

## Подавление четных гармоник излучения в лазерах на свободных электронах изменением разброса энергий пучка

К.В. Жуковский<sup>1, \*</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра теоретической физики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2  
(Поступила в редакцию 05.08.2023; подписана в печать 04.10.2023)

С помощью аналитического описания эволюции мощности гармоник в ондуляторах лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) исследуется влияние параметров пучка электронов на основные характеристики излучения ЛСЭ: длину усиления, спектр и мощность гармоник. Изучается возможность подавления четных гармоник ЛСЭ в качестве источника света при исследованиях материалов и поверхностей с помощью анализа нелинейного отклика второй гармоники (SHG). Выявляются основные факторы, влияющие на излучение четных гармоник ЛСЭ; анализируется влияние сечения пучка и разброса энергий электронов на их излучение. Рассматривается пример ЛСЭ LEUTL с излучением видимого света, который используется в исследованиях оптических свойств материалов и химического состояния молекул на поверхностях и границах раздела сред. В этом контексте анализируется возможность подавления второй гармоники ЛСЭ.

PACS: 41.60.-m, 41.60.Ar, 41.60.Cr УДК: 53.03

Ключевые слова: ондулятор, лазер на свободных электронах, лазерное излучение, гармоники.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.78.2360104](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2360104)

### ВВЕДЕНИЕ

Ондуляторное излучение (ОИ) было теоретически предсказано Гинзбургом [1] и получено Мотцем [2] в середине XX века. ОИ происходит от макробанчей релятивистских электронов из накопителя или ускорителя. Длина макробанча  $\sim 1$  мм, что обычно гораздо больше длины волны излучения и ОИ не когерентно. Возможность когерентного излучения от электронов, сгруппированных в банчи размером менее длины волны, впервые обсуждалась Гинзбургом в [3] и было получено Мадэйем [4] в миллиметровом диапазоне. С улучшением качества пучков стало возможным когерентное ОИ в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) в диапазоне видимого света; в 21 веке ЛСЭ продвинулись в рентгеновский диапазон [5–14]. Размеры рентгеновских ЛСЭ достигают километра и, чтобы повысить частоту, используют гармоники основного тона. Для их более эффективного излучения предложены конструкции ондуляторов с двоякопериодическим полем [15–19]. Однако в некоторых случаях излучение гармоник нежелательно. Так, при исследовании физико-химических свойств материалов [20, 21], генерации в них высокочастотных гармоник света [22, 23] и в некоторых других исследованиях анализируют нелинейный эффект генерации второй гармоники (SHG), возникающий при интенсивном облучении. Нелинейный отклик в видимом диапазоне важен при исследовании химиче-

ского состояния молекул на поверхностях и границах раздела [21, 24]; отклик в рентгеновском диапазоне — в исследованиях методом ядерного резонанса. В качестве источника применяют различные ЛСЭ [25–34]. Чтобы проанализировать и правильно интерпретировать отклик SHG, нужно выделить его на фоне излучения второй гармоники ЛСЭ.

Длина волны гармоники  $n$  ОИ под углом  $\theta$  к оси ондулятора с периодом  $\lambda u$  и параметром дипольности  $k = H_0 \lambda_u e / 2\pi m c^2 \approx 0.9337 H_0 [T] \lambda_u$  см такова:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left( 1 + \frac{k^2}{2} + (\gamma\theta)^2 \right), \quad (1)$$

где  $H_0$  — амплитуда основного поля на оси ондулятора,  $\gamma$  — релятивистский фактор электронов. Гармоника поля ондулятора может влиять на излучение гармоник ОИ, как показано, например, в [19–37]. В идеале на оси плоского ондулятора излучаются только нечетные гармоники, а излучение четных приходит в противофазе с соседних периодов ондулятора и взаимно компенсируется. В реальности пучок имеет конечное сечение, и поле ондулятора неидеальное. В результате на оси излучаются четные гармоники, хотя они значительно слабее, чем нечетные. В отношении излучения второй гармоники в [38] было показано, как противофазная вторая гармоника поля ондулятора может на порядок уменьшить мощность второй гармоники ЛСЭ. Однако в [38] параметры пучка были фиксированы. Ниже мы исследуем влияние сечения  $\sigma_{x,y}$ , эмиттанса  $\varepsilon_{x,y}$  и разброса энергий  $\sigma_e$  пучка на излучение второй гармоники ЛСЭ, используя аналитическое описание мощности гармоник ЛСЭ в [39–42].

\* E-mail: [zhukovsk@physics.msu.ru](mailto:zhukovsk@physics.msu.ru)

Отметим, что конечная ширина пучка электронов приводит к появлению четных гармоник излучения на оси ондулятора по трем основным причинам. Во-первых, бетатронные колебания в пучке конечного сечения всегда вызывают четные гармоники ОИ на оси (см., например, [43–47]). Бетатронные колебания также расщепляют  $n$ -ю гармонику излучения на частоте  $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$  (см. (1)) на бетатронные гармоники  $p$ , расположенные близко друг к другу и разделённые гораздо более низкой, чем  $\omega_n$ , частотой [45]:  $\omega_\beta \cong \frac{\omega_n k}{\sqrt{2n\gamma}} \ll \omega_n$ , т.к. обычно  $\gamma \gg 1$ . Во-вторых, в пучке конечной ширины излучение на оси ондулятора видится под конечным углом; взаимодействие излучения с электронами на длине усиления тоже происходит под эффективным углом  $\theta \approx \sigma_{x,y}/L_g$  и влияет на генерацию гармоник, в особенности четных, как было показано, например, в [39–42]. В-третьих, в случае децентровки пучка и в присутствии аперидических и дипольных магнитных компонент индуцируется угол изгиба траектории пучка, что приводит к излучению четных гармоник на оси ондулятора [48, 49]. Таким образом, существуют множественные причины излучения четных гармоник на оси реального ондулятора с реальным пучком; их аналитическое описание позволяет проследить влияние каждого физического фактора на их излучение.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МОЩНОСТИ ГАРМОНИК ЛСЭ

