ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Устойчивость стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума относительно квантовых поправок

И. П. Волобуев,[1,*] С. И. Кейзеров,[1] Э. Р. Рахметов[1,†]

[1]*Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (НИИЯФ МГУ) Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 08.02.2024; после доработки 18.02.2024; подписана в печать 20.02.2024)

В модели Рэндалл–Сундрума, стабилизированной с помощью скалярного поля Гольдбергера–Вайза, вычислены низшие вакуумные квантовые поправки к тензору энергии-импульса скалярных и тензорных полей. Показано, что отвечающая им вакуумная плотность энергии полей в пространстве между бранами приводит к эффекту Казимира. С помощью метода размерной регуляризации и формулы Абеля–Плана выделены расходимости и проведена перенормировка вакуумной плотности энергии, получено аналитическое выражение для силы Казимира и сделана оценка ее влияния на параметры модели. Найдено, что такие квантовые поправки приводят только к пренебрежимо малому уменьшению расстояния между бранами, т.е. модель оказывается устойчивой относительно вакуумных квантовых поправок.

PACS: 04.50.+h. УДК: 531.269, 531.51.
Ключевые слова: модель Рэндалла–Сундрума стабилизированная, эффект Казимира.

10.55959/MSU0579-9392.79.2420103

ВВЕДЕНИЕ

Модели мира на бране и их феноменология широко обсуждаются в физической литературе. Одной из наиболее известных и интересных моделей мира на бране является модель Рэндалла–Сундрума с двумя бранами [1]. В этой модели (далее RS-модель) пятимерное пространство-время имеет структуру прямого произведения четырехмерного пространства Минковского M^4 и орбифолда S^1/Z_2, в неподвижных точках которого расположены так называемые браны – четырехмерные гиперплоскости с метрикой Минковского, обладающие собственным натяжением, различным на каждой бране. Предполагается, что на одной из двух бран локализованы поля Стандартной модели, а в пространстве между бранами — балке — распространяются только гравитационное поле и пятимерное скалярное поле Гольдбергера–Вайза, необходимое для стабилизации расстояния между бранами [2]. Это поле обладает потенциалами самодействия во всем пятимерном пространстве и на бранах, которые обеспечивают минимум энергии некоторой конфигурации классического поля при определенном расстоянии между бранами и тем самым приводят к его стабилизации. Такая модель называется стабилизированной RS-моделью. Она решает проблему иерархии благодаря присутствию в метрике конформного фактора и допускает интересную новую физику в ТэВном диапазоне энергий.

В моделях с двумя бранами квантовые поля, распространяющиеся в пятимерном пространстве–времени между ними, приводят к появлению эффекта Казимира. В фоновом решении как рассматриваемой в работе стабилизированной, так и нестабилизированной RS-модели браны параллельны, и в такой геометрии этот эффект в нестабилизированной RS-модели рассматривался для скалярных, спинорных и векторных полей в работах [3–13], и в некоторых случаях с его помощью достигалась стабилизация размера дополнительного измерения и генерация космологической постоянной.

В большинстве работ по этой тематике в качестве физической характеристики фонового состояния бралась энергия Казимира, которая вычислялась с использованием различных схем регуляризации. Более детальную информацию о свойства фонового состояния могут давать локальные наблюдаемые, такие как, например, тензор энергии-импульса. Особое значение имеет его вакуумное среднее, поскольку оно также является источником гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна с квантовыми поправками. Вакуумное среднее тензора энергии-импульса для скалярных, спинорных и электромагнитного полей в нестабилизированной RS-модели рассматривалось в работах [14–22].

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос об устойчивости фонового решения для метрики и скалярного поля Гольдбергера–Вайза относительно низших вакуумных квантовых поправок. Постановка такого вопроса связана с наблюдением, что если эффект Казимира может приводить к стабилизации расстояния между бранами в нестабилизированной RS-модели, то не исключено, что он может существенно влиять и на фоновое решение стабили-

* E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru
† E-mail: rahmetov@theory.sinp.msu.ru

зированной модели. Для этого мы вычислим квантовую поправку к тензору энергии-импульса (ТЭИ) модели за счет вакуумной энергии калуца-клейновской башни скалярного поля радиона и покажем, что, во-первых, данный вклад мал по сравнению с величиной ТЭИ классического фонового поля, а во-вторых, что он не меняет форму решения RS-модели, лишь незначительно изменяя некоторые ее параметры.

1. УРАВНЕНИЯ RS-МОДЕЛИ С КВАНТОВЫМИ ПОПРАВКАМИ

Пятимерное действие для RS-модели может быть записано в следующей форме [23]:

$$S = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \int\limits_{M^4}\int\limits_{-L}^{L}\left(-\frac{1}{2\kappa^2}R + \frac{1}{2}g^{PQ}\partial_P\phi\partial_Q\phi - V(\phi)\right)\sqrt{-g}d^5x, \tag{1}$$

$$S_2 = -\int\limits_{M^4}\int\limits_{-L}^{L}\left[\lambda_1(\phi)\delta(y) + \lambda_2(\phi)\delta(y-L)\right]\sqrt{-\tilde{g}}d^5x,$$

где $\tilde{g}$ — индуцированная на бранах метрика, V — пятимерный потенциал поля Гольдбергера–Вайза, а λ_1, λ_2 — потенциалы этого поля на бранах. Заметим, что в отличие от многих статей по рассматриваемой тематике (см., например, [23]) в настоящей работе используется сигнатура метрики $(+----)$.

Из действия (1) получаются следующие уравнения движения:

$$-\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{AB}} = G_{AB} - \kappa^2 T_{AB} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta\phi} = \Box\phi - \frac{dV}{d\phi} - \left[\frac{d\lambda_1}{d\phi}\delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi}\delta(y-L)\right] = 0, \tag{3}$$

где G_{AB} есть пятимерный тензор Эйнштейна

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB}, \tag{4}$$

а T_{AB} — тензор энергии-импульса скалярного поля, определяемый следующим образом:

$$T_{AB} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{AB}} = \partial_A\phi\partial_B\phi - g_{AB}\left(\frac{1}{2}g^{PQ}\partial_P\phi\partial_Q\phi - V(\phi)\right) + \Big[\lambda_1(\phi)\delta(y) + \lambda_2(\phi)\delta(y-L)\Big]g_{\mu\nu}\delta^\mu_A\delta^\nu_B. \tag{5}$$

Уравнения движения (2)–(3) допускают решение вида $e^{-2A(y)}\eta_{\alpha\beta}$, где $\eta_{\alpha\beta}$ – метрический тензор Минковского, а $e^{-2A(y)}$ – так называемый конформный фактор, благодаря которому наблюдаемое четырехмерное гравитационное взаимодействие на бране в точке $y = L$ экспоненциально подавлено по сравнению с пятимерным. Таким образом, в данной модели успешно решается «проблема иерархии», заключающаяся в несопоставимости энергетического масштаба Стандартной модели (условно – 100 ГэВ) и энергетического масштаба четырехмерной гравитации (массы Планка, 10^{19} ГэВ).

