ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. **78**(6), 2360103 (2023)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О разрушении и о глобальном существовании слабых решений задачи Коши для одного нелинейного уравнения псевдопараболического типа

И. К. Каташева,[1] М. О. Корпусов,[1] А. А. Панин[1, 2, *]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

[2] *Российский университет дружбы народов Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо–Маклая, д. 6*

(Поступила в редакцию 31.07.2023; после доработки 14.08.2023; подписана в печать 19.08.2023)

Кратко приводятся результаты исследования задачи Коши для одного нелинейного уравнения псевдопараболического типа, являющегося математическим обобщением одной модели из теории полупроводников. В статье разработана теория потенциала для линейной части уравнения, что потребовало развития довольно кропотливой техники, которая может быть применена и при исследовании других уравнений. Интерес представляют и свойства фундаментального решения этой линейной части, поскольку уже первая его производная по времени имеет особенность. Это нехарактерно для уравнений рассматриваемого типа. Также в работе получены достаточные условия глобальной по времени разрешимости уравнения и разрушения его решения за конечное время.

PACS: 02.30.Jr. УДК: 517.957, 517.958.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.78.2360103

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе кратко приводятся результаты исследования локальной разрешимости, глобальной разрешимости и разрушения за конечное время следующей задачи Коши для уравнения, обобщающего одну модель из теории полупроводников:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u(x,t)-u(x,t)=|u(x,t)|^q,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,T],\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^3.\tag{2}$$

Уравнение (1) является нелинейным уравнением соболевского типа. Исследованию линейных и нелинейных уравнений этого типа посвящено много работ. В частности, в работах Г. А. Свиридюка, С. А. Загребиной, А. А. Замышляевой [1–3] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для разнообразных классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

У фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ линейной части уравнения (1) при дифференцировании по времени t появляются особенности, в том числе и неинтегрируемые, что является нетипичным случаем в теории соболевских уравнений, к которым принадлежит и уравнение (1). Этим фактом мотивируется построение теории потенциала для линейной части нелинейного уравнения (1) с последующим исследованием задачи Коши для этого нелинейного уравнения.

Насколько нам известно, впервые теория потенциала для неклассических уравнений соболевского типа была рассмотрена в работе Б. В. Капитонова [4]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С. А. Габова и А. Г. Свешникова [5, 6], а также в работах их учеников (см., например, работу Ю. Д. Плетнера [7]).

В работе [8] С. И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. (См. также другие работы С. И. Похожаева, посвящённые применению метода нелинейной ёмкости, например [9].) Отметим, кроме того, работы Е. И. Галахова и О. А. Салиевой [10, 11], работы Е. В. Юшкова ([12, 13] и другие). Интересно отметить также работы А. И. Аристова (см., напр., [14]), где получены точные решения нелинейных соболевских уравнений — в частности решения, разрушающиеся за конечное время.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые нами в работах [15–17].

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближе-

* a-panin@yandex.ru

нии:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi en, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где n — концентрация носителей заряда (электронов), e — их заряд, $\mathbf{D}$ — вектор индукции электрического поля, а $\mathbf{E}$ — это вектор напряжённости электрического поля. В случае поверхностно односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ существует потенциал ϕ электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \Delta\phi = -\frac{4\pi e}{\varepsilon}n. \tag{4}$$

Из второго уравнения (4) получаем:

$$n = -\frac{\varepsilon}{4\pi e}\Delta\phi. \tag{5}$$

При этом для изменения концентрации n носителей заряда верно соотношение [18]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_0\exp(\phi) - n_0}{\tau}, \tag{6}$$

где τ — максвелловское время релаксации.Тогда из (5), (6) получаем

$$A\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi = \frac{n_0}{\tau}(\exp(\phi) - 1) \tag{7}$$

с $A = -\frac{\varepsilon}{4\pi e} > 0$. Раскладывая теперь экспоненту по Тейлору, при малых ϕ приближённо получаем:

$$A\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi = \frac{n_0}{\tau}(\phi + \frac{\phi^2}{2}). \tag{8}$$

Полагая единицей не существенные для качественного поведения решения константы, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi - \phi = \phi^2. \tag{9}$$

С точки зрения теории нелинейных дифференциальных уравнений интересно рассмотреть обобщение этого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi - \phi = |\phi|^q, \quad q > 1, \tag{10}$$

чем мы и занимаемся в данной работе.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Перечислим основные обозначения, используемые в работе.

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^3 : \ z = (1-s)x + sy, \ s \in [0,1]\}.$$

$$|a, b| = \begin{cases} [a, b], & \text{если} \quad a \leqslant b; \\ [b, a], & \text{если} \quad b \leqslant a. \end{cases}$$

Символом $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем банахово пространство ограниченных непрерывных функций f на $\mathbb{R}^3$ с нормой

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}|f(x)|. \tag{11}$$

Под $\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ мы понимаем банахово пространство ограниченных непрерывно дифференцируемых функций f на $\mathbb{R}^3$ с нормой

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left[|f(x)| + \sum_{j=1}^3\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|\right]. \tag{12}$$

Рассмотрим подмножество функций $f(x)\in\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{1,\mathrm{w}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^{3/8}\left[|f(x)| + \sum_{j=1}^3\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|\right]. \tag{13}$$

Можно доказать, что это множество является банаховым пространством. Обозначим его $\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3)$. Кроме того, мы будем использовать пространства абстрактных функций $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}), \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Пространство $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$ тоже банахово и определяется следующими условиями:

$$f(t) \in \mathbb{B} \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T],$$

$$\|f(t) - f(t_0)\|_{\mathbb{B}} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to t_0, \quad t, t_0 \in [0,T].$$

Далее, будем говорить, что $f \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$, если $f \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$ и существует сильная производная $\dfrac{df}{dt} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, где сильная производная понимается в следующем смысле: $\left\|\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \dfrac{df}{dt}(t)\right\|_{\mathbb{B}} \to +0$ при $\Delta t \to 0$. В частности, мы будем использовать пространства

$$\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)) \quad \text{и} \quad \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3)).$$

Кроме того, будем использовать обозначение $\mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$ при $\beta \geqslant 0$ для подпространства банахова пространства $\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, образованного функциями f с

$$\|f\|_{2,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}(1+|x|^2)^{\beta/2}\left[|f(x)| + \sum_{k=1}^3\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right| + \sum_{i,j=1,1}^{3,3}\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\right] < +\infty.$$

Это подпространство является банаховым пространством относительно нормы $\|f\|_{2,\beta}$. Символами $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ мы обозначаем пространства измеримых и локально интегрируемых по Лебегу функций. Символами $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$,

$\mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T))$ и $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, +\infty))$ мы обозначаем пространства основных функций, а символами $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T))$ и $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, +\infty))$ — соответствующие пространства обобщенных функций. Символом $\mathbb{C}^{2+1}(\overline{D})$, где $D = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, мы обозначаем линейное пространство таких функций $f(x,t)$, что

$$D_x^\alpha D_t^\beta f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3, \\ \beta \in \mathbb{Z}_+, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

причем $|\alpha| \in \{0,1,2\}$ и $\beta \in \{0,1\}$ и соответствующие смешанные производные коммутируют.

3. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Получим фундаментальное решение $\mathscr{E}$ линейной части оператора уравнения (1). Для этого рассмотрим следующее уравнение в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) = \delta(x)\delta(t), \\ \mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta_x \mathscr{E}(x,t) - \mathscr{E}(x,t). \tag{14}$$

Применим к обеим частям уравнения (14) преобразование Лапласа в смысле пространства $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R}^1)$ (см. [19]) и после элементарных преобразований получим следующее уравнение в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta_x \overline{\mathscr{E}}(x,p) - \frac{1}{p}\overline{\mathscr{E}}(x,p) = \frac{1}{p}\delta(x). \tag{15}$$

Одним из решений этого уравнения является следующая функция:

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{4\pi|x|}\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{|x|}{\sqrt{p}}\right), \tag{16}$$

где под $\sqrt{z}$ понимается главная ветвь соответствующей двузначной функции. (Нетрудно проверить, что это действительно решение уравнения (15), пользуясь формулой Грина по области с вырезанной особенностью и устремляя радиус вырезанного шара к нулю.)

Воспользуемся формулой 23.150 таблиц [20] и получим следующее выражение для фундаментального решения уравнения (14):

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi^{3/2}}\frac{1}{|x|^2\sqrt{t}}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4|x|^2 t}\right)J_0(2\sqrt{\lambda})\,d\lambda. \tag{17}$$

Переходя к новой переменной интегрирования $\mu = \dfrac{\lambda}{2|x|\sqrt{t}}$, получим выражение

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{2\pi^{3/2}}\frac{1}{|x|}\times \\ \times\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(\mu^2\right)J_0\left(2^{3/2}|x|^{1/2}t^{1/4}\sqrt{\mu}\right)d\mu. \tag{18}$$

Отметим (см. формулу 3.321-3 таблиц Градштейна и Рыжика [21]), что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\mu^2}\,d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{19}$$

Из явного вида функции (18) следует ее бесконечная дифференцируемость:

$$\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\} \times (0,+\infty)). \tag{20}$$

Пользуясь дифференцированием под знаком интеграла, оценками функций Бесселя, равенством (19) и соотношениями типа

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_n(z)}{z^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n}, \quad z \neq 0, \quad n = 0\cup\mathbb{N}, \tag{21}$$

можно получить выражения для производных фундаментального решения и следующие утверждения.

Лемма 1 *Для всех $(x,t) \neq (0,0,0,0)$ справедливы коммутационные соотношения*

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j \partial x_i \partial t} = \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i \partial t \partial x_j} = \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x,t)}{\partial t \partial x_i \partial x_j}, \quad i,j = \overline{1,3}. \tag{23}$$

Лемма 2 *При $x \neq (0,0,0)$ справедливы следующие оценки:*

$$|\mathscr{E}(x,t)| \leqslant c_0 \begin{cases} |x|^{-1}, & \text{если} \quad t \in [0,\delta]; \\ |x|^{-5/4}t^{-1/8}, & \text{если} \quad t > \delta, \quad \delta > 0, \end{cases} \tag{24}$$

$$|\mathscr{E}(x,t)| \leqslant c_0|x|^{-1}, \quad t \geqslant 0, \tag{25}$$

$$|\mathscr{E}(x,t)| \leqslant c_0|x|^{-5/4}t^{-1/8} \ \text{при} \ \neq (0,0,0), \quad t > 0, \tag{26}$$

$$\mathscr{E}(x,0) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \tag{27}$$

Лемма 3 *При $x \neq (0,0,0)$ имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c_0 \begin{cases} t^{-1/2}, & \text{если} \quad t \in (0,\delta]; \\ |x|^{-3/4}t^{-7/8}, & \text{если} \quad t > \delta, \quad \delta > 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c_0|x|^{-3/4}t^{-7/8} \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{29}$$

Лемма 4 *Справедливы следующие равенство и неравенства при $x \neq (0,0,0)$ и $j = 1,2,3$:*

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_j}(x,0) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j}{|x|^3}, \tag{30}$$

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_j}(x,t)\right| \leqslant c_0 \begin{cases} |x|^{-2}+t^{1/2}|x|^{-1}, & \text{если} \quad t\in[0,\delta]; \\ |x|^{-9/4}t^{-1/8}+|x|^{-7/4}t^{1/8}, & \\ & \text{если} \quad t>\delta, \quad \delta>0, \end{cases} \tag{31}$$

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_j}(x,t)\right| \leqslant c_0 \left(|x|^{-9/4}t^{-1/8}+|x|^{-7/4}t^{1/8}\right), \quad t>0, \tag{32}$$

$$\left|\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_j}(x,t)\right| \leqslant c_0 \left[|x|^{-2}+t^{1/2}|x|^{-1}\right], \quad t\geqslant 0. \tag{33}$$

Лемма 5 *Имеют место оценки при* $x\neq(0,0,0)$:

$$\left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j\partial t}\right| \leqslant c_0 \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t\in[0,\delta]; \\ t^{-5/8}|x|^{-5/4}, & \text{если}\ t>\delta, \quad \delta>0, \end{cases} \tag{34}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_j\partial t}\right| \leqslant c_0 t^{-5/8}|x|^{-5/4}, \quad t>0. \tag{35}$$

Лемма 6 *Справедливы следующие оценки при* $x\neq(0,0,0)$:

$$\left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leqslant c_0 \left[|x|^{-3}+t^{1/8}|x|^{-11/4}+t^{3/8}|x|^{-9/4}\right] \quad \text{при} \quad t\geqslant 0, \tag{36}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leqslant c_0 \left[|x|^{-3}+t^{1/2}|x|^{-2}+t|x|^{-1}\right] \quad \text{при} \quad t\geqslant 0, \tag{37}$$

$$\left|\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right| \leqslant c_0 \left[t^{-5/8}|x|^{-9/4}+t^{-3/8}|x|^{-7/4}\right] \quad \text{при} \quad t>0, \tag{38}$$

$$\left|\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x,t)}{\partial x_i\partial x_j\partial t}\right| \leqslant c_0 \left[|x|^{-1}+t^{1/2}\right] \quad \text{при} \quad t\geqslant 0. \tag{39}$$

4. ФОРМУЛЫ ГРИНА

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau) &:= \frac{\partial}{\partial\tau}\Delta_y u(y,\tau)-u(y,\tau), \\ \mathfrak{M}^T_{y,\tau}[v](y,\tau) &:= -\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta_y v(y,\tau)-v(y,\tau), \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{y,\tau}[u](y,\tau) &:= \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}, \\ \mathfrak{N}^T_{y,\tau}[v](y,\tau) &:= -\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial v(y,\tau)}{\partial n_y}. \end{aligned} \tag{41}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & v(y,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta_y u(y,\tau)-u(y,\tau)\right]= \\ & =\frac{\partial}{\partial\tau}\left(v(y,\tau)\Delta_y u(y,\tau)\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{div}(v(y,\tau)\nabla u(y,\tau))+ \\ & +\operatorname{div}\left(v(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla u(y,\tau)\right)+\operatorname{div}\left(u(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla v(y,\tau)\right)- \\ & -u(y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta_y v(y,\tau)-v(y,\tau)u(y,\tau). \end{aligned} \tag{42}$$

С учетом обозначений (40) и (41) для функций $u(y,\tau), v(y,\tau)\in\mathbb{C}^{2+1}(\overline{D}_t)$, где $D_t=\Omega\times(0,t)$, а $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, интегрированием по частям равенства (42) по цилиндру D_t мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^t\int_\Omega \left[v(y,\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)-u(y,\tau)\mathfrak{M}^T_{y,\tau}[v](y,\tau)\right]\,dy\,d\tau= \\ & =\int_\Omega v(y,\tau)\Delta_y u(y,\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}dy-\int_{\partial\Omega} v(y,\tau)\frac{\partial u(y,\tau)}{\partial n_y}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}dS_y+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left[v(y,\tau)\mathfrak{N}_{y,\tau}[u](y,\tau)-u(y,\tau)\mathfrak{N}^T_{y,\tau}[v](y,\tau)\right]\,dS_y\,d\tau. \end{aligned} \tag{43}$$

Таким образом, доказана следующая теорема (о второй формуле Грина):

Теорема 1 *Для любых функций* $u(y,\tau), v(y,\tau)\in\mathbb{C}^{2+1}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ *справедливо равенство* (43).