Аналитическое описание мощности гармоник ОИ по длине ондуляторов использует коэффициенты Бесселя  $f_{n;x,y}$   $x$ - и  $y$ -поляризаций  $n$ -й гармоники ОИ, которые определяют нормированные интенсивности спонтанного излучения без потерь. Выражения для коэффициентов Бесселя были представлены во многих работах (см., например, [35–40]). Для наиболее распространённого обычного плоского ондулятора коэффициенты Бесселя с учетом угловых и бетатронных эффектов в релятивистских пучках конечного сечения имеют следующий относительно простой вид (см. например, в [38–42]):

$$\begin{aligned} f_{n;x} &\cong \sum_p \tilde{J}_p \left| (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{2}{k} \gamma \theta \cos \phi J_n^n \right| f_{n;y} \cong \\ &\cong \sum_p \left( \tilde{J}_p \left| \frac{2}{k} \gamma \theta \sin \phi J_n^n \right| + J_n^n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u} (\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где учитывается расстояние от оси  $y_0$ , азимутальный угол  $\theta$  отклонения от оси ондулятора и полярный угол  $\phi$  вокруг оси,  $p$  — номер бетатронной гармоники в расщепленной линии  $n$ -й гармоники ОИ. Формулы (2) для коэффициентов Бесселя включают интегральные формы обобщенных функций Бес-

селя  $J_n^m$ ,  $\tilde{J}_p$ :

$$\begin{aligned} J_n^m &\equiv J_n^m(\zeta, \xi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \exp[i(n\alpha + m\zeta \sin \alpha + m\xi \sin(2\alpha))], \quad (3) \\ \tilde{J}_p &\equiv J_p^1(-\kappa, -\eta), \\ \zeta &= \theta \cos \phi \frac{\lambda_u k}{n\lambda_n \gamma}, \quad \xi = \frac{\lambda_u k^2}{8n\lambda_n \gamma^2}, \\ \kappa &= \frac{4\pi\theta y_0 \gamma^2}{\lambda_u (1 + (k^2/2))}, \quad \eta = \frac{\pi^2 \gamma y_0^2 k}{\sqrt{2}\lambda_u^2 (1 + (k^2/2))}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что в коэффициентах Бесселя (2) нечётным гармоникам ОИ соответствует слагаемое  $\sim (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n)$  в  $f_{n,x}$ , чётным — слагаемое  $\sim J_n^n$ , которое присутствует в обеих поляризациях:  $f_{n,x}$  и  $f_{n,y}$ . Итак, нечетные гармоники излучаются только плоскости, перпендикулярной полю плоского ондулятора, а четные гармоники излучаются в обеих плоскостях. Более того, из (2) видно, что бетатронные колебания в пучке с конечным сечением дают вклад в четные гармоники на оси с одной поляризацией  $f_{n,y}$ , а угловые эффекты дают вклад в обе поляризации четных гармоник и учитываются явно в (2) и неявно в аргументах  $\zeta$  и  $\kappa$  (4) функций (3).

Коэффициенты Бесселя  $f_n$  задают нормированные мощности гармоник  $n$ . Потери за счет разброса энергий и конечного эмиттанса для спонтанного ОИ можно учесть взятием интеграла свертки; интегрирование по углам можно провести численно, а можно для простоты использовать среднее значение угла расходимости. Результат аналитического расчета при этом оказывается близок к результату численного моделирования даже для пучков со значительным эмиттансом и ондуляторов с гармониками поля (см., например, [50]).

В ЛСЭ когерентное излучение возникает в результате взаимодействия электромагнитной волны излучения с электронами в ондуляторе. Под действием силы Лоренца электроны группируются на длине волны ОИ вокруг узлов этой волны. В результате излучение оказывается близко к когерентному (см. [4–14]). В работах [38–42, 51] показано, что, в отличие от спонтанного ОИ, в ЛСЭ угловые вклады в генерацию четных гармоник вынужденного излучения являются доминирующими по сравнению с бетатронным вкладом. Однако анализ выражений (2) и зависимости от параметров пучка затруднителен. Кроме того, разброс энергий, эмиттанс и другие факторы влияют на электрон-фотонное взаимодействие в ЛСЭ, и проследить это влияние «на глаз» в формулах сложно. Численное моделирование с помощью специализированных программ решает уравнения движения с учётом излучения и его взаимодействия с электронами; при этом учитывается больше факторов, чем в аналитической модели; результат численного моделирования обычно хорошо описывает эксперименты, но не проясняет

физические причины зависимости гармоник излучения от параметров установки. В теории ЛСЭ безразмерный параметр Пирса  $\rho = (\lambda_u g_0) / 4\pi$  характеризует усиление  $g_0$  и определяет длину усиления  $L_{g0} = 1/\sqrt{3}g_0$ , на которой мощность ЛСЭ возрастает в  $e$  раз [5–8]. В практических терминах параметр Пирса  $n$ -й гармоники ЛСЭ определяется параметрами ондулятора, коэффициентом Бесселя  $n$ -й гармоники и плотностью электронного тока  $J = I_0/\Sigma$  (см. [5–12, 52]):

$$\rho_n = \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{J}{4\pi i} \right)^{1/3} (\lambda_u k |f_n|)^{2/3}, \quad (5)$$

где  $I_0$  — ток в ЛСЭ,  $\Sigma = 2\pi\sqrt{\beta_x \varepsilon_x \beta_y \varepsilon_y}$  — полное сечение пучка,  $\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \theta_{x,y}$  — эмиттансы,  $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}}$  — поперечные сечения,  $\beta_{x,y} = \varepsilon_{x,y} / \theta_{x,y}^2$  — параметры Твисса,  $\theta_{x,y}$  — расходимости,  $f_n$  — коэффициент Бесселя  $n$ -й гармоники ОИ,  $i = 4\pi\varepsilon_0 mc^3 / e \cong 1.7045 \times 10^4$  — размерная константа тока Альфвена в амперах. Параметр Пирса  $\rho_n$  определяет не всегда достижимую максимальную мощность  $n$ -й гармоники ЛСЭ  $P_{F,n} \approx \sqrt{2}\rho_n EI_0$  (где  $E$  — энергия электронов,  $I_0$  — ток), её длину усиления  $L_{n,g} \cong \lambda_u / (4\pi\sqrt{3}n^{1/3}\rho_n)$  и длину насыщения ЛСЭ:  $L_s \sim \lambda_u / \rho_1$ ,  $L_s \approx 1.07L_{1,g} \ln(9P_{F,1}/P_{1,0})$  (см. [53, 54]), где  $P_{1,0}$  — начальная мощность, которая может происходить от затравочного лазера или от когерентной оставляющей шума банча в ЛСЭ с самоусилением спон-

$$\zeta \cong \sqrt{\prod_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} (1 + \mu_i^2)} / \left( 1 + 0.159 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i^2 - 0.066 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i \right), \quad (9)$$

$$\mu_{x,y} = \frac{4N\gamma^2 \varepsilon_{x,y}}{\beta_{x,y} (1 + k^2/2)}, \quad \mu_{\tilde{x},\tilde{y}} = \frac{4N\pi^2 k^2 \beta_{x,y} \varepsilon_{x,y}}{\lambda_u^2 (1 + k^2/2)}. \quad (10)$$

Отметим, что для согласованного с ондулятором пучка с малым эмиттансом получаются значения  $\zeta \approx 1 - 1.1$ ; при таких значениях влияние  $\zeta$  на расчетную мощность первых гармоник ЛСЭ мало; а в рентгеновских ЛСЭ эмиттанс очень мал и  $\zeta \cong 1 - 1.03$  пренебрежимо мало.