В работе [23] показано, что фоновые решения уравнений (2), (3) с тензором энергии-импульса (5) следует искать в виде

$$g_{\mu\nu}(y) \equiv \gamma_{\mu\nu}(y) = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad g_{4\mu} = 0, \quad g_{44} = -1, \quad \phi(x,y) = \phi(y). \tag{6}$$

В этом случае для функций $A(y), \phi(y)$ получаются следующие уравнения:

$$\frac{dV}{d\phi} + \frac{d\lambda_1}{d\phi}\delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi}\delta(y-L) = -4A'\phi' + \phi'', \tag{7}$$

$$12M^3(A')^2 + \frac{1}{2}(V - \frac{1}{2}(\phi')^2) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V + \lambda_1\delta(y) + \lambda_2\delta(y-L)\right) = -2M^3\left(-3A'' + 6(A')^2\right), \tag{9}$$

в которых используется обозначение $' = \partial_4 \equiv \partial/\partial y$. В [23] также показано, что при определенном выборе потенциалов фоновые решения для функций $A(y), \phi(y)$ имеют вид

$$\phi = \varphi(y) = \varphi_0 e^{-2u|y|}, \tag{10}$$

$$A(y) = k|y|_Z + \frac{\varphi_0^2}{48M^3}e^{-2u|y|} - \left(kL + \frac{\varphi_0^2}{48M^3}e^{-2uL}\right) \approx \tilde{k}|y| - \tilde{k}L, \quad \tilde{k} = k - \frac{\varphi_0^2 u}{48M^3}, \tag{11}$$

где $M \equiv 1/\sqrt[3]{2\kappa^2}$ — пятимерный фундаментальный энергетический масштаб («пятимерная масса Планка») порядка 5 ТэВ, φ_0, k и u – константы, выражающиеся через параметры потенциалов скалярного поля, и предполагается, что $uL \ll 1$.

Для полей g_{AB} и ϕ мы можем записать разложение на фоновые решения $\bar{g}_{AB}$ и $\bar{\phi}$, удовлетворяющие уравнениям движения (2)–(3), и малые флуктуации $\hat{g}_{AB}$ и $\hat{\phi}$ над этими фоновыми решениями:

$$g_{AB} = \bar{g}_{AB} + \hat{g}_{AB}, \quad \phi = \bar{\phi} + \hat{\phi}. \tag{12}$$

Далее мы будем квантовать малые флуктуации $\hat{g}_{AB}$ и $\hat{\phi}$ над классическим фоном $\bar{g}_{AB}$ и $\bar{\phi}$. Усредняя разложения полей (12) по вакууму и учитывая, что в силу свойств операторов рождения и уничтожения вакуумные средние для малых флуктуаций равны нулю, $\langle\hat{g}_{AB}\rangle = 0$ и $\left\langle\hat{\phi}\right\rangle = 0$, получим, что $\langle g_{AB}\rangle = \bar{g}_{AB}$ и $\langle\phi\rangle = \bar{\phi}$.

При усреднении по вакууму для уравнения движения (2) получаем

$$\langle G_{AB}\rangle + \kappa^2 \langle T_{AB}\rangle = 0. \tag{13}$$

Это уравнение можно переписать в виде суммы классической части и квантовой поправки к ней, учитывая разложение полей в форме (12)

$$\bar{G}_{AB} + \kappa^2 \bar{T}_{AB} = -\left\langle \hat{G}_{AB}\right\rangle - \kappa^2 \left\langle \hat{T}_{AB}\right\rangle, \tag{14}$$

где тензоры $\bar{G}_{AB}$ и $\bar{T}_{AB}$ имеют тот же самый вид, что и в формулах (4) и (5), только при этом в выражении (14) полевые функции g_{AB} и ϕ заменены их вакуумными средними $\bar{\phi}$ и $\bar{g}_{AB}$.

Операторные выражения $\hat{G}_{AB}$ и $\hat{T}_{AB}$ составлены из полевых мод, на которые разлагаются квантованные поля $\hat{g}_{AB}$ и $\hat{\phi}$, рассматриваемые как малые флуктуации над классическим фоном $\bar{g}_{AB}$, $\bar{\phi}$. Отличие от чисто классической теории состоит в том, что амплитуды полученных мод теперь являются операторами. Кроме того, в отличие от классического уравнения движения (2) правая часть выражения (14) может быть не равной нулю. Последнее обстоятельство приводит фактически к тому, что теперь мы вынуждены решать самосогласованную задачу, так как фоновые значения теперь должны вычисляться с учетом квантовых поправок, которые зависят от спектра квантовых мод, появляющихся на данном фоне.

Еще одна особенность уравнения (14) состоит в том, что из физических степеней свободы в нем присутствуют как тензорные моды $b_{\mu\nu}$, так и скалярные моды φ. Отметим, что физических векторных мод в рассматриваемой теории нет [23]. Скалярные моды присутствуют как в разложении по модам поля $\hat{\phi}$, так и в разложении поля $\hat{g}_{AB}$, поэтому даже в низшем приближении первое слагаемое $\left\langle \hat{G}_{AB}\right\rangle$ в правой части (14) также зависит от скалярных мод (тензорная мода тоже присутствует в $\hat{T}_{AB}$, но поскольку в низшем приближении она входит линейно, то $\left\langle \hat{T}_{AB}\right\rangle$ в этом приближении от нее не зависит). Поэтому разложение правой части уравнения (14) на два слагаемых носит чисто формальный характер, а с учетом того, что обе величины являются расходящимися, а регуляризации и перенормировке в общем случае подвергается весь комплекс, в который входят перенормируемые моды, то корректнее было бы записать правую часть (14) в виде

$$\mathfrak{T}\left(b_{\mu\nu},\varphi\right) = \left\langle \hat{G}\left(b_{\mu\nu},\varphi\right) + \kappa^2 \hat{T}\left(b_{\mu\nu},\varphi\right)\right\rangle. \tag{15}$$

Кроме того, в низшем приближении в правой части уравнения (14) присутствуют только слагаемые, билинейные по операторам рождения и уничтожения одной моды (что соответствует петлям, не содержащим вершин взаимодействий мод друг с другом), поэтому в низшем приближении мы можем записать

$$\mathfrak{T}(b_{\mu\nu},\varphi)^{vac} = \mathfrak{T}(b_{\mu\nu},0)^{vac} + \mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}, \tag{16}$$

где

$$\mathfrak{T}(b_{\mu\nu},0)^{vac} = \left\langle \hat{G}\left(b_{\mu\nu},0\right) + \kappa^2 \hat{T}\left(b_{\mu\nu},0\right)\right\rangle, \tag{17}$$

$$\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac} = \left\langle \hat{G}\left(0,\varphi\right) + \kappa^2 \hat{T}\left(0,\varphi\right)\right\rangle \tag{18}$$

и где в правой части (17) содержатся только квадратичные по тензорным модам слагаемые, а в правой части (18) оставлены только квадратичные по скалярным модам члены.

Следует ожидать, что величины обоих слагаемых в этом выражении должны быть одного порядка, но при этом различаться видом зависимости от пятой координаты. В настоящей работе мы получим выражение для вклада $\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}$ скалярных мод в вакуумные квантовые поправки к тензору энергии–импульса, которое возникает при учете эффекта Казимира для двух бран и сравним его с классической частью тензора энергии–импульса $\bar{T}_{AB}$, а также вычислим аналитически значение плотности вакуумной энергии, приходящейся на единицу объема браны, и получим из нее величину соответствующего давления, действующего на браны. Также будут сделаны оценки этих величин для тензорного поля.

2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ МОД

В работе [23] было показано, что в низшем порядке по гравитационной константе связи κ для классических полей RS-модели имеет место следующее разложение:

$$g_{AB}\left(x,y\right) = \bar{g}_{AB}\left(y\right) + \kappa h_{AB}\left(x,y\right), \tag{19}$$

$$\phi\left(x,y\right) = \bar{\phi}\left(y\right) + \kappa f\left(x,y\right), \tag{20}$$

где h_{AB} и f — малые флуктуации над фоновым решением, а $\bar{g}_{AB}$ и $\bar{\phi}$ — решения (6)–(10) классических уравнений (2)–(3).