Из (43) стандартным способом получаем третью формулу Грина:

Теорема 2 *Для любой функции* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2+1}(\overline{\Omega}\times[0,T])$, *где* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *— ограниченная область, справедливо равенство*

$$\begin{aligned} u(x,t)= & \int_0^t\int_\Omega \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)\,dy\,d\tau+\int_\Omega \mathscr{E}(x-y,t)\Delta_y u_0(y)\,dy-\int_{\partial\Omega}u(y,t)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,dS_y- \\ & -\int_{\partial\Omega}\mathscr{E}(x-y,t)\frac{\partial u_0(y)}{\partial n_y}\,dS_y+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left[u(y,\tau)\mathfrak{N}^T_{y,\tau}[\mathscr{E}(x-y,t-\tau)]-\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{N}_{y,\tau}[u](y,\tau)\right]\,dS_y\,d\tau. \end{aligned} \tag{44}$$

5. ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ

Наша техника использует следующие утверждения.

Лемма 7 *При $\beta > 3$ и $\gamma \in (0,3)$ справедлива следующая оценка:*

$$I(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^\gamma} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\, dy \leqslant \frac{M_1}{(1+|x|^2)^{\gamma/2}}. \tag{45}$$

Лемма 8 *При условиях, что $\alpha_1 > 1$ и $\gamma_1 \in [0,1)$, верно неравенство*

$$\int\limits_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{\alpha_1}} \frac{1}{(t-\tau)^{\gamma_1}}\, d\tau \leqslant \frac{M_2}{(1+t)^{\gamma_1}} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{46}$$

6. ТРЕТЬЯ ФОРМУЛА ГРИНА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вывод третьей формулы Грина во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ более или менее стандартный, но тем не менее имеются определенные особенности. Прежде всего дадим определения двух классов функций, регулярных в окрестности бесконечно удаленной точки в $\mathbb{R}^3$.

Определение 1 *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу H_1^∞, если*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T]) \tag{47}$$

и выполнены соотношения

$$|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)| \leqslant \frac{D_{01}}{(1+t)^{\alpha_1}(1+|x|^2)^{\beta_1/2}} \tag{48}$$

при

$$\alpha_1 \geqslant 0, \quad \beta_1 > \frac{4-\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0,1/2] \tag{49}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in [0,T]$.

Определение 2 *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу H_2^∞, если*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times (0,T]) \tag{50}$$

и выполнена оценка

$$|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)| \leqslant \frac{D_{02}}{t^{\alpha_2}(1+|x|^2)^{\beta_2/2}} \tag{51}$$

при условиях

$$\alpha_2 \in \left[0, 1-\frac{\gamma_1}{4}\right), \quad \beta_2 > \frac{4-\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0,1/2] \tag{52}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in (0,T]$.

Определение 3 *Будем говорить, что функция $u_0(x)$ принадлежит классу IN_1^∞, если $\Delta_x u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ и выполнены соотношения*

$$|\Delta_x u_0(x)| \leqslant \frac{D_{03}}{(1+|x|^2)^{\beta_3/2}} \quad \text{при} \quad \beta_3 > \frac{4-\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0,1/2] \tag{53}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$.

Определение 4 *Будем говорить, что функция $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)$ принадлежит классу IN_2^∞, если найдется такая постоянная $D_{04} > 0$, что справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{D_{04}}{(1+|x|^2)^{\beta_4/2}} \quad \text{при} \quad \beta_4 > 1-\frac{\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0,1/2], \quad j=1,2,3 \tag{54}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$.

Определение 5 *Будем говорить, что функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ принадлежит классу P_1^∞, если найдется такая постоянная $D_{05} > 0$, что справедливо неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{(1+t)^{\alpha_3}} \frac{D_{05}}{(1+|x|^2)^{\beta_5/2}}, \quad \beta_5 > 1-\frac{\chi_1}{2}, \quad \alpha_3 \geqslant 0, \quad \chi_1 \in [-2,1/2] \tag{55}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in [0,T]$.

Определение 6 *Будем говорить, что функция $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times (0,T])$ принадлежит классу P_2^∞, если найдется такая постоянная $D_{06} > 0$, что справедливо неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{t^{\alpha_4}} \frac{D_{06}}{(1+|x|^2)^{\beta_6/2}}, \quad \beta_6 > 1-\frac{\chi_1}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha_4 < \frac{1}{2}-\frac{\chi_1}{4}, \quad \chi_1 \in [-2,1/2] \tag{56}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и $t \in (0,T]$.

Определение 7 *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу N_1^∞, если $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ $(j=1,2,3)$ и найдется такая постоянная $D_{07} > 0$, что справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_j}\right| \leqslant \frac{D_{07}}{(1+|x|^2)^{\beta_7/2}(1+t)^{\alpha_5}}, \quad j=1,2,3 \tag{57}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$ при условиях

$$\alpha_5 \geqslant 0, \quad \beta_7 > 1-\frac{\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0,1/2]. \tag{58}$$

Определение 8 *Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу N_2^∞, если*

$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_j} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \times (0,T])\ (j = 1,2,3)$ *и найдется такая постоянная* $D_{08} > 0$, *что справедливо неравенство*

$$\left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x_j} \right| \leqslant \frac{D_{08}}{(1+|x|^2)^{\beta_8/2} t^{\alpha_6}}, \quad j = 1,2,3 \tag{59}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T]$ *при условиях*

$$0 \leqslant \alpha_6 < 1 - \frac{\gamma_1}{4}, \quad \beta_8 > 1 - \frac{\gamma_1}{2}, \quad \gamma_1 \in [0, 1/2]. \tag{60}$$

Можно установить справедливость следующих теорем.

Теорема 3 *Пусть функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{2+1}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ *принадлежит классам* H_1^∞, P_1^∞ *и* N_1^∞ *а начальная функция* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *принадлежит классам* IN_1^∞ *и* IN_2^∞. *Тогда для такой функции справедливо равенство*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) \mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)\, dy\, d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta_y u_0(y)\, dy \tag{61}$$

для каждого $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$.

Теорема 4 *Пусть функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3 \times (0,T])$ *принадлежит классам* H_2^∞, P_2^∞ *и* N_2^∞, *а начальная функция* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *принадлежит классам* IN_1^∞ *и* IN_2^∞. *Тогда для такой функции справедливо равенство*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) \mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)\, dy\, d\tau + \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta_y u_0(y)\, dy \tag{62}$$

для каждого $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T]$.

Теорема 5 *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{2+1}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, $\chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T]$, $\chi(0) = 1$ *и функция* $u(x,t) - u_0(x)\chi(t)$ *принадлежат классам* H_1^∞, P_1^∞, N_1^∞. *Тогда справедливо равенство:*

$$u(x,t) = \chi(t) u_0(x) + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau) \left[\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau) - \right. \\ \left. - \chi'(\tau) \Delta_y u_0(y) + \chi(\tau) u_0(y) \right] dy\, d\tau \tag{63}$$

для каждого $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$.

7. ОБЪЕМНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим следующие потенциалы с весами:

$$U(x,t) = U[\rho](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x,y,t-\tau) \rho(y,\tau)\, dy\, d\tau, \tag{64}$$

$$V(x,t) = V[\mu](x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x,y,t) \mu(y)\, dy, \tag{65}$$

$$G_\beta(x,y,t) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}} \mathscr{E}(x-y,t). \tag{66}$$

Справедлива следующая

Теорема 6 *Для любой плотности* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *объемный потенциал* $U(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ *при* $\beta > 3$.

Теперь мы рассмотрим следующий объемный потенциал:

$$\widetilde{U}(x,t) = \widetilde{U}[\rho](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{\beta,\alpha}(x,y,t,\tau) \rho(y,\tau)\, dy\, d\tau, \tag{67}$$

$$\Gamma_{\beta,\alpha}(x,y,t,\tau) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}(1+\tau)^\alpha} \mathscr{E}(x-y,t-\tau). \tag{68}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7 *Для любой плотности* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$ *объемный потенциал* $\widetilde{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ *при* $\beta > 3$ *и* $\alpha \geqslant 0$.

Доказательство *Утверждение вытекает из теоремы 6, поскольку переход от потенциала* U *к потенциалу* $\widetilde{U}$ *эквивалентен домножению плотности* ρ *на* $\frac{1}{(1+\tau)^\alpha}$ *и всего потенцала на* $(1+t)^{1/8}$, *что не влияет на свойства гладкости потенциала.*

Теперь рассмотрим поверхностный потенциал с весом:

$$V(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_\beta(x,y,t) \mu(y)\, dy, \tag{69}$$

$$G_\beta(x,y,t) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}} \mathscr{E}(x-y,t). \tag{70}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8 *Для любой плотности* $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *имеем*
$V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}^{(1)}([\delta,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$ *при* $\beta > 3$, $t \geqslant \delta > 0$.

Рассмотрим следующий потенциал:

$$\widetilde{V}(x,t) = (1+t)^{1/8} V(x,t). \tag{71}$$

Справедлива следующая

Теорема 9 *Для любой плотности* $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *имеем* $\widetilde{V}(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbb{C}^{(1)}([\delta,T];\mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3))$, $t \geqslant \delta > 0$.

Доказательство Утверждение вытекает из теоремы 8, поскольку множитель $(1+t)^{1/8}$ не влияет на свойства гладкости.

Введем теперь следующие потенциалы:

$$U_0(x,t) = U_0[\rho_0](x,t) = \\ = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_0(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{72}$$

$$V_0(x,t) = V_0[\mu_0](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu_0(y)\,dy. \tag{73}$$

Справедлива следующая

Теорема 10 *Для любых*

$$\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3))$$

и

$$\mu_0(x) \in \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$$

при $\beta > 3$ *имеем*

$$U_0(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3)), \tag{74}$$

$$V_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))\cap \\ \cap\, \mathbb{C}^{(1)}([\delta,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3)). \tag{75}$$

Доказательство Потенциалы $U(x,t)$ и $V(x,t)$, определенные равенствами (64) и (65), связаны с потенциалами $U_0(x,t)$ и $V_0(x,t)$, определенными равенствами (72) и (73), следующим образом:

$$U_0(x,t) = \frac{U(x,t)}{(1+|x|^2)^{3/8}}, \quad V_0(x,t) = \frac{V(x,t)}{(1+|x|^2)^{3/8}}, \tag{76}$$

$$\rho(x,t) = \rho_0(x,t)(1+|x|^2)^{\beta/2} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)), \tag{77}$$

$$\mu(x) = \mu_0(x)(1+|x|^2)^{\beta/2} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3). \tag{78}$$

Осталось воспользоваться равенствами (76) и результатами теорем 6 и 8.

Теорема доказана полностью.

Теорема 11 *Пусть* $\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3))$ *при* $\beta > 3$. *Тогда для потенциала* $U_0(x,t)$, *определенного соотношением (72), справедливо равенство*

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[U_0](x,t),\phi(x)\rangle = \langle \rho_0(x,t),\phi(x)\rangle \\ \text{для всех} \quad t\in[0,T] \tag{79}$$

для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— скобки двойственности между* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ *и* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, *а оператор* $\mathfrak{M}_{x,t}$ *определен равенством*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) = \Delta_x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - w(x,t), \tag{80}$$

в котором производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$. *Кроме того,*

$$U_0(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{81}$$

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 12 *Пусть* $\mu_0(x) \in \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$ *при* $\beta > 3$. *Тогда для потенциала* $V_0(x,t)$, *определенного соотношением (73), справедливо равенство*

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[V_0](x,t),\phi(x)\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3) \tag{82}$$

при $t\in(0,T]$.

Пусть

$$L(x,t) = U_0[\rho_0](x,t) + V_0[\Delta u_0](x,t). \tag{83}$$

Из теорем 10—12 и равенства

$$V_0(x,0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_y u_0(y)}{|x-y|}\,dy = u_0(x)d \\ \text{для всех } x\in\mathbb{R}^3,$$

верного при $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$, вытекает следующий основной результат:

Теорема 13 *Пусть* $\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta_1/2});\mathbb{R}^3)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3)$ *при* $\beta_1 > 3$ *и* $\beta_2 > 3$. *Тогда*

$$L(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))\cap \\ \cap\, \mathbb{C}^{(1)}([\delta,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3)) \tag{84}$$

для любого $\delta\in(0,T)$, *причем имеют место следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial L(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \frac{A_3(T)}{t^{7/8}}, \quad \left|\frac{\partial^2 L(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_3(T)}{t^{7/8}} \\ \text{при} \quad t\in[\delta,T],\ x\in\mathbb{R}^3 \tag{85}$$

для любого $\delta\in(0,T)$, *и справедливо равенство*

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[L](x,t),\phi(x)\rangle = \langle \rho_0(x,t),\phi(x)\rangle \\ \text{для всех} \quad t\in[\delta,T] \tag{86}$$

и для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *скобки двойственности между* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ *и* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, *где*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) := \Delta_x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - w(x,t).$$

Кроме того, имеет место начальное условие

$$L(x,0) = u_0(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Наконец, справедлива следующая теорема.