В ЛСЭ, кроме независимого роста мощности  $n$ -й гармоники  $\propto e^{nz/L_{n,g}}$ , есть и вклад мощности  $n$ -й гармоники, нелинейно индуцированный основным тоном; он пропорционален  $n$ -й степени мощности основного тона:  $\propto e^{nz/L_g}$  [5–12, 52–55, 59, 60] и др. Насыщение ЛСЭ обычно наступает в результате насыщения основного тона, который мощнее гармоник. При насыщении основного тона полная мощность  $n$ -й гармоники  $P_{F,n}$  обычно не достигается; оценка мощностей насыщения гармоник в режиме нелинейного роста получена Даттоли в [53, 54]:  $P_{n,F} = \eta_n \frac{P_{1,F}}{\sqrt{n}} \left( \frac{f_n}{nf_1} \right)^2$ . Процесс насыщения для гармоник в режиме нелинейной генерации начинает-

танного излучения (SASE FEL). В этом случае начальную мощность можно оценить по следующей формуле:  $P_{noise} \approx 1.6\rho^2 e 4\pi c P_e / (I_0 \lambda)$  [55]. Приближенное описание влияния дифракции на параметр Пирса было дано в [53, 54]:

$$\rho_n \rightarrow \tilde{\rho}_n = \frac{\rho_n}{\kappa}, \quad \kappa = \sqrt[3]{1 + \frac{\lambda_u \lambda_n}{16\pi\rho_n \Sigma}}. \quad (6)$$

Коэффициент  $\kappa > 1$  и  $\tilde{\rho}_n < \rho_n$ . С учетом разброса энергий  $\sigma_e$  и эмиттанса  $\varepsilon_{x,y}$  длина усиления гармоник  $L_{n,g}$  растёт, а мощность  $P_{F,n}$  уменьшается [53, 54]:

$$L_{n,g} \rightarrow L_{n,g} \kappa \Phi_n, \quad P_{F,n} \cong \sqrt{2}\rho_n P_{beam} \left( \eta_1 \frac{1}{\kappa^2} \right). \quad (7)$$

Феноменологические коэффициенты из [54] были изменены и откалиброваны нами по данным действующих ЛСЭ в диапазоне от видимого света до рентгеновского [56–58]:

$$\begin{aligned} \Phi_n &\cong \left( \zeta^{\sqrt{n}} + 0.165\mu_{\varepsilon,n}^2 \right) e^{0.034\mu_{\varepsilon,n}^2}, \\ \mu_{\varepsilon,n} &\cong \frac{2\sigma_e}{n^{1/3}\tilde{\rho}_n}, \\ \eta_n &\cong 0.942 \left( e^{-\Phi_n(\Phi_n-0.9)} + \frac{1.57(\Phi_n-0.9)}{\Phi_n^3} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

а эмиттанс и параметры Твисса явно учитываются в коэффициентах [54]:

ся несколько ранее, чем насыщение основного тона, и происходит постепенно. Эволюция мощности гармоники  $n$  вблизи насыщения с учетом осциллирующий и продолжающегося роста мощности гармоники в режиме насыщения приближенно записана в [61]; выражение в [61] было откалибровано нами по всем основным ЛСЭ и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_n(z) &\cong \frac{\tilde{P}_{n,0} e^{nz/L_g}}{1 + \left( e^{n\frac{z}{L_g}} - 1 \right) \frac{\tilde{P}_{n,0}}{\tilde{P}_{n,F}}} + \\ &+ \frac{P_{n,0} e^{nz/L_g}}{1 + \left( e^{n\frac{z}{L_g}} - 1 \right) \frac{P_{n,0}}{\tilde{P}_{n,F} - (\tilde{P}_{n,F}/2.5)}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\tilde{P}_{n,F} = P_{n,F} |_{\tilde{\Phi}_n(\tilde{\mu}_{\varepsilon,n})}$ ,  $\tilde{\mu}_{\varepsilon,n} \cong \frac{2n^{2/3}\sigma_e}{\tilde{\rho}_n}$  и мощность  $n$ -й гармоники в насыщении:

$$\tilde{P}_{n,F} \cong P_{n,F} \left( \frac{z}{L_s} \right)^{\frac{n}{2}} \left( 0.77 + 0.23 \cos \frac{n(z-L_s)}{1.3L_g} \right). \quad (12)$$

Формулы (11), (12) хорошо описывают данные в литературе основные действующие

ющих в мире ЛСЭ. Вблизи насыщения ЛСЭ вклад независимого роста мощности  $n$ -й гармоники  $P_n(z) \approx P_{0,n} e^{z/L_{n,g}} / \left(1 + (e^{z/L_{n,g}} - 1) P_0/P_{n,F}\right)$  обычно мал по сравнению со вкладом (11), (12), нелинейно индуцированным основным тоном; поэтому формулы независимого роста мощности (см. [53, 54]) для краткости не приводим.

Приближенные аналитические формулы для длины усиления и мощности ЛСЭ были предложены независимо многими исследователями. Так, Минг Кси (Ming Xie) в [62, 63] предложил скорректировать расчетную длину усиления таким образом:  $L_g = L_{g0} (1 + \Lambda)$ , где слагаемое  $\Lambda$  — полином нецелой степени с девятнадцатью численными коэффициентами. Huang с соавторами предложили в [64] простую формулу для мощности третьей гармоники  $P_3$ , индуцированной основным тоном мощностью  $P_1$ ; результат согласуется с экспериментами ЛСЭ, если исправить численный коэффициент в формуле Huang в [64] на порядок, как предложено в [65]. Оценки мощности насыщения второй гармоники  $P_2$ , индуцированной основным тоном, предложены также в [64, 66]. Результаты согласуются с измерениями на многих ЛСЭ, но иногда разница доходит до порядка и более [65]. Отметим, что формулы в [64, 66] разработаны для обычных ондуляторов; они не могут использоваться для исследования влияния гармоник поля ондулятора на излучение гармоник ЛСЭ.

