepsilon) \leq u \leq \overline{U}(x,\varepsilon)$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (6) и (7));

3. имеют место неравенства

$$\frac{d\overline{U}}{dx}(0,\varepsilon) \le 0 \le \frac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon), \quad \frac{d\overline{V}}{dx}(0,\varepsilon) \le 0 \le \frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon),$$

$$\frac{d\overline{U}}{dx}(1,\varepsilon) \ge 0 \ge \frac{d\underline{U}}{dx}(1,\varepsilon), \quad \frac{d\overline{V}}{dx}(1,\varepsilon) \ge 0 \ge \frac{d\underline{V}}{dx}(1,\varepsilon).$$

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u = u(x,\varepsilon)$, $v = v(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам (см. [7])

$$\begin{gathered} \underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \\ \underline{V}(x,\varepsilon) \le v(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1]. \end{gathered} \tag{8}$$

3.1. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2)

Введём вспомогательное условие, которое будет обеспечивать существование упорядоченных верхнего и нижнего решений.

Условие A5′.

Существуют непрерывные положительные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, такие что при всех $\theta \in [-1;1]$ и $x \in [0;1]$

$$\begin{gathered} A(\theta,x) := \alpha(x) - \theta\bar{\varphi}_v(x)\beta(x) > 0, \\ B(\theta,x) := \theta\bar{f}_u(x)\alpha(x) + \bar{f}_v(x)\beta(x) > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса следует, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно заменить положительными многочленами, не нарушив выполнение неравенств (9). В связи с этим, не ограничивая общности, будем считать функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно дифференцируемыми.

Будем строить функции $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\underline{U}$, $\underline{V}$ как модификацию функций U_n и V_n, определённых равенствами (4), (5):

$$\begin{aligned} \overline{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2+1/4}c\alpha(x) + \varepsilon^{n/2+3/4}z(x,\varepsilon), \\ \overline{V}(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n/2+1/4}c\beta(x) + \varepsilon^{n/2+3/4}z(x,\varepsilon), \\ \underline{U}(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2+1/4}c\alpha(x) - \varepsilon^{n/2+3/4}z(x,\varepsilon), \\ \underline{V}(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n/2+1/4}c\beta(x) - \varepsilon^{n/2+3/4}z(x,\varepsilon), \end{aligned}$$

где $z(x,\varepsilon) = \exp(-k\xi) + \exp(-k\tilde{\xi})$, c и k — положительные числа, выбор которых уточним ниже.

3.2. Проверка выполнения условий определения 1

Условие 1 упорядоченности верхнего и нижнего решений очевидно выполнено.

Пусть $n \ge 1$. Введём обозначение

$$F_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial u}(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon),$$

придадим такой же смысл обозначениям $F_v(x,\varepsilon)$, $f_u(x,\varepsilon)$, $f_v(x,\varepsilon)$ и перейдём к проверке условия 2. Заметим, что всякое $u \in [\underline{U}(x,\varepsilon);\overline{U}(x,\varepsilon)]$ можно представить в виде

$$u = U_n(x,\varepsilon) + \theta\varepsilon^{n/2+1/4}(c\alpha(x) + \sqrt{\varepsilon}z(x,\varepsilon))$$

при некотором $\theta \in [-1;1]$, а для $v \in [\underline{V}(x,\varepsilon);\overline{V}(x,\varepsilon)]$ справедливо аналогичное выражение:

$$v = V_n(x,\varepsilon) + \theta\varepsilon^{n/2+1/4}(c\beta(x) + \sqrt{\varepsilon}z(x,\varepsilon)).$$

Запишем выражения для $L_\varepsilon(\overline{U},v)$ и $M_\varepsilon(\overline{V},u)$ при $\underline{U} \le u \le \overline{U}$, $\underline{V} \le v \le \overline{V}$:

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon(\overline{U},v) = \varepsilon^2\frac{d^2\overline{U}}{dx^2} - F(\overline{U},v,x,\varepsilon) = \\ &= L_\varepsilon(U_n,V_n) + \varepsilon^{n/2+9/4}c\alpha''(x) + \varepsilon^{n/2+7/4}k^2z(x,\varepsilon) - \\ &\qquad - [F(\overline{U},v,x,\varepsilon) - F(U_n,V_n,x,\varepsilon)], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &M_\varepsilon(\overline{V},u) = \varepsilon\frac{d^2\overline{V}}{dx^2} - f(u,\overline{V},x,\varepsilon) = \\ &= M_\varepsilon(V_n,U_n) + \varepsilon^{n/2+5/4}c\beta''(x) + \varepsilon^{n/2+3/4}k^2z(x,\varepsilon) - \\ &\qquad - [f(u,\overline{V},x,\varepsilon) - f(U_n,V_n,x,\varepsilon)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Используя оценки (см. [2])

$$\begin{gathered} F_u(x,\varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon\bar{h}(x)\bar{F}_1(x)} + O(\varepsilon^{3/4}), \\ F_v(x,\varepsilon) = -2\bar{\varphi}_v(x)\sqrt{\varepsilon\bar{h}(x)\bar{F}_1(x)} + O(\varepsilon^{3/4}), \\ f_u(x,\varepsilon) = \bar{f}_u(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad f_v(x,\varepsilon) = \bar{f}_v(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{gathered}$$