Теорема 14 *Пусть*

$$L_1(x,t) = \chi(t)u_0(x) + U_0\left[\rho_0 - \chi'\Delta_x u_0 + \chi u_0\right](x,t), \tag{87}$$

$\rho_0(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^3))$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^3)$, $\chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T]$, $chi(0) = 1$ *при* $\beta_1 > 3$, $\beta_2 > 3$, $U_0(x,t)$ — *определенный равенством (72). Тогда*

$$L_1(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3)), \tag{88}$$

причем справедливо равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[L_1](x,t), \phi(x)\rangle = \langle \rho_0(x,t), \phi(x)\rangle \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T] \tag{89}$$

и для всех $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *скобки двойственности между* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ *и* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, *где*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) := \Delta_x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - w(x,t).$$

Кроме того, имеет место начальное условие

$$L_1(x,0) = u_0(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

8. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение

$$u(x,t) = \frac{u_0(x)}{(1+t)^\gamma} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\left[|u(y,\tau)|^q + \gamma\frac{\Delta_y u_0(y)}{(1+\tau)^{\gamma+1}} + \frac{u_0(y)}{(1+\tau)^\gamma}\right] dy\,d\tau, \tag{90}$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$u(x,t) = f_0(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|u(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau, \tag{91}$$

$$f_0(x,t) = \frac{u_0(x)}{(1+t)^\gamma} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\times \left[\gamma\frac{\Delta_y u_0(y)}{(1+\tau)^{\gamma+1}} + \frac{u_0(y)}{(1+\tau)^\gamma}\right] dy\,d\tau. \tag{92}$$

Перейдем к новой функции

$$v(x,t) = (1+t)^{1/8}(1+|x|^2)^{3/8}u(x,t). \tag{93}$$

Тогда уравнение (91) можно переписать в следующем виде:

$$v(x,t) = f_1(x,t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y,t,\tau)|v(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau, \tag{94}$$

$$\Gamma(x,y,t,\tau) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}}{(1+|y|^2)^{3q/8}(1+\tau)^{q/8}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau), \tag{95}$$

$$f_1(x,t) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+t)^{\gamma-1/8}}u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_1(x,y,t,\tau)\left[\gamma\frac{(1+|y|^2)^{\beta/2}\Delta_y u_0(y)}{(1+\tau)^{\gamma+1}} + \frac{(1+|y|^2)^{\beta/2}u_0(y)}{(1+\tau)^\gamma}\right] dy\,d\tau, \tag{96}$$

$$\Gamma_1(x,y,t,\tau) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau). \tag{97}$$

Будем исследовать локальную по времени разрешимость в классе $\mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 15 *Для любых* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^3)$, $\beta > 3$, $\gamma > 1$ *и* $q > 4$ *существует такое* $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для всех* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения (94) в классе* $\mathbb{C}([0,T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае имеем*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} (1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}|u(x,t)| = +\infty. \tag{98}$$

Доказательство этой теоремы основано на принципе сжимающих отображений и известном алгоритме продолжения решений во времени (см., например, [22]). При этом используется результат теоремы 7. Отметим, что условие $q > 4$ обусловлено видом веса в (95) с учётом леммы 7.

Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$\|v\|_\infty(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |v(x,t)| = (1+t)^{1/8} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^{3/8}|u(x,t)|. \tag{99}$$

Тогда из интегрального уравнения (94) при $t \in [0, T_0)$ с учетом (26) вытекает оценка

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant \|f_1\|_\infty(t) + c_0 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{q/8}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}} \|v\|_\infty^q(\tau)\, d\tau \times \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{3q/8}} \frac{1}{|x-y|^{5/4}}\, dy, \qquad (100)$$

где $\|f_1\|_\infty(t) := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^3} |f_1(x,t)|$ и (см. (96))

$$\|f_1\|_\infty(t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |(1+|x|^2)^{3/8} u_0(x)| + \gamma c_0 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{\gamma+1}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}}\, d\tau \times$$

$$\times \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |(1+|x|^2)^{\beta/2} \Delta_x u_0(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}} \frac{1}{|x-y|^{5/4}}\, dy + c_0 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{\gamma}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}}\, d\tau \times$$

$$\times \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |(1+|x|^2)^{\beta/2} u_0(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}} \frac{1}{|x-y|^{5/4}}\, dy \leqslant A_1 < +\infty, \qquad (101)$$

где постоянная $A_1 = A_1(u_0)$ и не зависит от времени $t \in [0, +\infty)$ при $\gamma > 1$. Здесь мы воспользовались результатами лемм 7 и 8. Из тех же лемм с учетом (100) и (101) вытекает оценка

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_1 + A_2 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{q/8}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}} \|v\|_\infty^q(\tau)\, d\tau. \qquad (102)$$

В силу известного неравенства Гроноулла–Беллмана–Бихари [23] из (102) вытекает неравенство

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_1 \left[1 - (q-1) A_1^{q-1} A_3(t)\right]^{-1/(q-1)}, \qquad (103)$$

$$A_3(t) = A_2 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{q/8}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}}\, d\tau \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}_+} A_2 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(1+\tau)^{q/8}} \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}}\, d\tau \leqslant A_4 < +\infty, \qquad (104)$$

где постоянная $A_4 > 0$ при $q > 8$ не зависит от $t \in (0, +\infty)$ и от начальных данных. Из неравенства (103) с учетом (104) получаем оценку

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_1 \left[1 - (q-1) A_1^{q-1} A_4\right]^{-1/(q-1)}. \qquad (105)$$

Потребуем, чтобы начальная функция $u_0(x)$ была настолько мала, чтобы было выполнено неравенство

$$(q-1) A_1^{q-1} A_4 < 1. \qquad (106)$$

Из (105) и (106) вытекает, что существует такая постоянная $A_5 > 0$, зависящая только от начальной функции и не зависящая от времени, что

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_5 < \infty. \qquad (107)$$

Отсюда с учетом (99) приходим к выводу о том, что

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^4_+} (1+t)^{1/8} (1+|x|^2)^{3/8} |u(x,t)| \leqslant A_5 < +\infty \qquad (108)$$

при выполнении условия (106). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 16 *При выполнении всех условий теоремы 15, дополнительного условия $q > 8$, а также условия малости начальной функции (106) время существования решения интегрального уравнения (94) $T_0 = +\infty$.*

Теперь мы рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$u(x,t) = U_0(x,t) + V_0(x,t), \qquad (109)$$

где потенциалы $U_0(x,t)$ и $V_0(x,t)$ определены равенствами

$$U_0(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) |u(y,\tau)|^q\, dy\, d\tau, \qquad (110)$$

$$V_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t) \Delta_y u_0(y)\, dy. \qquad (111)$$

Сделаем замену функций

$$v(x,t) = (1+t)^{1/8} (1+|x|^2)^{3/8} u(x,t). \qquad (112)$$

Тогда из (109) получим следующее интегральное уравнение:

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y,t,\tau)|v(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma_2(x,y,t)(1+|y|^2)^{\beta/2}\Delta_y u_0(y)\,dy, \quad (113)$$

$$\Gamma(x,y,t,\tau) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}}{(1+|y|^2)^{3q/8}(1+\tau)^{q/8}}\mathscr{E}(x-y,t-\tau), \quad (114)$$

$$\Gamma_2(x,y,t) = \frac{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t). \quad (115)$$

Для интегрального уравнения (113) справедлива следующая теорема:

Теорема 17 *Для любых* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$, $\beta > 3$ *и* $q > 4$ *существует такое* $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для всех* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (113) *в классе* $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3))$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае имеем*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} (1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}|u(x,t)| = +\infty. \quad (116)$$

Доказательство Доказательство основано на принципе сжимающих отображений и алгоритме продолжения во времени (см., например, [22]). При этом используются результаты теоремы 10.

Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема 18 *При выполнении всех условий теоремы* 17, *дополнительного условия* $q > 8$, *а также условия малости начальной функции* (131) *время существования решения уравнения* (113) $T_0 = +\infty$.