## 2. ВЛИЯНИЕ СЕЧЕНИЯ ПУЧКА И РАЗБРОСА ЭНЕРГИЙ ЭЛЕКТРОНОВ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ЛСЭ LEUTL

ЛСЭ LEUTL был первым ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения (SASE) в видимом и ультрафиолетовом диапазонах. Для определенности рассмотрим излучение видимого света на длине волны  $\lambda_1 = 530$  нм [67, 68], для которого были тщательно документированы мощности первой, второй и третьей гармоник в [67]. Основные параметры ондулятора и пучка приведены в таблице.

Отметим заметное присутствие четных гармоник в спектре ЛСЭ LEUTL. Параметр Пирса для гармоник  $\rho_{n=1,2,3,4,5} \approx \{0.003, 0.001, 0.015, 0.001, 0.001\}$  не превышает разброс энергий электронов, а условие  $\rho \lesssim \sigma_e/2$  выполнено для основного тона при значительно большем, чем стандартный, разбросе энергий электронов. Влияние параметров пучка на четные гармоники ЛСЭ трудно определить, глядя на формулы. Нагляднее графически показать зависимости основных параметров ЛСЭ от параметров пучка. Так, для гармоник  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  ЛСЭ LEUTL с учётом только эмиттанса пучка получаем следующие значения коэффициентов Бесселя:  $f_{n,emit} \approx \{0.75, 0.11, 0.33, 0.12, 0.20\}$ . Вклад бетатронных колебаний в  $f_n$  нечетных гармоник  $n = 1, 3, 5 \dots$  пренебрежимо мал; для четных гармоник вклад бетатронных колебаний в  $f_n$  составляет

$\sim 0.02$ , что существенно меньше значений коэффициентов Бесселя четных гармоник:  $f_{2,4} \sim 0.1$ . Для ЛСЭ расчет мощности четных гармоник с учетом эмиттанса и бетатронных колебаний даёт мощности их излучения на порядок меньше, чем измеренные в экспериментах значения. Учёт угла, под которым электроны в среднем взаимодействуют с фотонами на длине усиления в пучке конечного сечения,  $\gamma\bar{\theta} \approx 0.14$ , даёт большие значения коэффициентов Бесселя четных гармоник:  $f_{e-\gamma,emit} \approx \{0.75, 0.18, 0.30, 0.18, 0.14\}$ . Отметим, что для ондулятора со второй гармоникой поля, рассмотренного ранее в [38, 65], влияние второй гармоники поля амплитудой 0.1 основного поля в противофазе ему таково, что коэффициенты Бесселя четных гармоник  $n = 2, 4$  получаются меньше:  $f_{e-\gamma,emit}^{d=-0.1} \approx \{0.75, \mathbf{0.12}, 0.32, \mathbf{0.13}, 0.15\}$ . Для гармоник  $n = 2, 4$  это приводит к ослаблению мощности их излучения в ЛСЭ LEUTL в  $\sim 5 - 7$  раз; для других ЛСЭ этот эффект может быть ещё сильнее [65].

Однако устроить ондулятор с гармоникой поля непросто и дорого. Гораздо проще изменить в разумных пределах параметры пучка электронов. Ниже мы рассмотрим аналитически и исследуем влияние параметров пучка на основные параметры ЛСЭ и на излучение гармоник, используя формализм коэффициентов Бесселя. Штатные параметры электронного пучка и ондулятора LEUTL даны в таблице. Зависимость коэффициентов Бесселя  $f_{1,2,3}$  от сечения пучка и разброса энергий получена нами аналитически (2) и показана для ЛСЭ LEUTL на рис. 1.

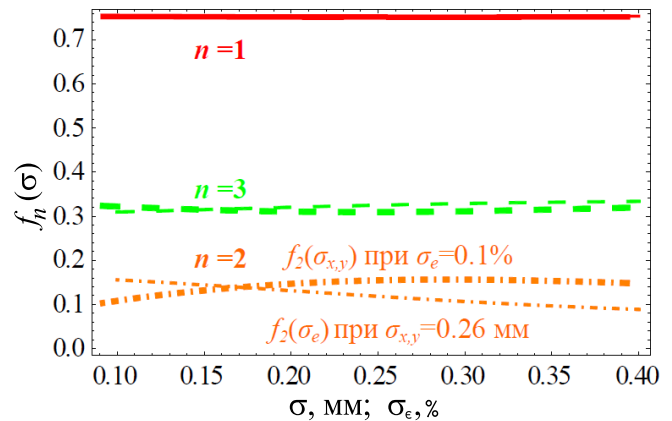


Рис. 1. Зависимость коэффициентов Бесселя  $f_{1,2,3}$  ЛСЭ LEUTL от сечения пучка и разброса энергий. Для зависимости от сечения (жирные линии) берем штатный разброс энергий  $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$ , для зависимости от разброса энергий (тонкие линии) берем штатное сечение  $\sigma_{x,y} = 0.26$  мм. Коэффициенты Бесселя:  $f_1$  — сплошная красная,  $f_2$  — штрихпунктирная оранжевая,  $f_3$  — штриховая зеленая линии

На рис. 1 видно, что значения  $f_n$  для нечетных гармоник  $n = 1, 3$  практически не зависят от параметров электронного пучка, в то время как коэффициенты Бесселя четных гармоник, в частности,



Таблица. Параметры электронного пучка и плоского ондулятора LEUTL [67]

Пучок электронов				Ондулятор	
Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\gamma$	425	$\sigma_e$	$1 \times 10^{-3}$	$\lambda_u$ , см	3.3
E, МэВ	217	$\beta_x$ , м	1.5	L, см	248
$\gamma\varepsilon_{x,y}$ , м×рад	$\sim 6.2\pi \times 10^{-6}$	$\beta_y$ , м	1.5	N	75
$\sigma_{x,y}$ , мм	$\sim 0.25$	$I_{peak}$ , А	210	k	31
				Число онд. в ЛСЭ	9

$n = 2$  (оранжевые штрихпунктирные линии), зависят от разброса энергии и сечения пучка по-разному. С ростом сечения пучка  $f_2$  сначала растет, а затем около значения, соответствующего штатному сечению,  $f_2$  выходит на константу; примерно то же поведение можно ожидать и от мощности второй гармоники, особенно для спонтанного излучения. С ростом разброса энергий электронов коэффициент Бесселя  $f_2$  убывает, и мы ожидаем того же поведения мощности второй гармоники ЛСЭ.