преобразуем разности в квадратных скобках в равенствах (10), (11):

$$\begin{aligned} &F(\overline{U},v,x,\varepsilon) - F(U_n,V_n,x,\varepsilon) = F_u\varepsilon^{n/2+1/4}c\alpha(x) + \\ &+ F_v\theta\varepsilon^{n/2+1/4}c\beta(x) + O(\varepsilon^{n/2+5/4}) + O(\varepsilon^{n+1/2}) = \\ &\qquad = 2\varepsilon^{n/2+3/4}\sqrt{\bar{h}(x)\bar{F}_1(x)}cA(\theta,x) + \\ &\qquad\qquad + O(\varepsilon^{n/2+1}) + O(\varepsilon^{n+1/2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(u,\overline{V},x,\varepsilon) - f(U_n,V_n,x,\varepsilon) = f_u\theta\varepsilon^{n/2+1/4}c\alpha(x) + \\ &+ f_v\varepsilon^{n/2+1/4}c\beta(x) + O(\varepsilon^{n/2+3/4}) + O(\varepsilon^{n+1/2}) = \\ &= \varepsilon^{n/2+1/4}cB(\theta,x) + O(\varepsilon^{n/2+3/4}) + O(\varepsilon^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Выражение для $L_\varepsilon(\overline{U},v)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon(\overline{U},v) = O(\varepsilon^{n/2+3/4}) - \\ &\quad - 2\varepsilon^{n/2+3/4}\sqrt{\bar{h}(x)\bar{F}_1(x)}cA(\theta,x) + O(\varepsilon^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Сумму первых двух слагаемых в силу условий A3, A4, A5′ можно сделать отрицательной выбором достаточно большого c. Так как $n \ge 1$, третье слагаемое имеет более высокий порядок малости по ε, чем первые два, и при достаточно малых ε не изменит знака всей суммы, т. е. будет выполнено неравенство

$$L_\varepsilon(\overline{U}, v) < 0, \quad x \in (0;1).$$

Для $M_\varepsilon(\overline{V}, u)$ имеем

$$M_\varepsilon(\overline{V}, u) = O(\varepsilon^{n/2+1/2}) - \varepsilon^{n/2+1/4} c B(\theta, x) + O(\varepsilon^{n+1/2}).$$

Очевидно, что при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$M_\varepsilon(\overline{V}, u) < 0, \quad x \in (0;1).$$

Точно так же проверяется выполнение неравенств $L_\varepsilon(\underline{U}, v) \geq 0$ и $M_\varepsilon(\underline{V}, u) > 0$. Следовательно, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2 определения 1.

Легко проверяется, что при достаточно большом k эти функции удовлетворяют условию 3 определения 1.

Таким образом, при $n \geq 1$ две пары функций $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ являются для достаточно больших c, k и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (1), (2). Отсюда следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам (8), а так как $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от U_n, V_n на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2+1/4})$, то и решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ отличается от U_n, V_n на величины того же порядка, т. е.

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2+1/4}),$$
$$v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2+1/4}), \quad x \in [0;1].$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если написать их для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1} = U_n + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1} = V_n + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$. Тогда для $n \geq 0$ получим равенства

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) &= U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \\ v(x,\varepsilon) &= V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2}), \quad x \in [0;1]. \end{aligned} \tag{12}$$

3.3. Теорема об асимптотике решения

Выше было доказано существование решения с построенной асимптотикой, но при этом использовалось условие A5′, которое не является легко проверяемым. Кроме того, не ясна его связь с условием квазимонотонности. В связи с этим заменим его более удобным условием A5.

Условие A5.

$\bar{f}_v(x) - |\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x)| > 0$ при $x \in [0;1]$.