С учетом наложения калибровочных условий в [23] было также продемонстрировано, что в стабилизированной RS-модели для таких малых флуктуаций физическими степенями свободы следует считать скалярное поле φ и поперечно-бесследовое тензорное поле $b_{\mu\nu}$, определяемые как

$$\varphi = e^{-2A}h_{44}, \quad h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi, \tag{21}$$

для которых также выполняются калибровочные условия

$$h_{4\mu} = 0, \quad f = \frac{3}{2}\frac{e^{2A}}{\kappa^2\bar{\phi}'}\varphi'. \tag{22}$$

Запишем разложение пятимерного скалярного поля по четырехмерным модам

$$\varphi(x^\mu,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x^\mu)\Psi_n(y), \tag{23}$$

где волновые функции скалярных мод $\Psi_n(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{e^{2A}}{(\bar{\phi}')^2}\Psi'_n\right)' - \frac{\kappa^2 e^{2A}}{3}\Psi_n + \mu_n^2\frac{e^{4A}}{(\bar{\phi}')^2}\left(1+\frac{2}{\beta_1^2+u}\delta(y)+\frac{2}{\beta_2^2-u}\delta(y-L)\right)\Psi_n = 0, \quad (24)$$

а сами четырехмерные моды подчиняются уравнению Клейна–Гордона

$$\Box_x\varphi_n + \mu_n^2\varphi_n = 0. \quad (25)$$

Аналогичное разложение для пятимерного тензорного поля будет выглядеть как

$$b_{\mu\nu}(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n{}_{\mu\nu}(x^\mu)\Omega_n(y), \quad (26)$$

где волновые функции тензорных мод $\Omega_n(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\tilde{k}\left[\delta(y)-\delta(y-L)\right] - 2k^2 + \frac{m_n^2}{2}e^{2\tilde{k}|y|}\right\}\times \times\Omega_n = 0, \quad (27)$$

а сами четырехмерные моды подчиняются уравнению Клейна–Гордона

$$\Box_x b^n_{\mu\nu} + m_n^2 b^n_{\mu\nu} = 0. \quad (28)$$

В соответствии с процедурой канонического квантования, мы теперь должны считать четырехмерные моды $b_{n\alpha\beta}$ и φ_n операторами, записав для них разложение по плоским волнам:

$$\hat{\varphi}_n(x) = \int\left[\hat{a}_n(\mathbf{p})\,e^{-i\omega_{n\mathbf{p}}t+i\mathbf{px}} + \hat{a}_n^\dagger(\mathbf{p})\,e^{i\omega_{n\mathbf{p}}t-i\mathbf{px}}\right]d\mathbf{p}, \quad \omega_{n\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mu_n^2+\mathbf{p}^2}, \quad (29)$$

$$\hat{b}_{n\,\alpha\beta}(x) = \sum_s\int\left[\hat{b}_{n\,s\,\alpha\beta}(\mathbf{p})\,e^{-i\bar{\omega}_{n\mathbf{p}}t+i\mathbf{px}} + \hat{b}^\dagger_{n\,s\,\alpha\beta}(\mathbf{p})\,e^{i\bar{\omega}_{n\mathbf{p}}t-i\mathbf{px}}\right]d\mathbf{p},\ \bar{\omega}_{n\mathbf{p}} \equiv \sqrt{m_n^2+\mathbf{p}^2}. \quad (30)$$

Операторы $\hat{a}_n(\mathbf{p})$ подчиняются стандартным коммутационным соотношениям для скалярного поля [24]

$$\left[\hat{a}_n(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger_{n'}(\mathbf{p}')\right] = \delta_{nn'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \quad (31)$$

Мы не будем выписывать здесь соответствующие коммутационные соотношения для операторов тензорных полей $\hat{b}_{n\,\alpha\beta}$, которые нетрудно найти, используя стандартные результаты по квантованию гравитационного поля в линейном приближении [25], потому что ниже мы подробно рассмотрим только вычисление вакуумного вклада в тензор энергии-импульса от скалярных мод, а затем кратко обсудим вакуумный вклад тензорных мод, который вычисляется совершенно аналогичным образом.

Набор функций Ψ_n можно выбрать ортонормированным относительно скалярного произведения вида

$$\frac{9\kappa^2\mu_n^2}{4}\int_{-L}^{L}\left\{\frac{e^{4A}}{(\bar{\phi}')^2}\left(1-\frac{2}{\beta_1^2+u}\delta(y) - \frac{2}{\beta_2^2-u}\delta(y-L)\right)\Psi_n\Psi_{n'}\right\}dy = \delta_{nn'}. \quad (32)$$

Тогда для квадратичной по скалярным модам части действия $S^{(2)}$ получаем выражение

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}\left\{\frac{3}{4}\Psi_n\Psi_m - \frac{9}{4\kappa^2(\bar{\phi}')^2}\bar{g}^{44}\left(\partial_4\Psi_n\right)\left(\partial_4\Psi_m\right)\right\}e^{2A}dy\times \times\int\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_n\partial_\nu\varphi_m - \frac{1}{2}(\mu_n^2+\mu_m^2)\varphi_n\varphi_m\right]d^4x. \quad (33)$$

Варьируя действие (33) по $\bar{g}_{AB}$ и усредняя полученное выражение по вакууму, получаем вакуумную поправку от скалярного поля в тензор-энергии импульса $\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}$:

$$\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}_{\alpha\beta} = \left\langle\frac{\delta S^{(2)}}{\delta\bar{g}^{\alpha\beta}}\right\rangle = e^{-2A}\left\langle\frac{\delta S^{(2)}}{\delta\eta^{\alpha\beta}}\right\rangle = = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}F_n^+(y)\int\frac{1}{2\omega_n}\left[p_{n\alpha}p_{n\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(p_n^2-\mu_n^2\right)\right]d\mathbf{p}_n, \quad (34)$$

$$\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}_{44} = \left\langle\frac{\delta S^{(2)}}{\delta\bar{g}^{44}}\right\rangle = = \frac{e^{2A}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}F_n^-(y)\int\frac{1}{2\omega_n}\left(p_n^2-\mu_n^2\right)d\mathbf{p}_n \equiv 0, \quad (35)$$

где

$$F_n^{\pm}(y) \equiv \frac{3}{4}\Psi_n^2 \pm \frac{9}{4\kappa^2(\bar{\phi}')^2}(\partial_4\Psi_n)^2. \quad (36)$$

Вследствие равенства нулю $\mathfrak{T}(0,\varphi)^{vac}_{44}$ уравнение (8), которое вытекает из уравнения (5), не меняется при учете квантовых поправок. Также остается неизменным и уравнение (7), которое получается из уравнения (3), потому что квантовые поправки от тензорных полей в него вообще не входят, а поправки низшего порядка от скалярных полей в этом уравнении линейны по полям и обращаются в нуль при усреднении уравнения по вакууму. В рамках подхода работы [23] это означает, что вид решения для функций $A(y), \phi(y)$ не меняется, а могут измениться только входящие в них параметры модели. Проще всего эти изменения можно оценить с помощью интегральных характеристик модели, таких как плотность энергии, с квантовыми поправками, которые мы и будем вычислять.

Заметим, что группа симметрии RS-модели есть группа движений четырехмерного пространства Минковского. Поскольку компоненты $G_{\alpha\beta}$ и $T_{\alpha\beta}$ по отношению к преобразованиям пятой координаты преобразуются как скаляры, мы можем проинтегрировать $\mathfrak{T}\left(0,\varphi\right)^{\alpha\beta}_{vac}$ по пятой координате, определив тем самым эффективный 4-вектор:

$$P^{\alpha} \equiv 2\int\limits_0^L \mathfrak{T}\left(0,\varphi\right)^{\alpha 0}_{vac}\sqrt{\bar{g}}dy = \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{1}{\omega_{n\mathbf{p}}}\left[p^{\alpha}_n p^0_n - \frac{1}{2}\eta^{\alpha 0}\left(p_n^2-\mu_n^2\right)\right]d\mathbf{p}_n, \quad (37)$$

который можно интерпретировать как плотность 4-импульса, приходящуюся на единицу объема браны. Из выражения (37) очевидно, что пространственные компоненты P^a (где $a = 1,2,3$) равны нулю, а временная компонента есть плотность энергии скалярных мод:

$$P^0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\omega_{n\,\mathbf{p}}d\mathbf{p}. \quad (38)$$