Рассчитанные нами зависимости длины усиления ЛСЭ от сечения пучка  $L_g(\sigma_{x,y})$  и от разброса энергий  $L_g(\sigma_e)$  мы представили совместно на рис. 2, где  $L_g(\sigma_{x,y})$  — жирная линия,  $L_g(\sigma_e)$  — тонкая линия.

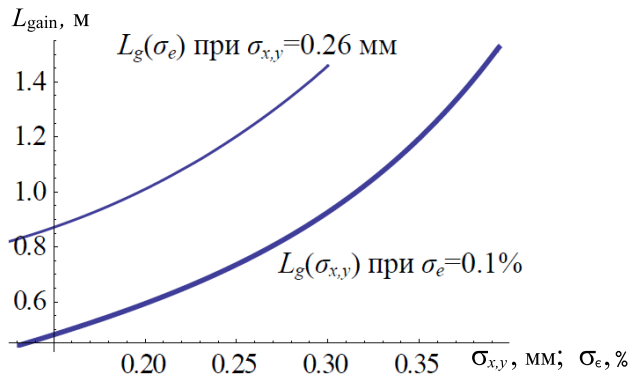


Рис. 2. Зависимость длины усиления  $L_g$  ЛСЭ LEUTL от сечения пучка (жирная линия) при штатном разбросе энергий  $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$  и от разброса энергий (тонкая линия) при штатном сечении  $\sigma_{x,y} = 0.26$  мм

Обратим внимание, что зависимости длины усиления от разброса энергий и от сечения очень похожи (ср. тонкую и жирную линии на рис. 2). Увеличение сечения пучка и увеличение разброса энергий практически одинаковым образом увеличивают длину усиления. Штатные значения сечения и разброса энергий дают длину усиления LEUTL  $L_g \approx 0.7$  м, что соответствует экспериментальным значениям [67, 68].

Угол электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления  $\theta = \sigma_{x,y}/L_g$  в основном определяет мощность четных гармоник ЛСЭ (см. [39, 42, 51] и др.). Мы получили аналитические зависимости

нормированного угла электрон-фотонного взаимодействия  $\gamma\theta$  от сечения и от разброса энергий пучка LEUTL и построили их на рис. 3; жирная линия показывает зависимость от разброса энергий, тонкая — от сечения пучка.

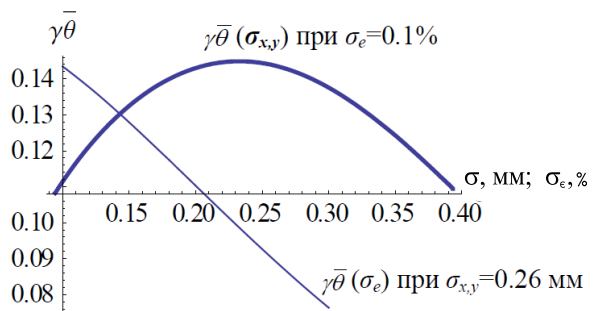


Рис. 3. Зависимость угла электрон-фотонного взаимодействия  $\gamma\theta = \sigma_{x,y}/L_g$  ЛСЭ LEUTL от сечения пучка (жирная линия) при штатном разбросе энергий  $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$  и от разброса энергий (тонкая линия) при штатном сечении  $\sigma_{x,y} = 0.26$  мм

Обратим внимание, что, в отличие от почти одинаковой зависимости длины усиления  $L_g$  от сечения и от разброса энергий пучка (см. рис. 2), угол электрон-фотонного взаимодействия по-разному зависит от сечения и от разброса энергий (см. рис. 3). С увеличением разброса энергий угол  $\gamma\theta(\sigma_e)$  линейно уменьшается, тогда уменьшается и мощность четных гармоник, которые зависят от него; зависимость  $P_2(\sigma_e)$  будет представлена далее в статье. С увеличением сечения угол  $\gamma\theta(\sigma_{x,y})$  сначала растет и достигает максимального значения приблизительно при штатном значении сечения пучка  $\sigma_{x,y} \approx 0.25$  мм, при дальнейшем увеличении сечения угол электрон-фотонного взаимодействия уменьшается (см. жирную линию на рис. 3); можно ожидать соответствующего поведения и от мощности четных гармоник ЛСЭ. Причина такого поведения угла электрон-фотонного взаимодействия  $\theta(\sigma_{x,y})$  заключается в нелинейном росте длины усиления ЛСЭ при увеличении сечения пучка, как показано на рис. 2. При определенном сечении его дальнейший рост не приводит к увеличению отношения  $\sigma_{x,y}/L_g$ , задающего угол электрон-фотон-

ного взаимодействия.

Используя формулу (12) для мощности гармоник в насыщении и учитывая поведение параметров  $\Phi_n, \eta_n$  (7)–(10), коэффициентов Бесселя, длины усиления, угла электрон-фотонного взаимодействия, получаем аналитические зависимости мощности гармоник ЛСЭ от сечения пучка и от разброса энергий на рис. 4; жирные линии показывают зависимость от сечения пучка, тонкие линии — зависимость от разброса энергий электронов.

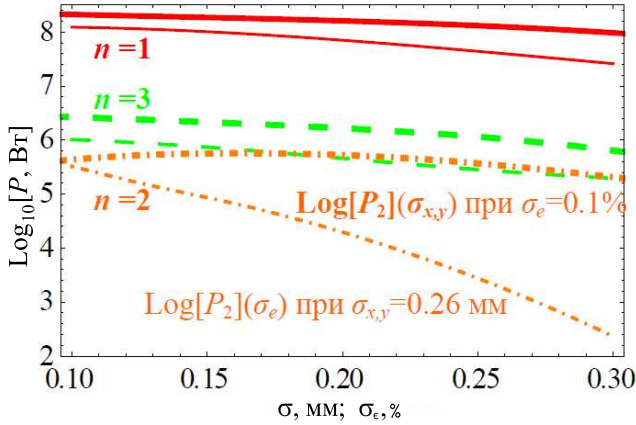


Рис. 4. Зависимость мощности излучения гармоник ЛСЭ LEUTL от сечения пучка (жирные линии) при штатном разбросе энергий  $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$  и от разброса энергий (тонкие линии) при штатном сечении  $\sigma_{x,y} = 0.26$  мм. Гармоники ЛСЭ:  $n=1$  — сплошная красная,  $n=2$  — штрихпунктирная оранжевая,  $n=3$  — штриховая зелёная линии