Доказательство Введем следующую функцию параметра $t \geqslant 0$:

$$\|v\|_\infty(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |v(x,t)| = \\ = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+t)^{1/8}(1+|x|^2)^{3/8}|u(x,t)|; \quad (117)$$

возьмем supremum от обеих частей равенства (113), и тогда с учетом оценок (25), (26) получим неравенство

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_1(1+t)^{1/8}\times \\ \times \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/8}}\frac{1}{(1+\tau)^{q/8}}\|v\|^q(\tau)\,d\tau + B_1, \quad (118)$$

где

$$A_1 = c_0 \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{3q/8}}\frac{1}{|x-y|^{5/4}}\,dy, \quad (119)$$

$$B_1 = c_0 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^4_+} \|f_0\|_\infty(t) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\times \\ \times \begin{cases} |x-y|^{-1}, & \text{если} \quad t\in[0,\delta]; \\ |x-y|^{-5/4}t^{-1/8}, & \text{если} \quad t>\delta>0, \end{cases} \quad (120)$$

где $\delta \in (0, T_0/2)$,

$$\|f_0\|_\infty(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} (1+t)^{1/8}(1+|x|^2)^{\alpha/2}|\Delta_x u_0(x)|$$

при произвольном фиксированном $\alpha \in (3,\beta]$, а время $T_0 > 0$ определено в формулировке теоремы 17. Рассмотрим выражение (119) для A_1. С этой целью воспользуемся оценкой (45) при

$$\gamma = \frac{5}{4}, \quad q > 8$$

и получим оценку

$$0 < A_1 \leqslant c_0 \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|x|^2)^{5/8}} = A_3 < +\infty. \quad (121)$$

Получим теперь оценку сверху на величину B_1, определенную равенством (120). Для этого рассмотрим следующие два интеграла:

$$B_{11} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\frac{1}{|x-y|}\,dy, \quad (122)$$

$$B_{12} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\frac{1}{|x-y|^{5/4}}\,dy. \quad (123)$$

В силу оценки (45) при

$$\gamma = 1 \quad \text{и} \quad \alpha > 3$$

приходим к выводу о том, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} B_{11} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\frac{1}{|x-y|}\,dy = B_2 < +\infty. \quad (124)$$

В силу той же оценки (45) при

$$\gamma = \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad \alpha > 3$$

имеет место следующая оценка:

$$0 < \sup_{x\in\mathbb{R}^3} B_{12} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|x|^2)^{3/8}}{(1+|y|^2)^{\alpha/2}}\frac{1}{|x-y|^{5/4}}\,dy = \\ = B_3 < +\infty. \quad (125)$$

Из оценок (124) и (125) с учетом (120) приходим к оценке при $\alpha > 3$

$$0 < B_1 \leqslant c_0 \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|f_0\|_\infty(t)\times$$
$$\times\begin{cases} B_2, & \text{если } t \in [0,\delta]; \\ B_3 t^{-1/8}, & \text{если } t > \delta > 0 \end{cases} \leqslant B_4(u_0, \Delta_x u_0) < +\infty. \tag{126}$$

Таким образом, при $q > 8$ и $\alpha > 3$ из (118) с учетом оценок (121) и (126) вытекает следующая оценка:

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant A_3 \int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(t-\tau)^{1/8}}\times$$
$$\times \frac{1}{(1+\tau)^{q/8}}\|v\|^q(\tau)\,d\tau + B_4(u_0,\Delta_x u_0). \tag{127}$$

В силу известного неравенства Гроноулла–Беллмана–Бихари [23] из (127) вытекает неравенство

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant B_4\left[1-(q-1)B_4^{q-1}A_4(t)\right]^{-1/(q-1)}, \tag{128}$$

где

$$A_4(t) = A_3\int\limits_0^t \frac{(1+t)^{1/8}}{(t-\tau)^{1/8}}\frac{1}{(1+\tau)^{q/8}}\,d\tau. \tag{129}$$

Теперь воспользуемся оценкой (46) при

$$q > 8 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = \frac{1}{8},$$

получим оценку

$$0 < \sup_{t\in\mathbb{R}^1_+} A_4(t) \leqslant M_2 < +\infty. \tag{130}$$

Теперь помимо других условий предположим, что

$$(q-1)B_4^{q-1}M_2 < 1, \tag{131}$$

и тогда из (128) с учетом (130) при $q > 8$ и $\alpha > 3$ мы получим глобальную во времени априорную оценку

$$\|v\|_\infty(t) \leqslant B_4\left[1-(q-1)B_4^{q-1}M_2\right]^{-1/(q-1)}$$
$$\text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}^1_+, \tag{132}$$

из которой, в частности, следует, что

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{B_5}{(1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}},$$
$$B_5 = B_4\left[1-(q-1)B_4^{q-1}M_2\right]^{-1/(q-1)}. \tag{133}$$

9. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Дадим определение.

Определение 9 *Глобальным во времени слабым решением задачи, в классической постановке имеющей вид*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,+\infty), \tag{134}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{135}$$

называется такая функция $u(x,t) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3\times[0,+\infty))$, *что для любой функции* $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^4)$ *выполнено равенство*

$$-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\Delta_x\phi'_t(x,t)+\phi(x,t)\right]dx\,dt-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta_x\phi(x,0)\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx\,dt, \tag{136}$$

причем $u_0(x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 19 *Пусть* $u(x,t)$ *— слабое глобальное во времени решение задачи Коши* (134), (135) *в смысле определения* 9. *Тогда для таких функций* $u(x,t)$ *и* $u_0(x)$, *что существуют свертки*

$$U_0(x,t) = \int\limits_{-\infty}^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)|\widetilde{u}(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau \in$$
$$\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,+\infty)), \tag{137}$$

$$V_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)\Delta_y u_0(y)\,dy \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,+\infty)), \tag{138}$$

справедливо следующее представление в виде суммы потенциалов:

$$\widetilde{u}(x,t) = U_0(x,t)+V_0(x,t)$$
$$\textit{для почти всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(-\infty,+\infty), \tag{139}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ *— фундаментальное решение оператора* $\mathfrak{M}_{x,t}$, *определенное равенством* (18), *причем используется обозначение*

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \textit{если} \quad t\geqslant 0; \\ 0, & \textit{если} \quad t<0. \end{cases}$$

Доказательство Пусть $u(x,t)$ — глобальное во времени слабое решение в смысле определения 9.

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\widetilde{u}](x,t), \phi(x,t)\rangle = -\langle \widetilde{u}(x,t), \mathfrak{M}^T_{x,t}[\phi](x,t)\rangle =$$
$$= -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}^T_{x,t}[\phi](x,t)\,dx\,dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta_x\phi(x,0)\,dx + \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx\,dt =$$
$$= \langle \Delta_x u_0\delta(t), \phi(x,t)\rangle + \langle |\widetilde{u}(x,t)|^q, \phi(x,t)\rangle, \quad (140)$$

где

$$\mathfrak{M}^T_{x,t}[v](x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta_x v(x,t) + v(x,t).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\widetilde{u}](x,t) = \delta(t)\Delta_x u_0(x) + |\widetilde{u}(x,t)|^q. \quad (141)$$

В силу результата теоремы 11.3 работы [19] приходим к утверждению теоремы.

Теперь дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши, в классической постановке имеющей следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u(x,t) - u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(0,T], \quad (142)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^3. \quad (143)$$

Определение 10 *Локальным во времени слабым решением $u(x,t)$ задачи Коши (142) и (143) называется такая функция $u(x,t)\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$, для которой выполнено равенство*

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\Delta_x\phi'_t(x,t) + \phi(x,t)\right]\,dx\,dt -$$
$$-\int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta_x\phi(x,0)\,dx = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx\,dt \quad (144)$$

для любой функции $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T))$, причем $u_0(x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9 *Глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 9 является локальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения 10.*

Доказательство Является следствием того, что любая пробная функция $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T))$, продолженная нулем при $t\geqslant T$, будет принадлежать $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,+\infty))$.

