

Эволюция двумерной нестационарной контрастной структуры в неоднородной среде с адвекцией

А. А. Быков^{1, *}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики. Россия,
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 25.01.2024; подписана в печать 09.02.2024)

Рассматривается задача об эволюции внутреннего переходного слоя в двумерных квазилинейных начально-краевых задачах для уравнения реакции–адвекции–диффузии в неоднородной среде с малым параметром при старших производных. Показано, что в нулевом (главном) порядке асимптотического ряда положение внутреннего переходного слоя описывается уравнением Гамильтона–Якоби, потенциал вычисляется в виде интеграла от функции плотности источников. Линия фронта переходного слоя эволюционирует таким же образом, как линия равного значения эйконала (или линия волнового фронта) для задачи о распространении волн в неоднородной среде для случая коротковолновой (геометрооптической) асимптотики. Найдено сумма асимптотического ряда нулевого и первого порядка, время разрушения контрастной структуры.

PACS: 02.60.Lj. УДК: 517.958.226.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотические методы.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.79.2420101](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.79.2420101)

ВВЕДЕНИЕ

Мы изучаем эволюцию концентрации примеси в двухкомпонентной двумерной неоднородной среде, в которой носитель перемещается с заданной скоростью, примесь описывается уравнением реакции–адвекции–диффузии (РАД) [1].

Примесь участвует в процессах генерации, адвекции, диффузии. Процесс генерации описывается функцией плотности источников (ФПИ), которая зависит от концентрации и от координат (x, y) на плоскости. Мы предполагаем, что имеются три значения концентрации $\varphi_{1;2;3}(x, y)$, в которых ФПИ, проходя через нулевое значение, меняет знак. Меньшее и большее соответствует устойчивым состояниям, некоторое среднее значение концентрации неустойчиво (в однородной среде при малом возмущении эволюционирует к меньшему или большему). После завершения быстропротекающих процессов установления профиля концентрации в направлении градиента, решение принимает форму контрастной структуры (КС). Это означает, что имеются большие области с малым градиентом решения (пятна КС), разделяемые узкими областями с большим градиентом, которые называют внутренними переходными слоями (ВПС). Внутри ВПС мы определяем центральную линию ВПС, это гладкая кривая, на которой концентрация проходит через значения $\varphi_2(x, y)$. Для одномерной модели с простыми корнями ФПИ перемещение ВПС исследовано в [2, 3] и в цитированных там работах. Модели

ФПИ с кратными корнями исследованы в [4, 5]. Стационарное положение ВПС для двумерной задачи исследовано в [6, 7]. Дрейф ВПС, вызванный искривлением линии ВПС, исследован в [8, 9] для двумерной задачи, для трёхмерной КС в [10], только для сбалансированной ФПИ. В [11] уравнение движения фронта горения лесного пожара выведено исходя из предположения о заданной скорости горения фронта в направлении нормали, скорость находится исходя из уравнений конвективного, диффузионного, радиационного переноса тепла. Найдены точные уравнения динамики линии фронта на основе решения уравнений Гамильтона–Якоби.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение РАД с малым параметром при старших производных, как и в классической работе А.Н.Тихонова [12]. Мы найдем решение уравнения РАД на плоскости в виде частичной суммы асимптотического ряда, построим точное решение уравнений нулевого порядка методом Гамильтона–Якоби. В отличие от [11], мы построим частичную сумму асимптотического ряда. После появления особых точек на семействе лучей в нулевом порядке линия ВПС складывается из нескольких ветвей, в точках сопряжения претерпевает излом. В первом порядке в окрестности излома формируется гладкая сглаживающая кривая, радиус кривизны которой мы также найдем. Постановка задачи аналогична [9] за исключением того, что в [9] рассматривался только случай сбалансированной ФПИ, для которого прямолинейный ВПС в однородной среде с нулевой адвекцией будет неподвижен. В настоящей работе мы рассматриваем несбалансированную ФПИ, так что ВПС указанного вида будет перемещаться. Уравнения

* E-mail: abykovmsu@mail.ru

нулевого приближения нелинейные с граничными условиями, обеспечивающими стремление к одному из равновесных значений на бесконечности [13].

Последующие приближения будут строиться как решения уравнения в вариациях для нелинейного уравнения нулевого приближения. Скорость дрейфа ВПС в каждом порядке находится из условия разрешимости соответствующей краевой задачи. Так как нас интересуют прежде всего физические приложения, мы ограничимся построением нулевого и первого приближений, а также обоснованием существования решения, основанным на теории дифференциальных неравенств.

1. УРАВНЕНИЕ РЕАКЦИИ–АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Мы рассматриваем двумерную по пространственным координатам начально–краевую задачу для уравнения РАД в ограниченной области D . В соответствии с методикой А.Н.Тихонова [12] вводим в уравнение малый параметр ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon u_t' + \varepsilon^2 V_x u_x' + \varepsilon^2 V_y u_y' = \\ = \varepsilon^2 (\kappa u_x')_x' + \varepsilon^2 (\kappa u_y')_y' - f(u, x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

$(x, y) \in D$, $t > t_0 = 0$, с граничными условиями второго рода: $\frac{\partial u}{\partial n} = \psi_1(x, y)$ на кривой Γ , которая является границей области D , и с начальным условием $u(x, y, t_0) = u_{\text{start}}(x, y)$. Начально–краевая задача для уравнения (1) является сингулярно возмущенной, так как при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) переходит в алгебраическое уравнение $f(u, x, y) = 0$. Расстановка степеней малого параметра обеспечивает возможность существования решения типа контрастной структуры [14].

Поверхностью равновесия $\mathcal{S} : \{(u, x, y) : (x, y) \in D, u = \varphi(x, y)\}$ назовем гладкое решение уравнения $f(u, x, y) = 0$. Назовем величиной дисбаланса функцию

$$J(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_3(x, y)} f(u, x, y) du. \quad (2)$$

Предположим, что выполнены следующие условия, накладываемые на ФПИ $f(u, x, y)$:

У1. ФПИ есть гладкая функция в области $(x, y) \in D$, $u \in (-\infty, +\infty)$.