Лемма *Если $\bar{f}_u(x)$, $\bar{f}_v(x)$ и $\bar{\varphi}_v(x)$ — непрерывные функции, то условия A5 и A5′ эквивалентны.*

Доказательство. A5→A5′: Пусть выполнено условие A5. Тогда $\alpha(x) = \bar{f}_v(x) + |\bar{\varphi}_v(x)|$ и $\beta(x) = 1 + |\bar{f}_u(x)|$ — непрерывные положительные функции. Запишем выражения для $A(\theta, x)$ и $B(\theta, x)$:

$$\begin{aligned} A(\theta,x) &= \bar{f}_v + |\bar{\varphi}_v| - \theta\bar{\varphi}_v(1 + |\bar{f}_u|) = \\ &= \left[\bar{f}_v - \theta\bar{\varphi}_v|\bar{f}_u|\right] + |\bar{\varphi}_v| - \theta\bar{\varphi}_v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\theta,x) &= \theta\bar{f}_u(\bar{f}_v + |\bar{\varphi}_v|) + \bar{f}_v(1 + |\bar{f}_u|) = \\ &= \left[\bar{f}_v + \theta\bar{f}_u|\bar{\varphi}_v|\right] + \bar{f}_v(|\bar{f}_u| + \theta\bar{f}_u). \end{aligned}$$

Очевидно, что $|\bar{\varphi}_v| - \theta\bar{\varphi}_v \geq 0$, $|\bar{f}_u| + \theta\bar{f}_u \geq 0$ при $\theta \in [-1;1]$, а $\bar{f}_v$ и оба выражения в квадратных скобках строго положительны в силу условия A5. Следовательно, $A(\theta,x) > 0$ и $B(\theta,x) > 0$, т. е. выполнено условие A5′.

A5′ →A5: Пусть выполнено условие A5′. Зафиксируем произвольное $x \in [0;1]$ и запишем выражения для $A(\theta_1, x)$ и $B(\theta_2, x)$:

$$A(\theta_1,x) = \alpha(x) - \theta_1\bar{\varphi}_v(x)\beta(x),$$
$$B(\theta_2,x) = \theta_2\bar{f}_u(x)\alpha(x) + \bar{f}_v(x)\beta(x).$$

Выразим $\alpha(x)$ из первого равенства и подставим во второе. После перегруппировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} &B(\theta_2,x) - \theta_2\bar{f}_u(x)A(\theta_1,x) = \\ &\qquad = (\bar{f}_v(x) + \theta_1\theta_2\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x))\beta(x). \end{aligned}$$

При $\theta_1 = \operatorname{sgn}\bar{\varphi}_v(x)$, $\theta_2 = -\operatorname{sgn}\bar{f}_u(x)$ это равенство примет вид

$$B(\theta_2,x) + |\bar{f}_u(x)|A(\theta_1,x) = (\bar{f}_v(x) - |\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x)|)\beta(x).$$

Так как по условию A5′ $A(\theta_1,x) > 0$, $B(\theta_2,x) > 0$ и $\beta(x) > 0$, отсюда следует, что

$$\bar{f}_v(x) - |\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x)| = \frac{B(\theta_2,x) + |\bar{f}_u(x)|A(\theta_1,x)}{\beta(x)} > 0,$$

т. е. выполнено условие A5. Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы в виде теоремы.

Теорема *Пусть выполнены условия A0–A5. Тогда при всех достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение. Кроме того, для любого целого $n \geq 0$ найдётся такое решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства (12).*

4. О СВЯЗИ УСЛОВИЯ A5 С УСЛОВИЕМ КВАЗИМОНОТОННОСТИ

Выше было показано, что при рассмотрении задачи (1), (2) можно заменить условие квазимонотонности на условие A5. Покажем теперь, что условие A5 является более слабым, чем условие квазимонотонности, вследствие чего сформулированная теорема применима к более широкому кругу задач, чем аналогичная теорема из [2].

Предположим, что функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности, а именно являются невозрастающими по переменным v и u соответственно в некоторой области, которой при достаточно малых ε принадлежит решение задачи. Отсюда последует, что

$$\bar{\varphi}_v(x) \geq 0, \quad \bar{f}_u(x) \leq 0. \tag{13}$$

Условие A5 после раскрытия модуля примет вид $\bar{f}_v(x) + \bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x) > 0$, но это неравенство выполнено в силу (3), так как $\bar{f}_v(x) + \bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x) = \bar{g}_v(x)$.

При обратной квазимонотонности, т. е. когда функции F и f являются неубывающими по соответствующим переменным, знаки неравенств (13) меняются на противоположные и условие A5 снова выполняется в силу (3).

В случае смешанной квазимонотонности функции $\bar{\varphi}_v(x)$ и $\bar{f}_u(x)$ одного знака. Условие A5 принимает вид

$$\bar{f}_v(x) - \bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x) > 0 \tag{14}$$

и становится уже существенным требованием. Однако при рассмотрении задач со смешанной квазимонотонностью, как правило, возникают дополнительные условия, которые являются аналогами неравенства (14) для той задачи, о которой идёт речь [8]. Таким образом, и в этом случае условие A5 не является избыточным, хотя и не выполняется автоматически как следствие остальных условий.