Аналитический результат, показанный на рис. 4, демонстрирует, что с увеличением разброса энергий мощности всех гармоник ЛСЭ уменьшаются (тонкие линии на рис. 4), что ожидаемо хотя бы потому, что при большом разбросе энергий затруднен процесс группировки электронов на длине волны излучения. С увеличением сечения пучка мощности всех гармоник ЛСЭ немного уменьшаются (жирные линии на рис. 4). Ослабление гармоник с ростом сечения в целом незначительно и обусловлено увеличением эмиттанса и деградацией качества пучка. Обращает на себя внимание, что мощность второй гармоники (оранжевая жирная линия на рис. 4) сначала немного растёт при увеличении сечения от малых значений, а затем уменьшается, следуя за поведением на рис. 3 угла  $\gamma\theta(\sigma_{x,y})$  электрон-фотонного взаимодействия. Слабая зависимость мощности второй гармоники ЛСЭ от сечения пучка несколько неожиданна в контексте выводов Huang в [64] и согласуется с выводом Geloni в [66].

Полученная нами зависимость мощности гармоник ЛСЭ от сечения пучка и от разброса энергий (см. рис. 4) указывает на возможность уменьшить содержание второй гармоники в излучении ЛСЭ. В частности, обращает на себя внимание сильный экспоненциальный спад мощности второй

гармоники ЛСЭ при увеличении разброса энергий (см. тонкую оранжевую штрихпунктирную линию на рис. 4). Это можно использовать для подавления второй гармоники ЛСЭ, если она нежелательна, например, когда ЛСЭ используется в качестве источника при исследованиях нелинейной генерации второй гармоники (SHG) в материалах и на границах раздела сред. Мы рассчитали влияние разброса энергий электронов на содержание гармоник излучения ЛСЭ LEUTL и показали результат на рис. 5; зависимость излучения гармоник от сечения слабая (см. жирные линии на рис. 4 почти горизонтальны во всем диапазоне изменения сечения  $\sigma_{x,y} = 0.1 - 0.3$  мм) и не представляет особого интереса в этом контексте.

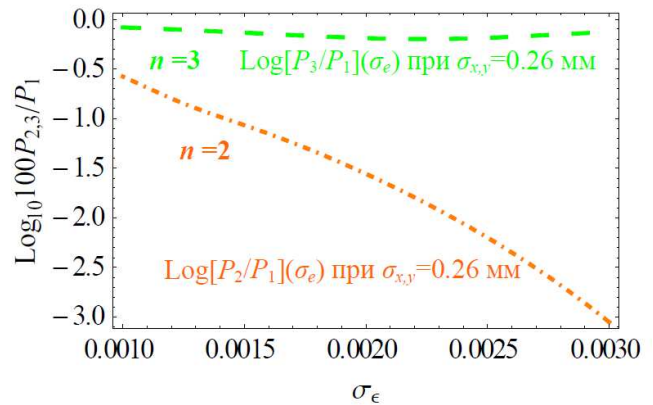


Рис. 5. Зависимость содержания гармоник ЛСЭ LEUTL от разброса энергий при штатном сечении  $\sigma_{x,y} = 0.26$  мм. Гармоники ЛСЭ:  $n=1$  — сплошная красная,  $n=2$  — штрихпунктирная оранжевая,  $n=3$  — штриховая зелёная линии

В отношении влияния разброса энергии пучка на содержание гармоник ЛСЭ отметим, что увеличение разброса энергий электронов в два раза с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.2\%$  приводит к ослаблению второй гармоники ЛСЭ на порядок, дальнейшее увеличение разброса энергий до  $\sigma_e \approx 0.25\%$  даёт ослабление мощности второй гармоники ЛСЭ LEUTL на два порядка, а увеличение разброса энергий электронов в три раза с  $\sigma_e \approx 0.1\%$  до  $\sigma_e \approx 0.3\%$  приводит к подавлению второй гармоники ЛСЭ на три порядка величины мощности (см. рис. 4); при этом содержание второй гармоники в спектре ЛСЭ уменьшается на 2.5 порядка (см. рис. 5).

На практике увеличение разброса энергий пучка можно относительно просто реализовать с помощью его «нагрева» внешним лазером, как сделано, например, на ЛСЭ LCLS [27]. Это значительно проще и дешевле, чем устраивать ондулятор с двоякопериодическим полем, в котором вторая гармоника поля в противофазе основному полю подавляет излучение второй гармоники ЛСЭ (см. [38]). В сравнении с влиянием второй гармоники поля, влияние увеличения разброса энергий на излучение второй гармоники сильнее, и его значительно проще и дешевле реализовать. В то же время, хотя вторая гар-

моника ЛСЭ подавлена под влиянием увеличенного разброса энергий сильнее, чем под влиянием второй гармоники поля ондулятора, увеличенный разброс энергий с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.3\%$  увеличивает также длину усиления и насыщения в два раза, (см. рис. 2). То есть подавление второй гармоники излучения ЛСЭ «нагревом пучка» очень эффективно, но требует значительно более длинного ондулятора, что увеличивает размер и стоимость установки.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Проведён теоретический анализ зависимости параметров ЛСЭ и мощности гармоник излучения ЛСЭ с плоским ондулятором LEUTL от параметров пучка электронов, в частности от сечения и разброса энергий пучка. Ранее в [38] было показано, что вторая гармоника поля ондулятора с разумной амплитудой  $\sim 10\%$  основного поля может ослабить излучение второй гармоники ЛСЭ в несколько раз и даже на порядок. В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Длина усиления ЛСЭ зависит похожим образом от сечения пучка и от разброса энергий, увеличиваясь с их увеличением.
2. Угол электрон-фотонного взаимодействия по-разному зависит от сечения и разброса энергий. Он уменьшается почти линейно при увеличении разброса энергий, а от сечения его зависимость нелинейная.
3. Коэффициенты Бесселя нечетных гармоник практически не зависят от сечения и разброса энергий пучка.
4. Коэффициент Бесселя четных гармоник зависит от сечения и от угла электрон-фотонного взаимодействия. Коэффициент Бесселя четных гармоник медленно растет с увеличением сечения до определенного предела, а затем медленно убывает; он заметно уменьшается с ростом разброса энергий электронов.
5. При малых сечениях содержание второй гармоники в излучении ЛСЭ может несколько

уменьшиться вследствие уменьшения эффективного угла электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления.