У2. В области D имеется ровно три поверхности равновесия $\mathcal{S}_{1;2;3} : u = \varphi_{1;2;3}(x, y)$, причем $\varphi_1(x, y) < \varphi_2(x, y) < \varphi_3(x, y)$ в D .

У3. В окрестности $\Omega(\mathcal{S}_j)$ поверхности равновесия \mathcal{S}_j , $j \in \{1; 2; 3\}$, ФПИ представляется в виде $f(u, x, y) = F_j(u - \varphi_j(x, y), x, y)$, причем $F_j(\omega, x, y)|_{\omega=0} = 0$, $(F_{1;3}(\omega, x, y))'|_{\omega=0} > 0$, $(F_2(\omega, x, y))'|_{\omega=0} < 0$. Здесь $\Omega(\dots)$ есть окрестность указанного объекта.

У4. Всюду внутри D верно условие знакоопределенности дисбаланса: $J(x, y) > 0$.

Сформулируем начальные условия. Пусть G_{start} — связная область с гладкой границей Υ_{start} , $G_{\text{start}} \subset D$, расстояние от Υ_{start} до Γ больше нуля. Пусть $\tilde{u}_0(x, y) = \varphi_1(x, y)$ вне G_{start} , $\tilde{u}_0(x, y) = \varphi_3(x, y)$ внутри G_{start} , значение $\tilde{u}_0(x, y)$ на Υ_{start} несущественно. Начальная функция $u_{\text{start}}(x, y)$ получается из $\tilde{u}_0(x, y)$ сглаживанием с помощью усредняющего ядра $\omega_\varepsilon(r)$ так, как это описано в [15], гл. 2, § 1.

Более точно начальные условия можно взять в виде суммы асимптотического ряда первого порядка ((3), (4), (5), (21)), найденной для заданной гладкой кривой Υ_{start} .

Назовем *пятном КС* область $G(t)$, в которой $\varphi_2(x, y) < u(x, y, t) < \varphi_3(x, y)$. В частности, в начальный момент времени функция концентрации $u_{\text{start}}(x, y)$ порождает пятно G_{start} , граница которого отстоит от Υ_{start} на расстояние порядка ε . Рассмотрим КС, которая состоит из ровно одного пятна $G(t)$, границу которого назовем линией ВПС и обозначим $\Upsilon(t) = \{(x, y) : u(x, y, t) = \varphi_2(x, y)\}$.

Мы сформулируем и обоснуем далее закон эволюции $\Upsilon(t)$. Мы покажем, что найдется промежуток времени $[t_0, t_1)$ такой, что кривая $\Upsilon(t)$ будет гладкой замкнутой кривой без особых точек, значение t_1 соответствует моменту разрушения пятна КС или выхода пятна на границу области D .

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД

Частичную сумму асимптотического ряда для решения задачи РАД будем искать в виде [3] суммы разрывного решения вырожденного уравнения, функций внутреннего переходного слоя и функций пограничного слоя:

$$u(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \in G(t), \\ U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) & \text{при } (x, y) \notin G(t), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{(+)}(x, y, \varepsilon) + Q^{(+)}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in G(t), \\ U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{(-)}(x, y, \varepsilon) + Q^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) + \Pi(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \notin G(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{u}(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{u}^{(+)}(x, y, \varepsilon) & \text{при } s(x, y) \in G(t), \\ \bar{u}^{(-)}(x, y, \varepsilon) & \text{при } s(x, y) \notin G(t), \end{cases} \quad (5)$$

$\bar{u}^{(+)}(x, y, \varepsilon) = \varphi_3(x, y)$, $\bar{u}^{(-)}(x, y, \varepsilon) = \varphi_1(x, y)$. Функции переходного слоя в (4), а также линию

ВПС $\Upsilon(t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$Q^{(\pm)} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}, \quad \Pi = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \Pi_k, \quad (6)$$

$$\Upsilon(t) = \Upsilon_0(t) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \Upsilon_k(t),$$

причем $\Upsilon(t)$ задана в параметрической форме: $x = x(t, \theta)$, $y = y(t, \theta)$, параметр θ определяет точку на кривой, $\theta \in [\theta_a, \theta_b]$. Функции $x(t, \theta)$ и $y(t, \theta)$ периодические по θ , дважды непрерывно дифференцируемые, $[x'_\theta(t, \theta)]^2 + [y'_\theta(t, \theta)]^2 > 0$, представляются рядами по степеням параметра ε того же вида, что и (6), значения θ_1 и θ_2 определяют одну и ту же точку на $\Upsilon(t)$ для каждого $t \geq t_0$, отображение $\Upsilon(t) \leftrightarrow [\theta_1, \theta_2)$ взаимно-однозначное для любого t . Зададим на $\Upsilon(t)$ гладкое поле внутренней нормали $\mathbf{n}(\theta, t)$. Положение ВПС определяется из сшивания решений ((4)) на линии $\Upsilon(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} U^{(-)} \Big|_{\Upsilon(t)} &= U^{(+)} \Big|_{\Upsilon(t)}, & \frac{\partial U^{(-)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Upsilon(t)} &= \frac{\partial U^{(+)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Upsilon(t)}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\varepsilon u'_t + \varepsilon^2 A_1 V_s u'_s + \varepsilon^2 A_2 V_\theta u'_\theta = \kappa \varepsilon^2 (A_{11} u''_{ss} + 2A_{12} u''_{s\theta} + A_{22} u''_{\theta\theta} + B_1 u'_s + B_2 u'_\theta) - f(u, s, \theta), \quad (8)$$

$$A_{11} = (s'_x)^2 + (s'_y)^2, \quad A_{12} = s'_x \theta'_x + s'_y \theta'_y, \quad A_{22} = (\theta'_x)^2 + (\theta'_y)^2, \quad (9)$$

$$B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}, \quad B_2 = \theta''_{xx} + \theta''_{yy}, \quad (10)$$

$V_\theta(s, \theta) = V \sin \alpha$, $V_s(s, \theta) = V \cos \alpha$, $V = (V_x^2 + V_y^2)^{1/2}$, α есть угол между осями Ox и Os в точке (s, θ) . Мы будем указывать координаты (x, y) или (s, θ) в аргументах функций, не указывая каждый раз диффеоморфизм $(x, y) \leftrightarrow (s, \theta)$.