Фактически мы получили плотность энергии нулевых колебаний поля, что является стандартным результатом в теории эффекта Казимира. Производная величины P^0 по физическому расстоянию между бранами (равному L, поскольку фоновое значение $g_{44} = -1$) представляет собой давление, действующее на каждую брану.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ВАКУУМНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Полученное для плотности энергии нулевых колебаний скалярного поля выражение (38) очевидно расходится при размерности пространства-времени равной четырем, поскольку в этом случае расходящимся является каждое его слагаемое. Для того чтобы регуляризовать это выражение и выделить из него конечную часть, зависящую от расстояния между бранами, мы воспользуемся методом размерной регуляризации. Подробные расчеты этой величины приведены в Приложении А, и с точностью до нулевого порядка по $\varepsilon = 4-D$ результат имеет вид:

$$P^0 = I_D\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D = -\frac{\pi}{2}X\varepsilon^{-1} + \\ + \frac{\pi}{8}\left(3-2\gamma-2\ln\pi\right)X - \frac{\pi}{2}Y + O\left(\varepsilon\right). \quad (39)$$

При получении этого выражения мы использовали аналитическое продолжение по размерности пространства для расходящихся интегралов, что соответствует отбрасыванию аналогичного вклада от скалярного поля в пятимерном пространстве Минковского и что, в свою очередь, означает перенормировку с помощью нормального упорядочения операторов поля [26]. Тем не менее получившееся выражение все еще является расходящимся. Дополнительная расходимость возникает из-за того, что пространство-время RS-модели имеет границы в виде двух бран. Отметим, что в пространствах с границами возникновение поверхностных расходимостей в тензоре энергии-импульса является типичным явлением [26, 27] и для того, чтобы их устранить, требуется некоторое уточнение процедуры перенормировки ТЭИ.

При проведении перенормировки, помимо отбрасывания бесконечной части, может изменяться и конечная часть перенормируемого выражения. Для того, чтобы указанная процедура была однозначной, получающееся в результате выражение должно удовлетворять ряду условий [24, 28–30]. Не вдаваясь в детали, отметим, что если неперенормированный ТЭИ какого-либо поля удовлетворяет этим условиям, то после вычитания из него вклада от поля с таким же спином, но другими параметрами потенциала (массой, самодействием), перенормированный ТЭИ также будет удовлетворять этим условиям, что и обеспечит однозначность процедуры перенормировки. Заметим, что такое вычитание фактически соответствует перенормировке констант взаимодействия и массы пятимерного поля. Однако оказывается, что в рассматриваемой нами задаче чисто технически удобнее вычислить сначала вакуумную плотность энергии и выделить из вклада, который дает калуца-клейновская башня в плотность энергии скалярного поля, вклад одной четырехмерной моды, а потом проводить перенормировку выражения (39), вычитая из плотности энергии скалярных мод вклады $I_D\mu_r^D$ и $(-I_D\mu_\Phi^D)$ от четырехмерных свободных полей на бране: радиона с массой μ_r и фиктивного поля с массой μ_Φ, что позволяет свести перенормировку вклада всей калуца-клейновской башни к перенормировке вклада от одной фиктивной четырехмерной моды

$$I_D\mu_r^D = -\frac{\pi}{2}\mu_r^4\varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8}\left(3-2\gamma-2\ln\pi-\ln\mu_r\right)\mu_r^4, \quad (40)$$

$$I_D\mu_\Phi^D = -\frac{\pi}{2}\mu_\Phi^4\varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8}\left(3-2\gamma-2\ln\pi-\ln\mu_\Phi\right)\mu_\Phi^4. \quad (41)$$

В результате для плотности энергии нулевых колебаний скалярного поля получаем перенормированное конечное выражение

$$P^0_{ren} = \lim_{D\to 4}\left(I_D \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^D - I_D\mu_r^D - \left(-I_D\mu_\Phi^D\right)\right) = \\ = \frac{\pi^5}{2}\tilde{k}^4 F(\theta), \quad (42)$$

где

$$F(\theta) = -\left(\mu_\Phi^4/\upsilon^4\right)\ln\left(\mu_\Phi^4/\upsilon^4\right) - \\ - \left[\frac{\theta^5}{25}(1-5\ln\theta) - (1+\theta)^4\ln(1+\theta)\right] + \\ + \int\limits_0^\infty \frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4\ln\nu + \frac{\pi}{2}\cos(2\pi\theta) - \frac{\pi}{2}e^{-2\pi\nu}\nu^4}{\operatorname{ch}(2\pi\nu) - \cos(2\pi\theta)}d\nu.$$

Из определения (A5) для величины θ следует, что она должна находиться в пределах $0 \le \theta < 1$ и близка к $1/4$. Например, при $M = 5$ ТэВ, $\tilde{k}L = 35$, $\beta_2^2 = \tilde{k} = 53$ ТэВ и $\mu_r = 1$ ТэВ имеем $\theta = 0.2518$. В диапазоне $0.1 < \theta < 0.9$ функция $F(\theta)$ монотонно убывает от 0.3 до –33.0 (при $\theta = 1/4$ имеем $F(1/4) = -2.19$). Отсюда можно заключить, что перенормированная плотность энергии нулевых колебаний скалярного поля P^0_{ren} отличается от величины $\tilde{k}^4$ не более чем на три порядка. Численные расчеты при выбранных выше значениях параметров дают величину

$$P^0_{ren} \sim -1.98\times 10^9\ \text{ТэВ}^4. \quad (43)$$

Расчеты для других значений параметров модели подтверждают эту оценку и показывают, что P^0_{ren} отрицательна. Таким образом, в данном случае эффект Казимира приводит к притяжению бран, что в рассматриваемой стабилизированной модели должно проводить к уменьшению физического расстояния между ними.

4. СИЛА КАЗИМИРА

Производную величины P^0_{ren} по физическому расстоянию между бранами можно трактовать как силу, действующую на единицу объема браны перпендикулярно к ней, то есть как давление, оказываемое на браны вследствие квантовых флуктуаций вакуума. Поскольку в рассматриваемой модели фоновая метрика не имеет нетривиальных компонент $\bar{g}_{\alpha 4}$, а $\bar{g}_{44} = -1$, то фоновое расстояние между бранами совпадает с L. В формуле (42) величина P^0_{ren} зависит от параметров $\tilde{k}$ и θ, и нам необходимо выразить эти параметры через L и константы модели — фундаментальный пятимерный масштаб M (т.е. константу κ) и параметры потенциалов $V(\phi)$, $\lambda_1(\phi)$ и $\lambda_2(\phi)$. Параметры k и u, входящие в $\tilde{k}$ и θ (см. формулу (A5)), фактически однозначно связаны с параметрами потенциала [23]:

$$V(\phi) = -\frac{6k^2}{\kappa^2} + \frac{(4k+u)\,u}{2}\phi^2 - \frac{\kappa^2 u^2}{6}\phi^4 \quad (44)$$

и, следовательно, от L в рассматриваемом приближении не зависят. Оставшийся параметр ϕ_0 входит в потенциалы $\lambda_1(\phi)$ и $\lambda_2(\phi)$:

$$\lambda_1(\phi) = \left[-\frac{12k}{\kappa^2} + \left(\beta_1^2 - u\right)\phi_0^2\right] + \\ + 2\left(u-\beta_1^2\right)\phi_0\phi + \beta_1^2\phi^2, \quad (45)$$

$$\lambda_2(\phi) = \left[\frac{12k}{\kappa^2} - \left(\beta_2^2 - u\right)\phi_0^2 e^{-2uL}\right] + \\ + 2\left(u-\beta_2^2\right)\phi_0 e^{-uL}\phi + \beta_2^2\phi^2. \quad (46)$$