6. Увеличенный в два раза с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.2\%$  разброс энергии пучка электронов имеет такой же или больший эффект подавления второй гармоники излучения ЛСЭ, как и вторая гармоника поля ондулятора, на порядок. Увеличение разброса энергий в три раза с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.3\%$  уменьшает содержание второй гармоники в спектре ЛСЭ LEUTL почти на три порядка.
7. Увеличение разброса энергий с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.3\%$  сопровождается увеличением длины усиления и насыщения, которая удваивается при увеличении разброса энергий электронов с  $\sigma_e = 0.1\%$  до  $\sigma_e = 0.3\%$ . При этом разброс энергий как обычно ограничен значением  $\sigma_e < \rho$ , желательно  $\sigma_e < \rho/2$ ; выше этого значения становится затруднительной группировка электронов в ЛСЭ.
8. При заданном постоянном электронном токе, изменение сечения меняет плотность тока, что естественно изменяет мощность излучения. Анализ показал, что изменение сечения не оказывает принципиального влияния на процентное содержание гармоник в излучении ЛСЭ, в частности для второй гармоники ЛСЭ. Изменение эмиттанса пучка также мало меняет содержание гармоник излучения ЛСЭ.

В заключение отметим, что мы провели аналогичный анализ и для ЛСЭ LCLS в рентгеновском диапазоне; хотя значения характеристик ЛСЭ LCLS сильно отличаются от значений LEUTL, выводы в целом не меняются.

Автор благодарит проф. А. В. Борисова и проф. В. Г. Багрова за советы и обсуждение математических и физических аспектов излучения зарядов в магнитных полях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, грант 075-15-2021-1353 а также гранта NKFIH 2022-2.1.1-NL-2022-00002.

- [1] Гинзбург В.Л. // Изв. АН СССР (Физика). **11** 1651. (1947). (*Ginzburg V.L. // Bull Acad. Sci. U.S.S.R. Sér. Phys.* **11**, 165 (1947)).
- [2] Motz H., Thon W., Whitehurst R.N.J. // *Appl. Phys.* **24** 826. (1953).
- [3] Motz H. // *J. Appl. Phys.* **22**. 527. (1951).
- [4] Madey J.M. // *J. Appl. Phys.* **42**. 1906. (1971).
- [5] McNeil B.W.J., Thompson N.R. // *Nature Photonics.* **4**. 814. (2010).
- [6] Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. // *Rev. Mod. Phys.* **88** 015006. (2016).
- [7] Kim K.-J., Huang Z., Lindberg R. *Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers; Principles of Coherent X-Ray Radiation*, Cambridge University Press, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom.
- [8] Huang Z., Kim K.J. // *Phys. Rev. ST-AB.* **10**. 034801. (2007).
- [9] Colson W.B. // *Phys. Rev. A.* **24**, N 1 639. (1981).
- [10] Saldin E.L., Schneidmüller E.A., Yurkov M.V. *The Physics of Free Electron Lasers*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000. **X**, 470 p., ISBN 978-3-540-66266-2.