3. УРАВНЕНИЕ РАД В СОПУТСТВУЮЩИХ КООРДИНАТАХ

Пусть семейство кривых $\Upsilon(t)$ уже известно. Пусть $(\hat{s}, \hat{\theta})$ — точка на $\hat{\Upsilon} = \Upsilon(\hat{t})$. Выполним замену

$$s = \hat{s} + \varepsilon \xi, \quad \theta = \hat{\theta} + \eta, \quad t = \hat{t} + \varepsilon \tau. \quad (11)$$

Получим уравнение

$$\begin{aligned} u'_\tau + \varepsilon A_1 V_s u'_\xi + \varepsilon^2 A_2 V_\theta u'_\eta &= \\ &= \kappa (A_{11} u''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} u''_{\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{\eta\eta}) + \varepsilon \kappa B_1 u'_\xi + \\ &+ \varepsilon^2 \kappa B_2 u'_\eta - f(u, \hat{s} + \varepsilon \xi, \hat{\theta} + \eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим в (12) частичную сумму $u(\xi, \eta, \tau, \hat{s}, \hat{\theta}, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^n u_n$. Оставим члены порядка $O(1)$, получим задачу для вычисления функции нулевого порядка $u_0(\xi, \tau)$:

$$\left\{ \begin{aligned} (u_0)'_\tau &= \kappa A_{11} (u_0)''_{\xi\xi} - f(u_0), \\ u_0(-\infty, \tau) &= \varphi_1, \quad u_0(+\infty, \tau) = \varphi_3. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

имеются в виду односторонние производные в точке на $\Upsilon(t)$ соответственно с наружной и внутренней по отношению к $G(t)$ сторонах линии сопряжения.

Пусть $\hat{t} \in [t_0, t_1]$ есть некоторый момент времени, для которого ВПС уже сформирован, текущее положение линии ВПС: $\hat{\Upsilon} = \Upsilon(\hat{t})$, в параметрической форме: $\hat{x}(\theta) = x(\hat{t}, \theta)$, $\hat{y}(\theta) = y(\hat{t}, \theta)$. Понятие сформированного ВПС введем позднее, когда запишем явные выражения разложения нулевого порядка. Рассмотрим уравнение (1) в $\Omega(\hat{\Upsilon})$, т.е. в некотором открытом связном множестве, содержащем $\hat{\Upsilon}$. В каждой точке $(x, y) \in \hat{\Upsilon}$ на линии нормали $\mathbf{n}(\theta, \hat{t})$ введем координату s так, что на нормали $ds^2 = dx^2 + dy^2$, на $\hat{\Upsilon}$ верно $s = \hat{s}$, в направлении \mathbf{n} переменная s возрастает, \hat{s} — некоторая константа, ее значение неважно (например, $\hat{s} = \hat{t}$). Так как якобиан $D(x, y)/D(s, \theta)$ отличен от нуля на $\hat{\Upsilon}$ и есть непрерывная функция от (x, y) , найдется $\Omega(\hat{\Upsilon})$, в которой отображение $(x, y) \leftrightarrow (s, \theta)$ является взаимно однозначным (с учетом периодичности по θ). Координаты θ (вдоль $\Upsilon(t)$) и s (поперек $\Upsilon(t)$) выражаются через (x, y, t) , эти выражения мы далее выпишем. Уравнение (1) запишем в системе координат (s, θ) в виде

Функция u_0 зависит также от \hat{t} , \hat{s} , $\hat{\theta}$, η , ε как от параметров (по ним дифференцирование не производится), здесь и далее эту зависимость подразумеваем, но явно не указываем. Переменные $\hat{\theta}$ и η входят только в виде комбинации $\hat{\theta} + \eta$, имеется также уравнение связи $(\hat{s}, \hat{\theta}) \in \hat{\Upsilon}$. Здесь и далее в этом параграфе $f(u) = f(u, \hat{s}, \hat{\theta} + \eta)$, $\varphi_{1;3} = \varphi_{1;3}(\hat{s}, \hat{\theta} + \eta)$, имеет место диффеоморфизм $(x, y) \leftrightarrow (\hat{s}, \hat{\theta} + \eta)$. Уравнение (13) совпадает с изученным в работе [16] одномерным уравнением РАД, из этой работы мы заимствовали постановку граничных условий, обеспечивающих примыкание решения к равновесным значениям. Последующие члены разложения по степеням ε можно получить из (12), последовательно собирая слагаемые порядка ε , ε^2 и т.д. Частное решение задачи (13) будем искать в виде бегущей квазиволны:

$$u_0(\xi, \tau) = w(\chi), \quad \text{где } \chi = \xi - W_0 \tau. \quad (14)$$

Теорема 1. Для любой точки $(x, y) \in D$ существует единственное значение W_0 , при котором задача (13) имеет решение вида бегущей квазиволны (14). Величина W_0 не зависит от направляющего вектора кривой $\Upsilon(t)$, проходящей через точку (x, y) .