Может показаться, что из формулы (45) следует, что так как k и u от L не зависят, то и ϕ_0 не должно зависеть от L. Однако такой вывод не учитывает то обстоятельство, что параметры потенциалов λ подобраны таким образом, чтобы определяемое ими фоновое решение имело заданный вид, т.е. представляло собой статические плоские браны на расстоянии L друг от друга. При других значениях параметров однородное (относительно сдвигов по четырем координатам x^α) решение имело бы более сложный вид: браны обладали бы ненулевой постоянной кривизной, а самое общее решение, по-видимому, не являлось бы однородным и/или изотропным. Тот факт, что только при определенных соотношениях между параметрами потенциалов получается решение заданного вида, означает, что неизменными должны быть не параметры потенциалов, а определенные соотношения между ними. Число таких соотношений должно быть таким, чтобы остался только один свободный параметр помимо β_1^2 и β_2^2 (последние могут быть произвольными, поскольку фоновое решение фактически от них не зависит), который мы можем менять и тем самым регулировать расстояние между бранами и значение фонового скалярного поля на бранах. Допустим, что в качестве такого параметра мы выбираем величину $\lambda_{21} \equiv 2\left(u-\beta_2^2\right)\phi_0 e^{-uL}$. Тогда

$$\phi_0 = \frac{\lambda_{21}}{2\left(u-\beta_2^2\right)}e^{uL}, \qquad \delta\phi_0 = u\phi_0\delta L. \quad (47)$$

Подставив (47) в формулы для $\tilde{k}$ и θ и далее в выражение (42), получим явное выражение для силы Казимира:

$$\frac{dP^0_{ren}}{dL} = \frac{\pi^5}{2}\left\{4\tilde{k}^3\frac{d\tilde{k}}{d\phi_0}F(\theta) + \tilde{k}^4\frac{dF(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{d\phi_0}\right\}\frac{d\phi_0}{dL} = \\ = \frac{\pi^5}{3}\left\{F(\theta) - \frac{u\left(9\tilde{k} + u\kappa^2\phi_0^2\right)}{24\tilde{k}^2}\frac{dF(\theta)}{d\theta}\right\}\kappa^2 u^2\tilde{k}^3\phi_0^2. \quad (48)$$

Мы не приводим здесь численную оценку этой величины, потому что, как уже было отмечено выше, в стабилизированной модели сила Казимира не имеет особого смысла сама по себе, а важно лишь изменение расстояния между бранами, которое она вызывает.

5. ИЗМЕНЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ БРАНАМИ

Для того, чтобы оценить уменьшение расстояния между бранами за счет квантовых эффектов, перенормированную вакуумную плотность энергии P^0_{ren} нужно сравнить с аналогичной классической величиной, полученной из тензора энергии–импульса классического фонового скалярного поля, определяемой следующим интегралом:

$$P^0_{cl} \equiv \int\limits_0^L T^{00}\sqrt{\bar{g}}dy. \tag{49}$$

Подставив сюда выражения (5) и далее (6)–(11), получим:

$$\begin{aligned} P^0_{cl} &= \int\limits_0^L \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + V(\phi) + \lambda_0(\varphi)\,\delta(y) + \lambda_L(\varphi)\,\delta(y-L)\right) e^{-2A}dy = \\ &= \frac{6}{\kappa^2}\int\limits_0^L \left(k - \frac{\kappa^2 u}{6}\varphi_0^2 e^{2uy}\right)^2 e^{-2A}dy + \frac{1}{2}\lambda_1(\varphi_0)\,e^{-2A(0)} + \frac{1}{2}\lambda_2(\varphi_L)\,e^{-2A(L)} = \\ &= \left(\frac{3k^2}{\kappa^2\tilde{k}}\left[1 - e^{-2\tilde{k}L}\right] - \frac{ku}{u+\tilde{k}}\left[1 - e^{-2uL-2\tilde{k}L}\right]\varphi_0^2 + \frac{\kappa^2 u^2}{12\left(2u+\tilde{k}\right)}\left[1 - e^{-4uL-2\tilde{k}L}\right]\varphi_0^4\right) e^{2\tilde{k}L} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{6k}{\kappa^2} - u\varphi_0^2\right)e^{-2\tilde{k}L} + \frac{1}{2}\left(-\frac{6k}{\kappa^2} + u\varphi_0^2 e^{-2uL}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

В соответствии с имеющимися экспериментальными ограничениями на модели с дополнительными измерениями пространства-времени [32] фундаментальный пятимерный энергетический масштаб M выберем равным 5 ТэВ и будем считать, что масса радиона имеет величину порядка 1 ТэВ. При этом должно быть $uL \sim 0.1$, $k \approx \tilde{k}$ и выполняться ограничение (A6). Данные условия удовлетворяются, если $\tilde{k}L \sim 35$ и $\tilde{k} \sim 53$ ТэВ. Тогда приближенное выражение для P^0_{cl} получается равным

$$P^0_{cl} \approx \left(\frac{3\tilde{k}}{\kappa^2} - \frac{u}{2}\phi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}}\phi_0^4\right) e^{2\tilde{k}L}. \tag{51}$$

Численное значение классической плотности энергии при таком выборе констант RS-модели получается следующим:

$$P^0_{cl} \sim 4.15 \times 10^{34}\ \text{ТэВ}^4. \tag{52}$$

Для сравнения этой плотности с квантовой поправкой необходимо также учесть вклад мод тензорного поля. Как мы уже отмечали, вычисление этого вклада проводится совершенно аналогично вычислению вклада скалярных мод и проводит к результату того же порядка для каждой из пяти поляризаций тензорного поля. Поэтому с учетом (43) квантовая поправка к плотности энергии может быть оценена как

$$P^0_{ren} \sim -1.2 \times 10^{10}\ \text{ТэВ}^4. \tag{53}$$

Учитывая, что вследствие соотношения (47) и малости отношения $u/\tilde{k}$ основная зависимость классической плотности энергии (51) от L определяется множителем $\exp(2\tilde{k}L)$, мы можем достаточно просто вычислить относительное уменьшение расстояния между бранами, которое оказывается порядка $\Delta L/L \sim 10^{-26}$, т.е. пренебрежимо мало.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы исследовали влияние поправок, возникающих вследствие эффекта Казимира, на поведение фонового решения в модели Рэндалла–Сундрума, стабилизированной с помощью поля Гольдбергера–Вайза [23], и показали, что это влияние пренебрежимо мало. А именно, был вычислен тензор энергии-импульса скалярного поля с низшими вакуумными квантовыми поправками, затем расходящееся выражение для плотности энергии скалярных мод было регуляризовано методом размерной регуляризации и с помощью формулы Абеля–Плана выделена его конечная часть, зависящая от расстояния между бранами. Также было найдено, что квантовые поправки не меняют вид решения, а изменение параметров модели фактически сводится к пренебрежимо малому изменению физического расстояния между бранами. Таким образом, мы показали, что стабилизированная модель Рэндалла–Сундрума устойчива относительно вакуумных квантовых поправок в низшем приближении теории возмущений, рассмотрением которых, как правило, и ограничивается большинство авторов [24, 26, 27].

В этой связи необходимо отметить, что полученный результат хорошо согласуется с выводами классической работы Гольдбергера [4] о невозможности стабилизировать RS-модель только с помощью квантовых поправок и, наоборот, противоречит выводам работ [3, 5, 7], в которых допускалась возможность стабилизации расстояния между бранами за счет эффекта Казимира в нестабилизированной модели Рэндалла–Сундрума. Действительно, в рассматриваемом приближении для конформного фактора (11) метрика рассматриваемой нами стабилизированной модели имеет тот же вид, что и метрика обычно обсуждаемой нестабилизированной модели. Поэтому квантовые поправки от скалярных и тензорных полей в низшем приближении должны иметь тот же вид и примерно тот же порядок величины, что и в стабилизированной модели. В частности, будет иметь тот же порядок и сила Казимира, которая должна приводить к притяжению бран. Но, в отличие от стабилизированной модели, в нестабилизированной модели нет возвращающей силы, которая могла бы остановить браны на определенном расстоянии друг от друга. Поэтому в такой модели для стабилизации расстояния между бранами обязательно нужно дополнительно рассматривать нелинейные взаимодействия скалярных полей, как это сделано, например, в работе [33], и квантовые поправки к описывающим эти взаимодействия потенциалам. Возможно, в этом случае квантовые поправки действительно могут привести к стабилизации расстояния между бранами.