- [11] *Schmüser P., Dohlus M., Rossbach J., Behrens C.* Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime. Springer Tracts in Modern Physics, **258**, Cham (ZG), Springer International Publishing, 2014, **XV**, 231 p. ISBN 978-3-319-04080-6.
- [12] *Pellegrini C.* // *Phys. Scr.* **2016**. 014004. (2016).
- [13] *Багров В.Г., Бисноватый-Коган Г.С., Бордовичын В.А.* и др. Теория излучения релятивистских частиц. М.: Физматлит, 2002. 575 с. (*Bagrov V.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Bordovitsyn V.A.* et al. Synchrotron Radiation Theory and Its Development. / ed V.A. Bordovitsyn. Singapore: World Scientific, 1999).
- [14] *Margaritondo G., Ribic P.R.* // *J. Synchrotron Rad.* **18**. 101. (2011).
- [15] *Zhukovsky K.* // *Journal of Physics D: Applied Physics.* **50**(50). 505601 (2017).
- [16] *Zhukovsky K., Potapov I.* // *Laser and Particle Beams.* **35**(2). 326. (2017).
- [17] *Zhukovsky K.* // *EPL.* **119**(3). 34002 (2017).
- [18] *Жуковский К.В.* // *Изв. Вузов Физика.* **62**, № 6. 109 (2019). (*Zhukovsky K.V.* // *Russ. Phys. J.* **62**, N 6. 1043 (2019)).
- [19] *Zhukovsky K.V.* // *J. Synchrotron Rad.* **26** 1481. (2019).
- [20] *Wu L., Patankar S., Morimoto T.* et al. // *Nat. Phys.* **13**, 350 (2016).
- [21] *Nuriya M., Fukushima S.* et al. // *Nat. Commun.* **7**, 11557 (2016).
- [22] *Boyd G., Bridges T., Burkhardt E.* // *IEEE J. Quantum Electron.* **4**, 515 (1968).
- [23] *Bhar G.C., Das S., Vodopyanov K.L.* // *Appl. Phys. B.* **61**, 187 (1995).
- [24] *Campagnola P.J., Loew L.M.* // *Nat. Biotechnol.* **21**, 1356 (2003).
- [25] *Emma P., Akre R., Arthur J.* et al. // *Nature Photonics.* **4**. 641 (2010).
- [26] *Emma P.* First lasing of the LCLS X-ray FEL at 1.5 E. TH3PBI01. Proceedings of PAC09, Vancouver, BC, Canada, (2009).
- [27] *Ratner D.* et al. // *Phys. Rev ST-AB.* **14**, 060701 (2011).
- [28] *Biedron S.G.* et al. // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **483**, 94 (2002).
- [29] *Milton S.V., Gluskin E., Arnold N.D.* et al. // *Science.* **292**. 2037 (2000).
- [30] *Huang Z., Reiche S.* In: Bakker, R. et al. (Eds.), Proceedings of the FEL 2004 Conference. Italy, Trieste, 2004, p. 201
- [31] *Abela R.* et al. // *Struct. Dyn.* **4**, 061602 (2017).
- [32] *Milne C.J.* et al. // *Appl. Sci.* **7**, 720 (2017).
- [33] *Juranic P.* et al. // *J. Synchrotron Rad.* **25**, 1238 (2018).
- [34] *Abela R.* et al. // *J. Synchrotron Rad.* **26**, 1073 (2019).
- [35] *Zhukovsky K., Fedorov I.* // *SYMMETRY.* **13**, N 1. 135. (2021).
- [36] *Alekseev V.I., Bessonov E.G.* // *Nucl. Instr. Meth. A.* (1991).
- [37] *Bessonov E.G.* // *Nucl. Instr. Meth. A.* **282** 405. (1989).
- [38] *Жуковский К.В.* // *ЖЭТФ.* **164**, № 3(9). 315. (2023).
- [39] *Zhukovsky K.* // *Opt. Laser Technology.* **131** 106311. (2020).
- [40] *Zhukovsky K.* // *Eur. Phys. J. Plus.* **136** 714. (2021).
- [41] *Zhukovsky K.* // *Ann. Phys.* **533**, № 11. 2100091. (2021).
- [42] *Zhukovsky K.* // *Rad. Phys. Chem.* **189**. 109698. (2021).
- [43] *Алферов Д.Ф., Баишаков Ю.А., Черенков П.А.* // УФН. **157**, № 3. 389 (1989). (*Alferov D.F., Bashmakov Yu.A., Cherenkov P.A.* // *Soviet Physics Uspekhi.* **32**, N 3. 200 (1989)).
- [44] *Винокуров Н.А., Левичев Е.Б.* // УФН. **185**. 917 (2015). (*Vinokurov N. A., Levichev E. B.* *Physics-Uspekhi.* **58**, N 9 850 (2015)).
- [45] *Prakash B., Huse V., Gehlot M., Mishra G.* // *Optik.* **127** 1639. (2016).
- [46] *Алферов Д.Ф., Баишаков Ю.А., Бессонов Е.Г.* // ЖТФ. **10** 2126 (1973). (Sov. Phys.-Tech. Phys. **18** 1336 (1974)).
- [47] *Bagrov V.G., Zal'mezh V.F., Nikitin M.M., Epp V.Y.* // *Nucl. Instr. Meth. A.* **261** 54. (1987).
- [48] *Даттоли Д., Жуковский К.В., Михайлин В.В.* // Вестн. МГУ Физ. Астрон. № 5. 33 (2009). (*Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.V.* // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* **64**, N 5. 507 (2009)).
- [49] *Dattoli G., Mikhailin V.V., Zhukovsky K.* // *J. Appl. Phys.* **104** 124507. (2008).
- [50] *Zhukovsky K., Fedorov I.* // *Symmetry.* **14**, N 7. 1353 (2022).
- [51] *Жуковский К.В.* // УФН **191**, № 3. 318 (2021). (*Zhukovsky K.V.* // *Physics-Uspekhi* **64**, N 3. 304 (2021)).
- [52] *Bonifacio R., Pellegrini C., Narducci L.* // *Opt. Comm.* **50** 373. (1984).
- [53] *Dattoli G., Ottaviani P.L., Pagnutti S.* // *J. Appl. Phys.* **97** 113102. (2005).
- [54] *Dattoli G., Giannessi L., Ottaviani P.L., Ronsivalle C.* // *J. Appl. Phys.* **95**. 3206. (2004).
- [55] *Giannessi L.* Seeding and Harmonic Generation in Free-Electron Lasers. In Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers. / *E.J. Jaeschke* et al. (eds.). Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [56] *Zhukovsky K.* // *Results Phys.* **13** 102248. (2019).
- [57] *Zhukovsky K.* // *J. Synchrotron Rad.* **27**. 1648. (2020).
- [58] *Zhukovsky K.* // *Results Phys.* **19**. 103361. (2020).
- [59] *Bonifacio R., De Salvo L., Pierini P.* // *Nucl. Instrum. A.* **293** 627. (1990).
- [60] *Huang Z., Kim K.-J.* // *Phys. Rev. E.* **62** 7295. (2000).
- [61] *Жуковский К.В.* // Вестн. МГУ Физ. Астрон. № 5. 60 (2019). (*Zhukovsky K.V.* // *Mosc. Univ. Phys. Bull.* **74**, N 5. 480 (2019)).
- [62] *Xie M.* // *Nucl. Instrum. Meth. A* **445**. 59. (2000).
- [63] *Xie M.* In Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference (IEEE, Piscataway, NJ, 1995), p. 183.
- [64] *Huang Z., Kim K.-J.* // *Nucl. Instrum. Meth. A.* **475** 112. (2001).
- [65] *Zhukovsky K.* // *EPL.* **141**. 45002 (2023).
- [66] *Geloni G., Saldin E., Schneidmiller E., Yurkov M.* // *Opt. Comm.* **271** 207. (2007).
- [67] *Biedron S.G.* et al. // *Nucl. Instrum. Meth. A.* **483** 94. (2002).
- [68] *Milton S.V.* et al. // *Science.* **292** 2037. (2000).
- [69] *Freund H.P., van der Slot P.J.M., Grimminck D.L.A.G.* et al. // *New J. Phys.* **19** 023020. (2017).



## Suppressing of even harmonics in free electron lasers by modifying the energy spread of the beam

**K. Zhukovsky**

*Department of Theoretical Physic, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: [zhukovsk@physics.msu.ru](mailto:zhukovsk@physics.msu.ru)*

Using an analytical description of the evolution of the power of harmonics in free electron laser (FEL) undulators, we study the effect of electron beam parameters on the main characteristics of FEL radiation: the gain length, spectrum, and harmonic power. The possibility of suppressing even harmonics of the FEL as a light source in the study of materials and surfaces by analyzing the second harmonic nonlinear response (SHG) is being studied. The main factors influencing the radiation of even FEL harmonics are revealed; the influence of the beam cross section and the spread of electron energies on their radiation is analyzed. An example of a LEUTL FEL with visible light emission, which is used in studies of the optical properties of materials and the chemical state of molecules on surfaces and interfaces between media, is considered. In this context, the possibility of suppressing the second FEL harmonic is analyzed.

PACS: 41.60.-m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.

*Keywords:* undulator, free electron laser, laser radiation, harmonics.

*Received 05 August 2023.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2023. **78**, No. 6. Pp. 773–782.

### Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор;  
e-mail: [zhukovsk@physics.msu.ru](mailto:zhukovsk@physics.msu.ru).