□ Из (13) получим краевую задачу для автономно-

го обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} -W_0 w'_\chi = \kappa A_{11} w''_{\chi\chi} - f(w), \\ w(-\infty) = \varphi_1 + 0, \quad w(+\infty) = \varphi_3 - 0. \end{cases} \quad (15)$$

Операция понижения порядка: $w'_\chi = p(w)$, $w''_{\chi\chi} = pp'_w$ приводит к краевой задаче первого порядка с двумя условиями на $p(w)$, обеспечивающими решение типа КС с одним ВПС, соединяющим уровни φ_1 и φ_3 :

$$\begin{cases} -W_0 p = \kappa A_{11} pp'_w - f(w), \\ p(\varphi_1 + 0) = +0, \quad p(\varphi_3 - 0) = +0, \end{cases} \quad (16)$$

к тому же $p(w) > 0$ при $\varphi_1 < w < \varphi_3$. В [17] показано, что существует единственное значение W_0 , при котором переопределенная задача (16) разрешима, причем решение этой задачи также единственно. Поэтому существует гладкая функция $W_0(\hat{s}, \hat{\theta} + \eta)$ такая, что при её подстановке в (16) существует единственная гладкая функция $p(w)$, для которой верны условия (16). Из явных выражений (9) для коэффициентов уравнения (13) следует, что A_{11} не зависит от направляющего вектора кривой $\Upsilon(t)$, проходящей через точку (x, y) , то же верно и для W_0 . ■

Из У1 следует, что $W_0(x, y)$ есть непрерывно дифференцируемая функция в D , $W_0(x, y) \geq W_{\min} > 0$. Из (15) следует, что значение W_0 можно найти в явной форме, если известен профиль квазиволны $w(\chi)$:

$$W_0(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (w'_\chi)^2 d\chi \right)^{-1} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} f(w, x, y) dw, \quad (17)$$

где $x = x(\hat{t}, \hat{\theta} + \eta)$, $y = y(\hat{t}, \hat{\theta} + \eta)$.

4. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВПС В НУЛЕВОМ ПОРЯДКЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

Пусть векторная функция $\mathbf{r}_0(t, \theta) = (x_0(t, \theta), y_0(t, \theta))$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} = \mathbf{n}(x, y) \cdot W_0(x, y), \quad \mathbf{r}_0(t_0, \theta) = \mathbf{r}_{\text{start}}(\theta), \end{cases} \quad (18)$$

где $\mathbf{r}_{\text{start}}(\theta) = (x_{\text{start}}(\theta), y_{\text{start}}(\theta))$ — точка на Υ_{start} , $W_0(x, y)$ — найденная ранее (17) скорость перемещения линии ВПС $\Upsilon_0(t)$ в направлении нормали

к $\Upsilon_0(t)$ в точке $\mathbf{r}_0(t, \theta)$,

$$\mathbf{n}(x, y) = (y'_\theta, -x'_\theta) [(x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2]^{-1/2}. \quad (19)$$

Задача (18) есть начально–краевая задача для системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Из У1–У4 следует [18], что задача (18) разрешима на некотором промежутке $t \in [t_0, t_1)$, $t_1 > t_0$. При $t \rightarrow t_1 - 0$ величина $\sup_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} [(x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2] \rightarrow +\infty$ в (18) (если бы это было не так, то решение можно было бы продолжить далее до некоторого $t_1 + \Delta t$). Кривую $C_0(\hat{t}_0, \hat{t}_1, \theta) = \{(x_0(t, \theta), y_0(t, \theta))\}$, $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1)$, будем называть траекторией точки ВПС нулевого порядка. Назовем временем пробега траектории функцию

$$T_0(\hat{t}_0, \hat{t}_1, \theta) = \hat{t}_1 - \hat{t}_0 = \int_{C_0(\hat{t}_0, \hat{t}_1, \theta)} W_0^{-1}(x_0(t), y_0(t)) dl. \quad (20)$$

Кривую $\Upsilon_0(t) = \{\mathbf{r}_0(t, \theta)\}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2)$, назовем линией ВПС нулевого порядка. Из (18) следует, что θ -параметризованное семейство траекторий $\{C_0(t_0, t_1, \theta)\}$ в каждой своей точке ортогонально t -параметризованному семейству $\{\Upsilon_0(t)\}$ линий ВПС.

5. ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Найдем функции $W_0(x, y)$ и $w(\xi, x, y)$ из (15), затем семейства $\Upsilon_0(t)$, $C_0(\theta)$ из (18). Для заданных x, y, t найдем $\theta = \theta(x, y)$ такое, что $C_0(\theta)$ проходит через точку (x, y) . Функция $\theta(x, y)$ существует и определяется единственным образом для $t \in [t_0, t_1)$. Так как семейство $\{C_0(\theta)\}$ θ -параметризовано, а каждая кривая этого семейства $C_0(\theta(x, y))$ t -параметризована, одновременно найдем функцию $T_0(x, y)$, определяющую момент времени прохождения линии ВПС нулевого порядка через точку (x, y) . Затем найдем $(x^*, y^*) = \mathbf{r}_0(t, \theta)$, это точка пересечения $C_0(\theta)$ и $\Upsilon_0(t)$. Найдем растянутую переменную вдоль траектории ξ . Функция переходного слоя нулевого порядка определяется следующим образом:

$$\begin{cases} Q_0^{(+)}(x, y, t) = w(\xi - W_0\tau, \hat{s}, \hat{\theta} + \eta) - \varphi_3(x, y) & \text{при } (x, y) \in G_0(t), \\ Q_0^{(-)}(x, y, t) = w(\xi - W_0\tau, \hat{s}, \hat{\theta} + \eta) - \varphi_1(x, y) + \Pi_0 & \text{при } (x, y) \notin G_0(t), \end{cases} \quad (21)$$

с учетом диффеоморфизма $(x, y, t) \leftrightarrow (\hat{s}, \hat{\theta} + \eta)$ и замены $(s, \theta) \leftrightarrow (\xi, \eta)$. Функция нулевого порядка строится относительно точки (x^*, y^*) на линии фронта, в которой в данный момент времени t находится траектория. Не зависящее от времени по-

гранично–слоиное слагаемое Π_0 , описывающее поведение решения вблизи границы D , в настоящей работе не вычисляем. Для одномерной задачи определенная таким образом функция переходного слоя совпадала бы с определенной в [17].

6. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

Задача (18) есть задача Коши для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, существование решения на некотором промежутке времени ненулевой протяженности доказано в [18], гл.2. Сформулируем равносильную задачу для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, зависящих от параметра. Используя для доказательства теорию Гамильтона–Якоби [19], мы покажем, что законы эволюции ВПС совпадают с законами распространения волнового фронта [20] вплоть до момента появления первой особой точки. Для того, чтобы не входить в проблемы, связанные с возможной ситуацией, в которой точки самоналожения на $\Upsilon_0(t)$ появятся раньше, чем кривизна $\Upsilon_0(t)$ станет неограниченной, добавим ещё одно условие:

У5. Пусть Υ_{start} есть замкнутая выпуклая гладкая кривая, заданная в параметрической форме: $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}_{\text{start}}(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mathbf{r}_{\text{start}}(\theta) = (x_{\text{start}}(\theta), y_{\text{start}}(\theta))$ — дважды непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом $\Theta = \theta_2 - \theta_1$, θ_1 и θ_2 определяют одну и ту же точку на Υ_{start} , $[(x_{\text{start}})'_{\theta}]^2 + [(y_{\text{start}})'_{\theta}]^2 > 0$.

Заметим, что (У5) для однородной среды гарантирует отсутствие самопересечений и самоналожений на всем времени существования пятна КС.

Теорема 2. Пусть выполнены условия У1–У5. Тогда найдется промежуток $t \in [t_0, t_1)$, $t_1 > t_0$, такой, что

(1) семейство задач Коши (18) однозначно разрешимо на $[t_0, t_1)$, при каждом θ кривая $C_0(\theta)$ гладкая, (2) при каждом $t \in [t_0, t_1)$ функция $\mathbf{r}_0(t, \theta)|_{t=\text{const}} = (x_0(t, \theta), y_0(t, \theta))|_{t=\text{const}}$ гладкая периодическая, кривая $\Upsilon_0(t)$ гладкая, без особых точек, замкнутая. (3) В некоторой окрестности кривой $\Upsilon_0(t)$ отображение $(t, \theta) \leftrightarrow (x, y)$ является диффеоморфизмом. (4) Для случая однородной среды $W_0 = \text{const}$, значение t_1 равно

$$t_1 = t_0 + \frac{R_{\min}}{W_0}, \quad (22)$$

R_{\min} есть наименьшее значение радиуса кривизны линии Υ_{start} в начальный момент времени.

□ Определим функцию Гамильтона для уравнения эйконала:

$$(\nabla S)^2 = W_0^{-2}(x, y), \quad (23)$$

где $H(x, y, p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 - W_0^{-2}(x, y)$. Запишем семейство задач Коши для системы уравнений Гамильтона [19]:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = 2p_1, & \frac{d\tilde{y}}{dt} = 2p_2, \\ \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial W_0^{-2}}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), & \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial W_0^{-2}}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \quad (24)$$

с начальными условиями, параметризованными параметром θ :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_0, \theta) &= \tilde{x}_{\text{start}}(\theta), & \tilde{y}(t_0, \theta) &= \tilde{y}_{\text{start}}(\theta), \\ p_1(t_0) &= p_{1.\text{start}}(\theta), & p_2(t_0) &= p_{2.\text{start}}(\theta), \end{aligned} \quad (25)$$

$\tilde{x}_{\text{start}}(\theta) = x_{\text{start}}(\theta)$, $\tilde{y}_{\text{start}}(\theta) = y_{\text{start}}(\theta)$, здесь можно выбрать также любую другую параметризацию кривой Υ_{start} . Векторную функцию $\mathbf{p}_{\text{start}}(\theta) = (p_{1.\text{start}}(\theta), p_{2.\text{start}}(\theta))$ находим как гладкое (с учетом периодичности по θ) решение системы уравнений

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}_{\text{start}}(\theta), \tilde{y}_{\text{start}}(\theta), p_{1.\text{start}}(\theta), p_{2.\text{start}}(\theta))|_{\Upsilon_{\text{start}}} &= 0, \\ (\mathbf{p}_{\text{start}}(\theta), \mathbf{l}_{\text{start}}(\theta)) &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$\mathbf{l}_{\text{start}}(\theta)$ — касательный вектор к Υ_{start} , ортогональный $\mathbf{n}(\theta)$, $\mathbf{n}(\theta)$ — гладкое поле нормали. Направление вектора $\mathbf{p}(\theta)$ (одно из двух решений квадратного уравнения (26)) выбираем так, что этот вектор и вектор внутренней нормали $\mathbf{n}_{\text{start}}(\theta)$ к Υ_{start} были сонаправлены.

Решения системы (24) называют бихарактеристиками, проекцию бихарактеристики из пространства $\mathbb{R}^4: \{(\tilde{x}, \tilde{y}, p_1, p_2)\}$ в пространство $\mathbb{R}^2: \{(\tilde{x}, \tilde{y})\}$ называют лучом. Обозначим $\mathcal{L}(\theta) = \{\tilde{x}(t, \theta), \tilde{y}(t, \theta)\}$, $t \in [t_0, t^*)$ — луч, исходящий из точки $(\tilde{x}_{\text{start}}(\theta), \tilde{y}_{\text{start}}(\theta))$. Значение $t^*(\theta)$ определяется только тем, в какой момент луч выходит на границу области, в которой определена ФПИ. Зададим начальные условия для эйконала в виде $S(x, y)|_{\Upsilon_{\text{start}}} = 0$ (или любая другая константа). Эйконал найдем в явном виде [19]:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= S|_{\Upsilon_{\text{start}}} + \int_{\mathcal{L}(t_0, t, \theta)} \langle p, dx \rangle = \\ &= S_0 + \int_{\mathcal{L}(t_0, t, \theta)} W_0^{-1}(x, y) dl, \end{aligned} \quad (27)$$