Авторы выражают благодарность профессору Э. Э. Боосу и профессору Ю. В. Грацу за полезные обсуждения.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология».

ПРИЛОЖЕНИЕ А. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАСХОДЯЩЕГОСЯ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВАКУУМНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ СКАЛЯРНЫХ МОД И ВЫДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ЧАСТИ

Выражение для вакуумной плотности энергии скалярных мод обобщается на случай D измерений пространства-времени следующим образом:

$$P^0 = \lim_{D\to 4} S_{D-2}\sum_{n=1}^{\infty}\int \sqrt{|\mathbf{p}|^2+\mu_n^2}|\mathbf{p}|^{D-2}d|\mathbf{p}| = \\ = \lim_{D\to 4} S_{D-2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D\int\limits_0^{\infty}\sqrt{q^2+1}q^{D-2}dq = \\ = \lim_{D\to 4} I_D\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D, \tag{A1}$$

где мы сделали замену переменной $q \equiv |\mathbf{p}|/\mu_n$ и обозначили

$$I_D \equiv S_{D-2}\int\limits_0^{\infty}\sqrt{q^2+1}q^{D-2}dq, \tag{A2}$$

и где S_n есть объем n-мерной сферы (то есть поверхности $(n+1)$-мерного шара):

$$S_n = \frac{(n+1)\,\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}. \tag{A3}$$

Очевидно, что оба сомножителя I_D и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^D$ в последнем равенстве в формуле (A1) являются расходящимися при $D\to 4$. Для того чтобы это явно продемонстрировать, выделим в каждом из них расходящиеся части.

Сначала вычислим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^D$ — сумму масс скалярных мод в степени D, стоящую в правой части регуляризованного выражения для плотности энергии (A1). Согласно [23] масса самой первой скалярной моды — радиона — дается выражением

$$\mu_1 = \mu_r \approx \sqrt{\frac{2}{3}\frac{(\beta_L^2-u)}{\beta_L^2+4\tilde{k}}}u\kappa\phi_0. \tag{A4}$$

В приложении Б показано, что при определенном выборе параметров модели, согласованном с экспериментальными ограничениями на модели с дополнительными измерениями пространства–времени [32], массы остальных мод оказываются порядка пятимерного фундаментального масштаба M:

$$\mu_n \approx \upsilon\,(n+\theta)\,, \\ \text{где}\quad \upsilon \equiv \pi\tilde{k},\quad \theta \equiv \frac{1}{4}+\frac{u}{2\tilde{k}}+\frac{\kappa^2\phi_0^2}{12}\frac{u^2}{\tilde{k}}^2, \tag{A5}$$

и при этом должно выполняться условие

$$n \gg \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{(\beta_L^2-u)}{\tilde{k}}-\alpha^2\right)-\frac{1}{2}-\frac{2\alpha+1}{4}, \\ \alpha \equiv \sqrt{\left(1+u/\tilde{k}\right)^2+b^2}. \tag{A6}$$

Таким образом, ряд в регуляризуемом выражении (A1) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D = \mu_r^D - \upsilon^D(1+\theta)^D + \upsilon^D\sum_{n=1}^{\infty}(n+\theta)^D, \tag{A7}$$

где мы специально выделили из суммы слагаемое $-\upsilon^D(1+\theta)^D$, чтобы ниже при использовании формулы Абеля–Плана получить более удобные для дальнейших вычислений интегралы.

Для вычисления ряда в правой части (A7) воспользуемся формулой Абеля–Плана, позволяющей заменить сумму интегралом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\,(n+\theta) = \int\limits_0^{\infty}f\,(\nu)\,d\nu + i\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{f\,(i\nu)}{e^{-i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}-\frac{f\,(-i\nu)}{e^{i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}\right\}d\nu. \tag{A8}$$

Тогда для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\theta)^D$ получим следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\theta)^D=\int\limits_0^{\infty}(\nu+\theta)^D d\nu+i\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{i^D}{e^{-i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}-\frac{(-i)^D}{e^{i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}\right\}\nu^D d\nu. \tag{A9}$$

Первый интеграл в правой части (A9) расходится при $D>-1$. Перепишем его в более удобном для последующей перенормировки виде, сдвинув переменную интегрирования:

$$\int\limits_0^{\infty}(\nu+\theta)^D d\nu=\int\limits_0^{\infty}\nu^D d\nu-\frac{\theta^{D+1}}{D+1}. \tag{A10}$$

Второй интеграл в правой части (A9) является конечным при всех D. В окрестности $D=4$ (т.е. при малых $\varepsilon\equiv 4-D$) получим

$$i\int\limits_0^{\infty}\left\{\frac{i^D}{e^{-i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}-\frac{(-i)^D}{e^{i2\pi\theta}e^{2\pi\nu}-1}\right\}\nu^D d\nu=$$
$$=-\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}-\varepsilon\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4\ln\nu+\frac{\pi}{2}\cos(2\pi\theta)-\frac{\pi}{2}e^{-2\pi\nu}\nu^4}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}d\nu. \tag{A11}$$

Таким образом, мы переписали выражение (A7) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D=\upsilon^D\int\limits_0^{\infty}\nu^D d\nu+\mu_r^D-\upsilon^D(1+\theta)^D-\upsilon^D\frac{\theta^{D+1}}{D+1}-\upsilon^D\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}+$$
$$-\varepsilon\upsilon^D\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4\ln\nu+\frac{\pi}{2}\cos(2\pi\theta)-\frac{\pi}{2}e^{-2\pi\nu}\nu^4}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}d\nu. \tag{A12}$$

Поскольку слагаемое в третьей строке формулы (A12) порядка ε, то D в нем можно положить равным 4. Слагаемое во второй строке формулы (A12) с точностью до ε равно

$$\mu_r^D-\upsilon^D(1+\theta)^D-\upsilon^D\frac{\theta^{D+1}}{D+1}-\upsilon^D\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}=$$
$$=\upsilon^4\left[(\mu_r/\upsilon)^4-(1+\theta)^4-\frac{\theta^5}{5}-\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}\right]+$$
$$+\varepsilon\left\{\mu_r^4\ln(\mu_r)-\upsilon^4\ln\upsilon\left[(1+\theta)^4+\frac{\theta^5}{5}+\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}\right]+\upsilon^4\left[-(1+\theta)^4\ln(1+\theta)+\frac{\theta^5}{25}(1-5\ln\theta)\right]\right\}. \tag{A13}$$

Таким образом, для суммы масс скалярных мод в степени D окончательно имеем следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^D=\upsilon^D\int\limits_0^{\infty}\nu^D d\nu+X+\varepsilon Y, \tag{A14}$$

где

$$X=\mu_r^4-\upsilon^4\left[(1+\theta)^4+\frac{\theta^5}{5}+\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4 d\nu}{\operatorname{ch}(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}\right], \tag{A15}$$

$$Y=\mu_r^4\ln\mu_r-\upsilon^4\ln\upsilon\left[(1+\theta)^4+\frac{\theta^5}{5}+\int\limits_0^\infty\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4d\nu}{\mathrm{ch}\,(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}\right]+$$
$$+\upsilon^4\left[\frac{\theta^5}{25}(1-5\ln\theta)-(1+\theta)^4\ln(1+\theta)\right]-\upsilon^4\int\limits_0^\infty\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4\ln\nu+\frac{\pi}{2}\cos(2\pi\theta)-\frac{\pi}{2}e^{-2\pi\nu}\nu^4}{\mathrm{ch}\,(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}d\nu. \tag{A16}$$

Интеграл по импульсу в формуле (A2) при $D<0$ сходится на верхнем пределе и расходится на нижнем. Поэтому мы регуляризуем его следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty\sqrt{q^2+1}q^{D-2}dq=\lim_{a\to0}\int\limits_a^\infty\sqrt{q^2+1}q^{D-2}dq=\frac{-1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)-\lim_{a\to0}\frac{a^{D-1}}{D-1}. \tag{A17}$$

Будем использовать правую часть (A17) до перехода к пределу в качестве аналитического продолжения выражения для этого интеграла при $D>0$. В таком случае второе слагаемое в правой части (A17) исчезает. При нечетных $D>0$ получаем для (A17) конечное выражение. При четных $D>0$ выражение (A17) расходится, в итоге в окрестности $D=4$ для (A2) мы получаем выражение

$$I_D=-\frac{\pi}{2}\varepsilon^{-1}+\frac{\pi}{8}(3-2\gamma-2\ln\pi)-\frac{\pi}{96}\left[21+\pi^2+6\gamma^2+6(\ln\pi-3)\ln\pi+6\gamma(2\ln\pi-3)\right]\varepsilon. \tag{A18}$$

Особо отметим, что полученное выражение (A18) не зависит от каких-либо параметров RS-модели.