4.1. Пример

Приведём пример задачи, удовлетворяющей условиям A0–A5, но не условию квазимонотонности. Возьмём систему уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = \left(u - v\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \varepsilon, \\ &\varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} = vx + v + x - u, \quad 0 < x < 1 \end{aligned} \tag{15}$$

с граничными условиями (2). Здесь

$$h(u,v,x) = F_1(u,v,x,\varepsilon) = 1, \quad \varphi(v,x) = v\left(x - \frac{1}{2}\right),$$
$$g(v,x) = \frac{3}{2}v + x, \quad \bar{v}_0(x) = -\frac{2}{3}x,$$
$$\bar{u}_0(x) = -\frac{2}{3}x\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \bar{g}_v(x) = \frac{3}{2},$$
$$\bar{\varphi}_v(x) = x - \frac{1}{2}, \quad \bar{f}_u(x) = -1, \quad \bar{f}_v(x) = x + 1.$$

Выполнение условий A0–A4 очевидно, а для условия A5 имеем

$$\bar{f}_v(x) - |\bar{f}_u(x)\bar{\varphi}_v(x)| = x + 1 - \left|\frac{1}{2} - x\right| \ge \frac{1}{2} > 0,$$
$$x \in [0;1].$$

Таким образом, к задаче (15), (2) применима доказанная теорема. В то же время, условие квазимонотонности в любом из его вариантов не выполнено, так как функция $\bar{\varphi}_v(x)$ меняет знак на отрезке $[0;1]$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Условие вида A5′ ранее возникало в работе [9], где рассматривалась краевая задача, существенно отличная от задачи (1), (2). Это наводит на мысль, что предложенный метод отказа от условия квазимонотонности путём введения условия A5′ может применяться к достаточно широкому кругу задач, куда, как уже известно, входят как одномерные, так и двумерные задачи с кратными корнями или без них.

2. Из доказанной в п. 3.3 леммы следует, что замена условия A5′ на условие A5 универсальна и может быть проведена в любой задаче, где возникает подобное условие.

3. Из условия A2 можно исключить неравенство (3), так как оно является следствием условия A5.

4. Стандартным способом можно доказать локальную единственность решения задачи (1), (2) и его асимптотическую устойчивость как стационарного решения соответствующей начально-краевой задачи [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00069).

[1] *Нефёдов Н.Н.* // Журнал вычисл. математики и матем. физики. **61**, № 12. 2074. (2021).

[2] *Бутузов В.Ф.* // Дифференц. уравнения. **50**, № 2. 175. (2014).

[3] *Бутузов В.Ф.* // Нелинейные колебания. **21**, № 1. 6. (2018).

[4] *Бутузов В.Ф.* // Изв. РАН. Сер. матем. **84**, № 2. 60. (2020).

[5] *Афанасьев А.А., Веденеева Е.А.* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. № 5. 46. (2020).

[6] *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* // Journal of Mathematical Sciences. **121**, N. 1. 1973. (2004).

[7] *Пао С.V.* // Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.

[8] *Тищенко Б.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. № 5. 44. (2021). (*B. V. Tishchenko* // Moscow Univ. Phys. Bull. **76**, No. 5. 296. (2021)).

[9] *Нефёдов Н.Н., Дерюгина Н.Н.* // ТМФ. **212**, № 1. 83. (2022).

[10] *Нефёдов Н.Н.* // Дифференц. уравнения. **36**, № 2. 262. (2000).

Reaction–diffusion systems with nonlinear sources of different intensity in the case of a multiple roots without quasimonotonicity condition

R. E. Simakov

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: simakov.re14@physics.msu.ru

We consider a boundary value problem for a singularly perturbed system of two second-order ordinary differential equations with different powers of a small parameter at the second derivatives without requiring the right-hand sides to be quasimonotonic. The specific feature of the problem is that one of the two equations in the degenerate system has a double root. It is proved that for sufficiently small values of a small parameter, the problem has a solution of the boundary layer type. A condition is obtained that replaces the quasimonotonicity condition and expands the class of problems to which the results of the work are applicable.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv.
Keywords: singularly perturbed boundary value problems, asymptotics with respect to a small parameter, multiple root of a degenerate equation, quasimonotonicity condition.
Received 10 August 2023.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 6. Pp. 751–756.

Сведения об авторе
Симаков Роман Евгеньевич — аспирант; e-mail: simakov.re14@physics.msu.ru.