причем точку на Υ_{start} и значение $t(x, y)$ следует выбрать так, чтобы $\mathcal{L}(t_0, t, \theta)$ — часть луча $\mathcal{L}(\theta)$, начинающегося в точке на Υ_{start} , для момента t оканчивалась в точке с координатами (x, y) . Семейство линий равной величины эйконала обозначим $\{\tilde{\Upsilon}(t)\}$. Далее будем называть две параметрически заданные кривые $\Upsilon(t)$ и $\tilde{\Upsilon}(t)$ совпадающими, если существует гладкая замена параметризации $\theta \leftrightarrow \tilde{\theta}$, после выполнения которой кривые совпадают как множества точек на плоскости. В [19] (и множестве других работ) показано, что в наших обозначениях (1) семейство кривых $\{\Upsilon_0(t)\}$ совпадает с семейством $\{\tilde{\Upsilon}(t)\}$. (2) На лучах выполнены уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = W_0(x, y)\nabla S, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = W_0^2(x, y)\nabla S, \quad (28)$$

так как $\frac{d}{ds} = \frac{1}{W_0} \frac{d}{dt}$. Время существования гладкой линии ВПС нулевого порядка определяется временем достижения волновым фронтом ближайшей

точки сборки [21]. Для однородной среды таковая находится на эволюте Υ_{start} , откуда следует (22). ■

Теорема 3. Функция $T(x, y)$, найденная из (20), удовлетворяет уравнению эйконала (23) (с учетом диффеоморфизма $(t, \theta) \leftrightarrow (x, y)$).

□ Следует из (18), (20) и (27), (28). ■

Из теорем 1–3 следует, что линии ВПС нулевого порядка совпадают с линиями константного эйконала в задаче Гюйгенса–Френеля [23]. В отличие от [11] и множества аналогичных прикладных работ, мы нашли скорость ВПС непосредственно из уравнения РАД методом разложения в ряд по степеням малого параметра, не привлекая уравнений состояния реагирующей среды.

$$f(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \hat{\theta} + \eta) = f'_\theta(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta}) \cdot \eta + f''_{\theta u}(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta} + \nu \eta) \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot u_1 + f''_{\theta s}(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta} + \nu \eta) \cdot \eta \cdot \varepsilon \cdot \xi + \varepsilon f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta}) \cdot u_1 + \varepsilon f'_s(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta}) \cdot \xi + f(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta}), \quad (31)$$

где $\nu \in (0; 1)$. Из определения кривой $\hat{\Upsilon}$ следует, что $f'_\theta(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}), \hat{s}, \hat{\theta}) = 0$.

Профиль и скорость квазиволны первого порядка найдем из (30) и (31), положив $\eta = 0$:

$$\begin{cases} -W_0(u_1)'_\xi - \kappa A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta})) \cdot u_1 = \\ = \tilde{W}_1(u_0)'_\xi + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}, \\ u_1(-\infty) = 0, \quad u_1(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\tilde{W}_1 = W_1 - V_s + \kappa B_1, \quad (33)$$

$B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}$. Задача (32) есть линейная краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями, причем соответствующая однородная краевая задача

$$-W_0 v'_\xi - \kappa A_{11} v''_{\xi\xi} + f'_u(u_0(\xi)) \cdot v = 0, \quad v(\pm\infty) = 0, \quad (34)$$

имеет нетривиальное решение $v = (u_0)'_\xi$. Поэтому задача (32) разрешима при условии ортогональности правой части всем частным решениям однородной задачи (в данном случае пространство решений однородной задачи — одномерное):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_\xi \cdot (\tilde{W}_1(u_0)'_\xi + 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}) d\xi = 0, \quad (35)$$

найдем отсюда

$$\tilde{W}_1 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [(u_0)'_\xi]^2 d\xi \right]^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0)'_\xi \cdot 2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta} d\xi. \quad (36)$$

7. СУММА ПЕРВОГО ПОРЯДКА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

Пусть $\hat{t} \in (t_0, t_1)$. Найдем частичную сумму асимптотического ряда первого порядка:

$$u(\xi, \eta, t) = u_0(\xi, \eta, t) + \varepsilon u_1(\xi, \eta, t), \quad W = W_0 + \varepsilon W_1. \quad (29)$$

Соберем в (12) слагаемые первого порядка относительно ε :

$$(u_0)'_\tau + \varepsilon(u_1)'_\tau + \varepsilon V_s(u_0)'_\xi = \kappa (A_{11}(u_0)''_{\xi\xi} + \varepsilon A_{11}(u_1)''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}) + \varepsilon \kappa B_1(u_0)'_\xi - f(u_0(\xi, \hat{s}, \hat{\theta}) + \varepsilon u_1, \hat{s} + \varepsilon \xi, \hat{\theta} + \eta). \quad (30)$$

Выражение ФПИ в точке, сдвинутой относительно точки на линии $\hat{\Upsilon}$, требует внимания:

В работе [3] (и в указанных там публикациях) детально описан другой алгоритм вычисления \tilde{W}_1 , основанный на построении решения уравнения (32) на двух полупрямых: $D^{(-)} = (-\infty, \xi_0]$ и $D^{(+)} = [\xi_0, +\infty)$, где ξ_0 есть единственное решение уравнения $u_0(\xi) = \varphi_2$, и последующего гладкого сшивания в точке ξ_0 . Найденное из условия сшивания значение \tilde{W}_1 в точности совпадает с (36). Теперь найдем из (33) скорость дрейфа первого порядка:

$$\tilde{W} = \tilde{W}_1 + V_s - \kappa B_1, \quad (37)$$

которая складывается из (1) компоненты скорости адвекции V_s , направленной перпендикулярно линии ВПС, (2) скорости дрейфа кривизны κB_1 , (3) скорости градиентного дрейфа \tilde{W}_1 , найденной из (36).

8. ОБОСНОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Для обоснования корректности полученных уравнений нулевого и первого порядков асимптотического ряда мы используем метод дифференциальных неравенств [1], применение которого для задач РАД детально описано в [3]. Так как уравнение (32) отличается от рассмотренного в этой работе уравнения первого приближения только наличием дополнительного слагаемого градиентного дрейфа $2\kappa A_{12}(u_0)''_{\xi\eta}$, обоснование принципиально не отличается и в настоящей работе не приводится.

9. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

9.1. Методика численного моделирования

Приводимые далее результаты компьютерного моделирования уравнения (1) получены для области $x \in [-4; 4]$, $y \in [-4; 4]$, $t \in [0; 8]$, $\varepsilon = 2^{-4}$, функция плотности источников $f(u, x, y) = \gamma \cdot (u - \varphi_1(x, y))(u - \varphi_2(x, y))(u - \varphi_3(x, y))$, $\gamma = 3,5$, $\varphi_1 = -1$, $\varphi_2 = 0,12$, $\varphi_3 = 1$.

Задача РАД решалась методом полной дискретизации на прямоугольной сетке из $(N_x \times N_y \times N_t) = (2^{10} \times 2^{10} \times 2^{14})$ ячеек. Система нелинейных уравнений для сеточной функции решалась итерационным методом, детали и метод решения дискретной модели описаны в [24].

9.2. Прямолинейный фронт в однородной среде

Пусть $W_0(x, y) = \text{const}$, $\mathbf{V}(x, y) = (V_x, V_y) = \text{const}$, стартовая линия ВПС — прямая: $x_{\text{start}}(\theta) = \theta \cos \alpha$, $y_{\text{start}}(\theta) = \theta \sin \alpha$. Тогда из (37) следует: $W_1 = V_x \sin \alpha - V_y \cos \alpha$, линия ВПС определяется явно:

$$\begin{aligned} x(t, \theta) &= \theta \cos \alpha + t \cdot (W_0 + \varepsilon W_1) \sin \alpha, \\ y(t, \theta) &= \theta \sin \alpha - t \cdot (W_0 + \varepsilon W_1) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (38)$$

В однородной среде точное решение уравнения РАД даётся формулой $u_0(\xi, \eta, \tau) = w(\xi - W\tau)$, причём W и $w(\chi)$ вычисляются из (16), (17), (29), (33). Прямолинейный фронт КС перемещается без деформации с постоянной скоростью. Мы приведем результат компьютерного моделирования для начальной конфигурации пятна КС в форме остроугольного треугольника и $\varepsilon = 2^{-4}$. Непосредственно применить (38) невозможно, так как прямолинейный отрезок имеет конечную длину. Для угла (двух лучей) уравнения эволюции первого порядка с учетом кривизны линии КС (37) решаются в явном виде, в области пересечения под углом прямолинейных участков образуется сглаженная линия сопряжения, аналитическое решение в первом порядке асимптотического ряда выходит за рамки настоящей работы. Приведем только результат компьютерной модели. На рис. 1, а показано семейство карт функции $u(x, y, t_j^*)$ для нескольких значений t_j^* , представляющих основные этапы формирования и разрушения пятна КС треугольной начальной формы. Карты совмещены на одном чертеже (это возможно, так как линии $\Upsilon(t_j^*)$ не пересекаются).

9.3. Круговой однородный фронт

Пусть $W(x, y) = W(r)$, скорость адвекции также аксиально симметрична: $\mathbf{V}(x, y) = -V(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, стартовая кривая задана в виде окружности: $x_{\text{start}}(\theta) = R_{\text{start}} \cos \theta$, $y_{\text{start}}(\theta) = R_{\text{start}} \sin \theta$,

$\theta \in [0; 2\pi]$. Выберем внутреннюю нормаль к Υ_{start} , направление скорости дрейфа дисбаланса в сторону внутренней нормали. Тогда в любом порядке асимптотического ряда линия ВПС — окружность $x(t, \theta) = R(t) \cos \theta$, $y(t, \theta) = R(t) \sin \theta$, $R(t) = R_0(t) + \varepsilon R_1(t) + \dots$. Главный член найдем из задачи Коши $(R_0)'_t = -W_0(R)$, $R_0(t_0) = R_{\text{start}}$. В первом порядке положение линии ВПС найдем из задачи Коши $(R_1)'_t = -V(R_0(t)) - \frac{\kappa}{R_0(t)}$, $R_1(t_0) = 0$.

9.4. Гладкий фронт в среде без адвекции

Опишем процесс разрушения пятна КС для случая, когда стартовая кривая Υ_{start} выпуклая, имеет две ортогональные оси симметрии, между которыми радиус кривизны меняется монотонно от минимального значения R_{min} в точках $\theta_{1,3}$ до максимального R_{max} в точках $\theta_{2,4}$. Пусть диаметр кривой Υ_{start} (измеряемый между двумя точками $\theta_{2,4}$ с максимальным радиусом кривизны) в начальный момент времени равен D_{min} , в точках $\theta_{1,3}$ функция $R(\theta)$ имеет морсовский [21] минимум (например, такая кривая — эллипс), и $W = \text{const}$. В момент времени $t_{\text{min}} = \frac{R_{\text{min}}}{W}$ на линии ВПС образуются две точки сборки [22], после этого линия ВПС нулевого порядка имеет самопересечение и некорректна. Однако можно склеить две дуги $\Upsilon_0(t)$ между точками излома и получить замкнутую выпуклую кусочно-гладкую кривую, корректно описывающую положение ВПС.

Точки излома линии ВПС нулевого порядка сближаются и совмещаются в момент времени $t_{\text{max}} = \frac{D_{\text{min}}}{2W}$, пятно КС превращается в точку (разрушается) в момент $t < t_{\text{max}}$. Время существования пятна КС меньше t_{max} и стремится к $t_{\text{max}} - 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Для невыпуклой области точка самокасания $\Upsilon_0(t)$ может появиться раньше точки сборки, в результате чего пятно КС разделится на несколько изолированных пятен. Процесс финального разрушения пятна в рамках асимптотической модели не описывается. Строгое обоснование нескольких сформулированных в этом абзаце утверждений выходит за рамки настоящей работы.