Получив регуляризованные выражения (A18) и (A7) для сомножителей I_D и $\sum\limits_{n=1}^\infty\mu_n^D$, мы можем вернуться к формуле (A1) для плотности энергии скалярных мод P^0. Перемножив (A18) и (A7), получим:

$$P^0=I_D\sum_{n=1}^\infty\mu_n^D=\upsilon^DI_D\int\limits_0^\infty\nu^Dd\nu+I_DX+\varepsilon I_DY. \tag{A19}$$

Преобразуем в выражении (A19) первое слагаемое следующим образом:

$$I_D\int\limits_0^\infty\nu^Dd\nu=S_{D-2}\int\limits_0^\infty\sqrt{q^2+1}q^{D-2}dq\int\limits_0^\infty\nu^Dd\nu=S_{D-2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sqrt{(\nu q)^2+\nu^2}(\nu q)^{D-2}\nu dqd\nu=$$
$$=S_{D-2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sqrt{\xi^2+\nu^2}\xi^{D-2}d\xi d\nu=S_{D-1}\int\limits_0^\infty\chi^{D-1}d\chi, \tag{A20}$$

где в последнем равенстве мы перешли к полярным координатам и проинтегрировали по угловой переменной. При $D<0$ интеграл (A20) расходится на нижнем пределе интегрирования. Поэтому будем рассматривать его как предел вида

$$\lim_{a\to0}\int\limits_a^\infty q^{D-1}dq=\lim_{a\to0}\frac{a^D}{D}=0. \tag{A21}$$

Используем это выражение для аналитического продолжения рассматриваемого интеграла $I_D\int\limits_0^\infty\nu^Dd\nu$ в выражении (A19) на область $D>0$, полагая его равным нулю и при $D>0$.

В результате для плотности энергии P^0 получаем с точностью до нулевого порядка по ε:

$$P^0=I_D\sum_{n=1}^\infty\mu_n^D=-\frac{\pi}{2}X\varepsilon^{-1}+\frac{\pi}{8}(3-2\gamma-2\ln\pi)X-\frac{\pi}{2}Y+O(\varepsilon). \tag{A22}$$

Заметим, что расходящаяся часть в полученном выражении в точности совпадает с расходящейся частью вклада, который бы дали в плотность энергии два четырехмерных скалярных поля: радион с массой μ_r и нефизическое поле Φ с массой μ_Φ, где

$$\mu_\Phi^4\equiv\upsilon^4\left[(1+\theta)^4+\frac{\theta^5}{5}+\int\limits_0^\infty\frac{\sin(2\pi\theta)\,\nu^4d\nu}{\mathrm{ch}\,(2\pi\nu)-\cos(2\pi\theta)}\right]. \tag{A23}$$

Мы считаем поле с массой μ_Φ нефизическим, потому что его вклад в плотность энергии имеет неправильный знак.

Полученный результат становится отчасти понятным, если вернуться к выражению (А7), в котором мы добавили и вычли член вида $\upsilon^D(1+\theta)^D$, фактически заменив в первоначальной сумме первый член с массой μ_r слагаемым с массой $\upsilon\,(1+\theta)$. Таким образом, еще до проведения процедуры перенормировки вакуумная плотность энергии пятимерного физического поля была представлена нами в виде вклада башни эквидистантных четырехмерных мод, массы которых подчиняются уравнению (А5), а также вклада четырехмерной моды с массой μ_r (радион) и вклада одной фиктивной четырехмерной моды, входящей в полученное выражение для вакуумной плотности энергии с противоположным знаком.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СПЕКТР МАСС ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МОД СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Согласно [23] спектр масс тяжелых скалярных мод определяется уравнением

$$\left(1+\alpha+\frac{u}{\tilde{k}}+\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z^2\right)J_\alpha\left(z\right)-zJ_{\alpha-1}\left(z\right)=0, \tag{Б1}$$

где $z=\mu/\tilde{k}$.

Для того чтобы найти корни этого уравнения при больших z, воспользуемся асимптотическим разложением функций Бесселя [31]:

$$J_\alpha\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(\frac{4z-2\alpha\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\alpha+2j+1/2\right)}{(2j)!\Gamma\left(\alpha-2j+1/2\right)}(2z)^{-2j}+O\left(z^{-2N}\right)\right]+\right.$$
$$\left.-\sin\left(\frac{4z-2\alpha\pi-\pi}{4}\right)\left[\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\alpha+2j+3/2\right)}{(2j+1)!\Gamma\left(\alpha-2j-1/2\right)}(2z)^{-2j-1}+O\left(z^{-2N-1}\right)\right]\right\},$$

представив его в следующей форме:

$$J_\alpha\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{2\alpha-1}{4}\pi\right)P_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)-\sin\left(z-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)\frac{1}{z}Q_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)+O\left(z^{-2N}\right)\right\},$$

где

$$P_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)\equiv\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\alpha+2j+1/2\right)}{(2j)!\Gamma\left(\alpha-2j+1/2\right)}(2z)^{-2j},$$

$$Q_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)\equiv\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j\frac{\Gamma\left(\alpha+2j+3/2\right)}{(2j+1)!\Gamma\left(\alpha-2j-1/2\right)}(2z)^{-2j}.$$

Используя это асимптотическое разложение при больших z, для уравнения (Б1) запишем

$$\left[\left(1+\alpha+\frac{u}{\tilde{k}}+\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z^2\right)P_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)+Q_{\alpha-1,N}\left(z^{-2}\right)\right]\cos\left(z-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)+$$
$$+\left\{zP_{\alpha-1,N}\left(z^{-2}\right)-\left(1+\alpha+\frac{u}{\tilde{k}}+\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z^2\right)\frac{1}{z}Q_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)\right\}\sin\left(z-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)=O\left(z^{-2N+2}\right).$$

В полученной формуле слагаемое в квадратных скобках имеет старший член порядка z^2, а выражение в фигурных скобках — порядка z. Чтобы эти два слагаемых компенсировали друг друга с точностью до $O\left(z^{-2N+2}\right)$, следует наложить на переменную z условие $\cos\left(z-\frac{2\alpha+1}{4}\pi\right)\approx 0$, то есть $z=z_n$, где z_n — корень уравнения

$$z-\frac{2\alpha+1}{4}\pi=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+\varepsilon,\quad \varepsilon\approx 0.$$

С учетом последнего условия для уравнения (Б1) имеем

$$-\left[\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z^2P_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)+\left(1+\alpha+\frac{u}{\tilde{k}}\right)P_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)+Q_{\alpha-1,N}\left(z^{-2}\right)\right]\left\{1+\frac{1}{3}\varepsilon^2+...\right\}\varepsilon+$$
$$\left\{z\left[P_{\alpha-1,N}\left(z^{-2}\right)-\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}Q_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)\right]-\left(1+\alpha+\frac{u}{\tilde{k}}\right)\frac{1}{z}Q_{\alpha,N}\left(z^{-2}\right)\right\}=O\left(z^{-2N+2}\right). \quad (Б2)$$