Точно так же, как теорема 19, может быть доказана следующая теорема.

Теорема 20 *Пусть $u(x,t)$ — слабое локальное во времени решение задачи Коши (134), (135) в смысле определения 10. Тогда для таких функций $u(x,t)$ и $u_0(x)$, что существуют свертки*

$$U_0(x,t) = \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|\widetilde{u}(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau \in$$
$$\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T)), \quad (145)$$

$$V_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\Delta_y u_0(y)\,dy \in$$
$$\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T)), \quad (146)$$

справедливо следующее представление в виде суммы потенциалов:

$$\widetilde{u}(x,t) = U_0(x,t) + V_0(x,t)$$
$$\text{для почти всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(-\infty,T), \quad (147)$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$, определенное равенством (18), причем используется обозначение

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t\in[0,T];\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

Замечание 1 *Отметим, что в силу теорем 20 и 19 каждое слабое (соответственно локальное или глобальное) решение в классе $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{(1)}_b((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$ является решением интегрального уравнения (109).*

Наконец, справедлива следующая теорема.

Теорема 21 *Для любых $u_0(x)\in\mathbb{C}^{(2)}_b((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^3)$, $\beta>3$ и $q>4$ существует такое $T_0=T_0(u_0)>0$, что для любого $T\in(0,T_0)$ существует единственное локальное во времени слабое решение $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{(1)}_b((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$ в смысле определения 10, причем либо $T_0=+\infty$, либо $T_0<+\infty$, и в последнем случае справедливо предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0}\ \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,T]} (1+|x|^2)^{3/8}(1+t)^{1/8}|u(x,t)| = +\infty. \quad (148)$$

Доказательство *Шаг 1. Существование и единственность слабого решения класса* $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{(1)}_b((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$. Заметим, что интегральное уравнение (109) можно переписать в следующем виде:

$$u(x,t) = L(x,t), \quad (149)$$

где функция $L(x,t)$ определена равенством (83) с $\rho_0=|u|^q$, и поэтому в силу результата теоремы 13 справедливо равенство

$$\begin{gathered}\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\rangle = \langle |u(x,t)|^q,\phi(x,t)\rangle \\ \text{для всех} \quad t\in[\delta,T], \\ \mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) = \Delta_x \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - w(x,t),\end{gathered} \tag{150}$$

где Δ_x понимается в смысле обобщенных функций и для всех $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T))$ и $\delta\in(0,T)$. Заметим, что в силу оценок (85) и равенства (86) имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \frac{A_4(T)}{t^{7/8}} \quad \text{при} \quad t\in[\delta,T],\ x\in\mathbb{R}^3. \tag{151}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx = \langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\nabla_x\phi(x,t)\right)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\phi(x,t)dx = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Delta_x\phi(x,t)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\phi(x,t)\,dx \tag{152}$$

для всех $t\in[\delta,T]$. Теперь проинтегрируем обе части равенства (152) по $t\in[\delta,T]$ и получим следующее итоговое равенство:

$$\int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Delta_x\phi(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx\,dt. \tag{153}$$

Справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Delta_x\phi(x,t)\,dx\,dt = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,\delta)\Delta_x\phi(x,\delta)\,dx - \\ - \int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\Delta_x\phi'_t(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^3} L(x,\delta)\Delta_x\phi(x,\delta)\,dx - \int\limits_{\delta}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} L(x,t)\Delta_x\phi'_t(x,t)\,dx\,dt \to \\ \to -\int\limits_{\mathbb{R}^3} L(x,0)\Delta_x\phi(x,0)\,dx - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} L(x,t)\Delta_x\phi'_t(x,t)\,dx\,dt \tag{154}$$

при $\delta\to+0$. Таким образом, в пределе при $\delta\to+0$ в равенстве (153) получим равенство

$$-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\Delta_x\phi'_t(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\phi(x,t)\,dxdt - \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta_x\phi(x,0)\,dx = \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\phi(x,t)\,dx\,dt \tag{155}$$

для любой функции $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T))$. Таким образом, каждое решение, обращающееся в ноль при $t<0$, интегрального уравнения (149), записанного в виде потенциалов (см. (109)), является локальным во времени слабым решением, что и доказывает существование слабого решения класса $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$. Обратно, каждое локальное слабое решение из класса $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$ является в силу замечания после теоремы 20 решением интегрального уравнения (149), а в силу единственности решения этого интегрального уравнения в классе $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8};\mathbb{R}^3))$ приходим к выводу о единственности локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 10 в рассматриваемом классе.

Шаг 2. Существование гладкого слабого решения.

Заметим, что интегральное уравнение (90) можно представить в виде

$$u(x,t) = L_1(x,t), \tag{156}$$

где функция $L_1(x,t)$ определена равенством (87). Но тогда в силу равенства (89) имеет место равенство

$$\langle \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t),\phi(x,t)\rangle = \langle \rho_0(x,t),\phi(x,t)\rangle \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T], \tag{157}$$

для всех $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^3\times(-\infty,T))$. Далее, поступая так же, как на шаге 1, и в силу (88) имеем

$$u(x,t) = L_1(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3)),$$

поэтому приходим к выводу о том, что для каждого $T \in (0, T_0)$ решение интегрального уравнения (90) удовлетворяет равенству (155), т.е. является локальным во времени слабым решением задачи Коши, понимаемым в смысле определения 10.

Таким образом, из сочетания результатов шагов 1 и 2 делаем вывод, что существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 10 класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3))$.

Теорема доказана полностью.

Кроме того, справедлив результат о существовании единственного глобального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 9.

Теорема 22 *Для любых малых* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}((1+|x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^3)$, $\beta > 3$ *и* $q > 8$ *существует единственное глобальное во времени слабое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}_b^{(1)}((1+|x|^2)^{3/8}; \mathbb{R}^3))$ *для любого* $T > 0$ *в смысле определения* 9.

Доказательство Доказательство повторяет доказательство теоремы 21 с учетом результатов теорем 16 и 18.

Теперь мы получим результат о конечности времени $T_0 > 0$ из теоремы 21. С этой целью воспользуемся методом нелинейной емкости [8].

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10 *Существует такая неотрицательная нетривиальная пробная функция* $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T))$, *что сходится интеграл*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_t'(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\, dx\, dt < +\infty. \tag{158}$$

Доказательство Доказано в работах [8, 24].

Лемма 11 *Пусть* $q > 1$ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta_x \phi(x,0)\, dx \neq 0, \tag{159}$$

где неотрицательная нетривиальная пробная функция $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T))$ *при некотором фиксированном* $T > 0$ *удовлетворяет неравенству* (158), *тогда существует такая достаточно большая по модулю локально интегрируемая функция* $u_0(x)$, *что будет иметь место следующее неравенство:*

$$\frac{1}{q'} \left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q} \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_t'(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t)\, dx\, dt \right\} - \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta_x \phi(x,0)\, dx < 0. \tag{160}$$

Доказательство Рассмотрим два случая. Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta_x \phi(x,0)\, dx > 0,$$

то, если вместо функции $u_0(x)$ взять функцию $Ru_0(x)$ при достаточно большом $R > 0$, будет выполнено неравенство (160) с заменой u_0 на Ru_0.

Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta_x \phi(x,0)\, dx < 0,$$

то, если вместо функции $u_0(x)$ взять функцию $-Ru_0(x)$ при достаточно большом $R > 0$, будет выполнено неравенство (160) с заменой u_0 на $-Ru_0$.

Наконец, справедлива следующая теорема:

Теорема 23 *Пусть начальная функция* $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *удовлетворяет неравенству* (160), *которое выполнимо в силу результатов лемм* 10 *и* 11 для некоторой неотрицательной нетривиальной пробной функции $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \times (-\infty, T))$. Тогда при $q > 1$ отсутствует глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 9 и время существования решения $T_0 > 0$ из теоремы 21 конечно. Имеет место разрушение слабого решения задачи Коши за конечное время.

Доказательство Справедливы следующие неравенства, основанные на применении неравенства Гельдера:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \Delta_x \phi_t'(x,t)\, dx\, dt \right| \leqslant \leqslant \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Delta_x \phi_t'(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\, dx\, dt \right)^{1/q'} J^{1/q}, \tag{161}$$

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t) u(x,t)\, dx\, dt \right| \leqslant \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t)\, dx\, dt \right)^{1/q'} J^{1/q}, \tag{162}$$

$$J = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t) |u(x,t)|^q\, dx\, dt. \tag{163}$$

Теперь воспользуемся трёхпараметрическим неравенством Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + \frac{1}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}} b^{q'}, \quad a, b \geqslant 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Тогда из (161) и (162) вытекает неравенство

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\Delta_x\phi'_t(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant \frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\phi'_t(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\,dx\,dt+\frac{1}{4}J, \tag{164}$$

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)u(x,t)\,dx\,dt\right| \leqslant \frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)\,dx\,dt+\frac{1}{4}J. \tag{165}$$

Из равенства (144) с учетом (164) и 165) вытекает следующая оценка:

$$\begin{gathered}\frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\Delta_x\phi'_t(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\,dx\,dt+\frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)\,dx\,dt-\int\limits_{\mathbb{R}^3}u_0(x)\Delta_x\phi(x,0)\,dx\geqslant\\ \geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)|u(x,t)|^q\,dx\,dt\geqslant 0.\end{gathered} \tag{166}$$

Данное неравенство противоречит неравенству (160). Значит, $T \geqslant T_0$ и $T_0 < +\infty$ и, тем самым время, T_0 — время разрушения локального во времени слабого решения задачи Коши.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье кратко представлены результаты исследования задачи Коши (1–2) для нелинейного уравнения, являющегося обобщением одной модели из физики полупроводников. Рассматриваемая задача Коши была исследована путём сведения к интегральным уравнениям с помощью построения фундаментального решения и потенциалов на его основе, а также применения к интегральным уравнениям принципа сжимающих отображений. При показателе $q > 4$ установлено существование непродолжаемого решения интегрального уравнения, а следовательно, и рассматриваемой задачи Коши (в слабом смысле). При дополнительном условии $q > 8$ *в случае малости начальных данных* u_0 удаётся установить глобальную по времени разрешимость задачи Коши. В то же время при всех $q > 1$ *и достаточно больших начальных данных подходящего знака* решение, если оно существует, разрушается за конечное время. С физической точки зрения (при $q = 2$) последнее может означать пробой полупроводника.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-11-00069, А.А. Панин).

[1] *Свиридюк Г.А.* // УМН. **49**, №4. 47. (1994). (*Sviridyuk G.A.* // Russian Math. Surveys, **49**, N 4. 45 (1994)).
[2] *Загребина С.А.* // Мат. заметки ЯГУ. **19**, №2. 39. (2012).
[3] *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* // Bull. of the South Ural State University Ser. Math., Mech., Phys. **8**, №4. 5. (2016).
[4] *Капитонов Б.В.* // Мат. сб. **109 (151)**, №. 4 (8). 607. (1979).
[5] *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М., 1990.
[6] *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М., 1998.
[7] *Плетнер Ю.Д.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **32**, №12. 1885. (1992). (*Pletner Yu.D.* // Comput. Math. Math. Phys. **32**, N 12. 1715. (1992), на русск)
[8] *Похожаев С.И., Митидиери Э.* // Тр. МИАН. **234**. 3. (2001).
[9] *Похожаев С.И.* // СМФН. **39**. 141. (2011).
[10] *Galakhov E.I.* // J. Math. Anal. Appl. **251**, N 1. 256. (2000).
[11] *Галахов Е.И., Салиева О.А.* // СФМН. **63**, №4. 573. (2017).
[12] *Юшков Е. В.* // Дифф. уравнения. **48**, №9. 1234. (2012). (*Yushkov E.V.* // Diff. Equat. **48**, 1212 (2012)).
[13] *Корпусов М.О., Юшков Е.В.* // ТМФ. **191**, №1. 3. (2017). (*Korpusov M.O., Yushkov E.V.* // Theor Math Phys **191**, Iss. 1, 471 (2017)).
[14] *Аристов А. И.* // Дифф. уравнения. **56**, №9. 1147. (2020). (*Aristov A.I.* // Diff. Equat. **56**, 1113 (2020)).
[15] *Корпусов М.О.* // Изв. РАН. Серия матем. **79**, №. 5. 103. (2015).DOI: (*Korpusov M.O.* // Izvestiya: Mathematics. **79**, Iss. 5. 955 (2015)).
[16] *Корпусов М.О.* // ТМФ. **194**, №. 3. 403. (2018). (*Korpusov M.O.* // Theor Math Phys **194**, 347 (2018)).
[17] *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A.* // Math. Methods Appl. Sci. **41**, N. 17. 8070. (2018).
[18] *Фурман А.С.* // Физика твёрдого тела. **28**, №. 7. 2083. (1986).
[19] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1988.

[20] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М., 1965.
[21] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. СПб., 2011.
[22] *Панин А.А.* // Мат. заметки. **97**, №. 6. 884. (2015).
[23] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
[24] *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* // Дифф. уравнения. **45**, №. 7. 939. (2009). (*Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* // Diff. Equat. **45**. 951 (2009)).

On blow-up and on global existence of weak solutions to Cauchy problem for some nonlinear equation of the pseudoparabolic type

I. K. Katasheva[1], M. O. Korpusov[1], A. A. Panin[1,2,a]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia*
[2] *Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) Moscow, 117198, Russia*
E-mail: [a] *a-panin@yandex.ru*

It is a brief exposition of results of the investigation of Cauchy problem for some nonlinear equation of pseudoparabolic type that is a generalisation of some model of semiconductor theory. In the paper, the potential theory for the linear part of the equation is elaborated, which demanded quite intricate technique, which can be used in other equations. The properties of the fundamental solution of this linear part are also of interest, because of the singularity of its 1st time derivative. This is not usual for this type of equations. Also, we obtain sufficiant conditions of solvability and of finite-time blow-up.

PACS: 02.30.Jr.
Keywords: nonlinear Sobolev type equations, blow-up, local solvability, nonlinear capacity, blow-up time estimates.
Received 31 July 2023.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 6. Pp. 757–772.

Сведения об авторах

1. Каташева Индира Куатовна — аспирант; e-mail: katascheva.ik15@physics.msu.ru.
2. Корпусов Максим Олегович — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел. (495) 939-13-51, e-mail: korpusov@gmail.com.
3. Панин Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел. (495) 939-13-51, e-mail: a-panin@yandex.ru.