9.5. Пятно КС в виде эллипса

Приведем пример численного моделирования уравнения РАД для стартовой конфигурации пятна КС в виде эллипса: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \leq a_0^2$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0.75$ в области $x \in [-4; 4]$, $y \in [-4; 4]$. На рис. 1, б показана карта линий равного уровня $u(x, y, t_j^*)$ для нескольких моментов времени t_j^* , в том числе для момента времени t^* , когда на линии ВПС нулевого порядка образовались две особые точки. График является гладким из-за влияния функции переходного слоя первого порядка, обеспечивающей конечный радиус кривизны ВПС

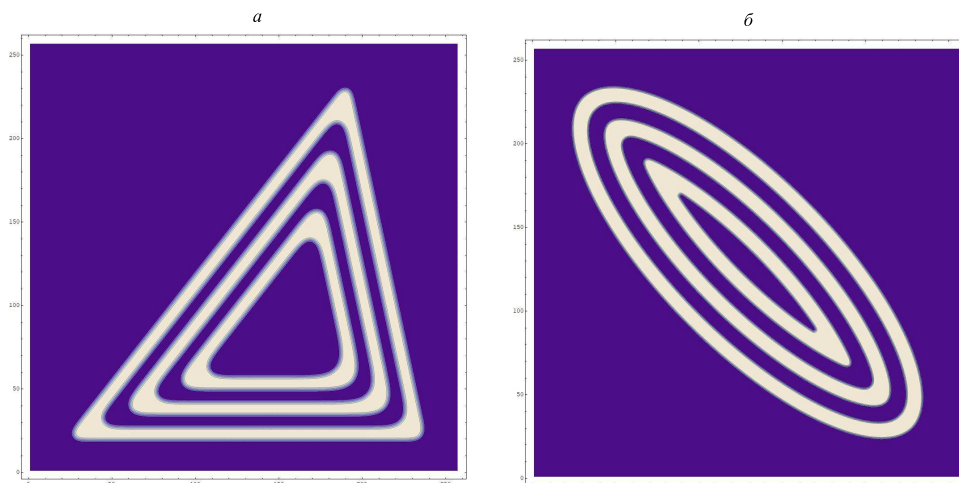


Рис. 1. *a* — Семейство карт функции $u(x, y, t_j^*)$ для нескольких моментов времени, стартовая линия ВПС — остроугольный треугольник. *б* — Семейство карт функции $u(x, y, t_j^*)$ для эллиптического пятна КС на старте

порядка ϵ .

Автор выражает благодарность профессору Н. Н. Нефедову за обсуждение работы.

-
- [1] Pao C.V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York: Plenum, 1992.
- [2] Fife P.C., Hsiao L. // *Nonlin. Anal. Theory Methods Appl.* **12**, N 1. 19 (1998).
- [3] Нефедов Н.Н. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **61**, № 12. 2074 (2021).
- [4] Бутузов В.Ф. // *Дифференциальные уравнения.* **51**, № 12. 1593 (2015).
- [5] Быков А.А., Ермакова К.Е. // *Математическое моделирование.* **31**, № 9. 101. (2019).
- [6] Давыдова М.А., Захарова С.А. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **56**, № 7. 849 (2020).
- [7] Davydova M.A. // *Math. Notes.* **98**, N 6. 45 (2015).
- [8] Быков А.А., Воеводин В.В., Козырева О.В. et al. // *Докл. АН СССР.* **364**, № 3. 319 (1999).
- [9] Быков А.А., Воеводин В.В., Попов В.Ю., Соколов Д.Д. и др. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **39**, N 5. 801 (1999).
- [10] Быков А.А., Майков А.Р., Попов В.Ю. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **47**, № 1. 64 (2007).
- [11] Доррер Г.А. // *Динамика лесных пожаров*. Новосибирск: изд-во Сиб. отделения РАН, 2008.
- [12] Тихонов А.Н. // *Матем. сборник.* **22(64)**, № 2. 193 (1948).
- [13] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. // *Фунд. прикл. матем.* **4**, № 3. 799 (1998).
- [14] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. // *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*. М.: Высшая школа, 1990.
- [15] Михлин С.Г. // *Линейные уравнения в частных производных*. М.: Высшая школа, 1977.
- [16] Нефедов Н.Н. // *Математическое моделирование.* **4**, N 8. 58 (1992).
- [17] Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **50**, № 2. 276 (2010).
- [18] Гюнтер Н.М. // *Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных*. Л., ОНТИ, 1934.
- [19] Вайнберг Б.Р. // *Асимптотические методы в уравнениях математической физики*, М.: изд-во МГУ, 1982.
- [20] Бабич В.М., Булдырев В.С. // *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М.: Наука, 1972.
- [21] Арнольд В.И. // *Теория катастроф*. М.: Наука, 1990.
- [22] Постон Т., Стюарт И. // *Теория катастроф и ее приложения*. Мир, 1979.
- [23] Борн М., Вольф Э. // *Основы оптики*. М.: Наука, 1973.
- [24] Быков А.А. // *Моделирование и анализ информационных систем*. Изд-во Яросл. гос. ун-та (Ярославль). **23**, № 3. 259 (2016).

Two-dimensional transient contrasting structure evolution in an inhomogeneous media with the advection

A. A. Bykov

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: abykovmsu@mail.ru

The inner transition layer evolution for two-dimensional quasi-linear initial-boundary value problem for the reaction-advection-diffusion equation in an inhomogeneous media with a small parameter within the high

order derivatives is considered. Within the framework of the main (zero order) sum of the asymptotic series, the position of the inner transition layer is described by the Hamilton–Jacobi equation. The potential is calculated as an integrated density function of the reaction sources within the limits of the equilibrium levels. The front line of the transition layer evolves in the same way as the constant-eikonal line (the wavefront line in the other words) for the problem of wave propagation in an inhomogeneous medium in short-wave (geometro-optical) asymptotics. The sum of the asymptotic series of zero order and first order is found, the existence gap of a smooth front line, the time of destruction of the contrasting structure are calculated.

PACS: 02.60.Lj.

Keywords: nonlinear differential equations, asymptotics methods.

Received 25 January 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 2. Pp. .

Сведения об авторе

Быков Алексей Александрович — доктор физ.-мат. наук, профессор, тел.: (495) 939-1351,
e-mail: abykovmsu@mail.ru.