Оставляя в этом выражении только линейные по ε и старшие по z члены, получим

$$\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z\varepsilon\approx 1-\frac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}\left(\alpha^2-1/4\right).$$

Таким образом, для ε и z имеем систему из двух линейных уравнений с дополнительным условием $\varepsilon\approx 0$:

$$\begin{cases} z-\dfrac{2\alpha+1}{4}\pi=\pi\left(n+\dfrac{1}{2}\right)+\varepsilon, \\ \dfrac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}z\varepsilon=1-\dfrac{\tilde{k}}{\beta_2^2-u}\left(\alpha^2-1/4\right), \end{cases}$$

решая которую, получаем для ε

$$\varepsilon\approx\left[\frac{\beta_2^2-u}{\tilde{k}}-\left(\alpha^2-1/4\right)\right]\frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2\alpha+1}{4}\right)},$$

и, соответственно, для z_n

$$z_n\approx\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2\alpha+1}{4}\right)+2\left[\frac{\beta_2^2-u}{\tilde{k}}-\left(\alpha^2-1/4\right)\right]\frac{1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2\alpha+1}{4}\right)}.$$

Поскольку $z=\mu/\tilde{k}$, то для спектра масс имеем следующее выражение:

$$\mu_n\approx\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2\alpha+1}{4}\right)\tilde{k}+\frac{2}{\pi}\frac{\left(\beta_2^2-u\right)-\left(\alpha^2-1/4\right)\tilde{k}}{n+\frac{1}{2}+\frac{2\alpha+1}{4}}\approx\pi\left(n+\frac{5}{4}+\frac{u}{2\tilde{k}}+\frac{\kappa^2\varphi_0^2}{12}\frac{u^2}{\tilde{k}^2}\right)\tilde{k}.$$

Заметим, что мы не можем в общем случае утверждать, что фигурирующее в последней формуле число n является порядковым номером моды, таким, что масса моды возрастает с ростом номера n. Использование этой формулы возможно, когда $\varepsilon\approx 0$, то есть в том случае, когда выполняется условие

$$n\gg\frac{2}{\pi}\left(\frac{\beta_2^2-u}{\tilde{k}}-\left(\alpha^2-1/4\right)\right)-\frac{1}{2}-\frac{2\alpha+1}{4}.$$

Поэтому если β_2^2 достаточно велико по сравнению с $\tilde{k}$, то формулу можно использовать только при достаточно больших n, а само число мод, которые не подчиняются этому условию (а также то, как распределены массы в промежуточном диапазоне квантового числа n) можно оценить только численно. С другой стороны, если $\beta_2^2=\tilde{k}=53$ ТэВ и $\kappa^2\varphi_0^2$ выбрано таким, чтобы масса радиона была равной 1 ТэВ, (а также $\tilde{k}L\sim 35$ и $uL\sim 0.1$), это условие удовлетворяется для всех положительных n (радиону при этом сответствует $n=0$, и при этом других решений уравнения (Б1) между $n=0$ и $n=1$ нет, в чем можно убедиться численными методами.

[1] *Randall L., Sundrum R.* // Phys. Rev. Lett. **83**. 3370. (1999).

[2] *Goldberger W.D., Wise M.B.* // Phys. Rev. Lett. **83**. 4922. (1999).

[3] *Toms D.J.* // Phys. Lett. B **484**. 149. (2000).

[4] *Goldberger W.D., Rothstein I.Z.* // Phys. Lett. B. **491**. 339 (2000).

[5] *Garriga J., Pujolas O., Tanaka T.* // Nucl. Phys. B. **605**. 192 (2001).

[6] *Flachi A., Pujolas O.* // Phys. Rev. D. **68**. 025023. (2003).

[7] *Flachi A., Toms D.J.* // Nucl. Phys. B. **610**. 144. (2001).

[8] *Flachi A., Moss I.G., Toms D.J.* // Phys. Lett. B. **518**. 153. (2001).

[9] *Flachi A., Moss I.G., Toms D.J.* // Phys. Rev. D. **64**.

105029. (2001).
[10] *Uzawa K.* // Prog. Theor. Phys. **110**. 457. (2003).
[11] *Nojiri S., Obregon O., Odintsov S.* // Phys. Rev. D. **62**. 104003. (2000).
[12] *Garriga J., Pomarol A.* // Phys. Lett. B. **560**. 91. (2003).
[13] *Teo L.P.* // J. High Energy Phys. **10**. 019. (2010).
[14] *Saharian A.A., Setare M.R.* // Phys. Lett. B. **552**. 119 (2003).
[15] *Toms D.J., Knapman A.* // Phys. Rev. D. **69**. 044023. (2004).
[16] *Saharian A.A.* // Phys. Rev. D. **73**. 044012. (2006).
[17] *Saharian A.A.* // Phys. Rev. D. **73**. 064019. (2006).
[18] *Shao S., Chen P., Gu J.* // Phys. Rev. D. **81**. 084036. (2010).
[19] *Elizalde E., Odintsov S.D., Saharian A.A.* // Phys. Rev. D. **87**. 084003. (2013).
[20] *Kotanjyan A.S., Saharian A.A., Sargsyan H.G.* // Phys. Rev. D. **102**. 105014. (2020).
[21] *Saharian A.A.* // Nucl. Phys. B. **712**. 196. (2005).
[22] *Mkhitaryan A.L., Saharian A.A.* // J. High Energy Phys. **08**. 063. (2007).
[23] *Boos E.E., Mikhailov Yu.S., Smolyakov M.N., Volobuev I.P.* // Mod. Phys. Lett. A. **21**. 1431 (2014).
[24] *Биррел Н., Девис П.* // Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
[25] *Иваненко Д.Д.* // Квантовая гравитация и топология. Т. 2. М., 1973.
[26] *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* // Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
[27] *Мостепаненко В.М., Трунов Н.Н.* // УФН. **156**, №. 3. 385 (1988).
[28] *Wald R.M.* // Commun. Math. Phys. **54**. 1 (1977).
[29] *Wald R.M.* // Phys. Rev. D. **17**. 1477 (1978).
[30] *Wald R.M.* // Annals Phys. **110**. 472 (1978).
[31] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* // Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
[32] *Sirunyan A.M., Tumasyan A., Adam W.* et al. // JHEP **04**. 144. (2019).
[33] *Волобуев И.П., Кейзеров С.И., Рахметов Э.Р.* // ТМФ. **205**, №. 1. 84 (2020).

Constancy of stabilized Randall-Sundrum model with respect to quantum corrections

I. P. Volobuev[1a], **S. I. Keizerov**[1], **E. R. Rakhmetov**[1b]

Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*volobuev@theory.sinp.msu.ru*, [b]*rahmetov@theory.sinp.msu.ru*

In the Randall-Sundrum model stabilized with the help of the Goldberger-Wise scalar field, the lowest order vacuum quantum corrections to the energy-momentum tensor of the scalar and tensor fields are calculated. It is shown that the corresponding vacuum energy density of the fields in the bulk leads to the Casimir effect. Using the dimensional regularization method and the Abel-Plana formula, the divergences have been isolated and the vacuum energy density has been renormalized. An analytical expression for the Casimir force is obtained and an estimate of its influence on the model parameters is made. It was found that the quantum corrections lead only to a negligibly small decrease in the distance between the branes, i.e. the model possesses constancy with respect to quantum corrections.

PACS: 04.50.+h.
Keywords: RS-model, Casimir effect.
Received 08 February 2024.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 2. Pp. .

Сведения об авторах

1. Волобуев Игорь Павлович — доктор. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник; тел.: (495) 939-35-72, e-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru.
2. Кейзеров Сергей Иванович — научный сотрудник; тел.: (495) 939-58-81, e-mail: errar@mail.ru.
3. Рахметов Эдуард Рустямович — ведущий программист; тел.: (495) 939-58-81, e-mail: rahmetov@theory.sinp.msu.ru.