ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Существование и устойчивость стационарного решения в двумерной системе реакция–диффузия с медленной и быстрой компонентами

Н. Н. Нефедов,[1,*] К. А. Коцюбинский[1,†]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 02.03.2024; после доработки 24.03.2024; подписана в печать 19.04.2024)

В работе исследуется существование устойчивого стационарного решения в системе уравнений реакция–диффузия с медленной и быстрой компонентами в двумерном по пространственной переменной случае. Доказана теорема существования стационарного решения с пограничными слоями в случае краевых условий Дирихле, построено его асимптотическое приближение, получены условия асимптотической устойчивости по Ляпунову этого решения. В основе исследований лежит асимптотический метод дифференциальных неравенств, примененный к новому классу задач. Этот результат является практически важным как для различных приложений, описываемых аналогичными системами, так и для применения численных методов стационирования при решении эллиптических краевых задач.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv УДК: 517.9

Ключевые слова: система реакция–диффузия, сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений второго порядка, малый параметр, устойчивость по Ляпунову, асимптотический метод.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2430101

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется существование устойчивого стационарного решения в системе уравнений реакция–диффузия с медленной и быстрой компонентами в двумерном по пространственной переменной случае. Подобные системы возникают, в частности, при моделировании быстрых бимолекулярных реакций в случае, когда один из источников (реакция, нелинейный источник, взаимодействие) интенсивный (порядка $1/\varepsilon^2$), а второй порядка единицы (см., например, [1]). Системы подобного вида относятся к классу сингулярно возмущенных и активно исследуются с помощью асимптотических методов. Особенностью данной работы является отсутствие сингулярного возмущения в уравнении для медленной компоненты. Такие системы в теории сингулярных возмущений принято называть тихоновскими, и исследование начальных задач для подобных систем ОДУ заложило основы теории сингулярных возмущений (см. [2] и [3]). Медленные компоненты описывают реакции, где преобладают диффузионные процессы, и частицы свободно перемещаются в пространстве, взаимодействуя друг с другом. Быстрые компоненты, напротив, описывают реакции, в которых преобладает функция источника. Системы такого класса используют для моделирования процессов обмена веществ внутри клеток, диффузии кислорода в легких, распространения примесей в атмосфере и т.д. (см. ссылки в работах [4], [5]).

Основной целью данной работы является выяснение условий существование стационарного решения задачи и его устойчивости по Ляпунову, а также построение его асимптотического приближения по малому параметру. Исследование проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств (основные идеи и примеры использования можно посмотреть в [6]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассматривается система двух уравнений типа реакция–диффузия в двумерной односвязной области D с гладкой границей ∂D:

$$\begin{cases} N_f[u,v] := \varepsilon^2\Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, \quad N_g[u,v] := \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, \\ \qquad\qquad x = (x_1,x_2) \in D \subset R^2, \quad t > 0, \\ u(x,t,\varepsilon) = h(x), \quad v(x,t,\varepsilon) = q(x), \quad x = (x_1,x_2) \in \partial D, \quad t > 0, \\ u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), \quad v(x,0,\varepsilon) = v_{init}(x,\varepsilon), \quad x = (x_1,x_2) \in \partial D. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции источников $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ определены в области $(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times \overline{D} \times \{\varepsilon \,|\, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, где ε_0 —

* E-mail: nefedov@physics.msu.ru

† E-mail: kkotsubinsky@gmail.com

положительная константа, I_u, I_v — некоторые множества, явный вид которых будет уточнен ниже. Исследуется вопрос существования стационарного решения с пограничным слоем и его устойчивость по Ляпунову. Если стационарное решение существует, то оно является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} L_f[u,v] := \varepsilon^2\Delta u - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, \\ L_g[u,v] := \Delta v - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, \\ x = (x_1,x_2) \in D \subset R^2, \\ \\ u(x,\varepsilon) = h(x), \quad v(x,\varepsilon) = q(x), \\ x = (x_1,x_2) \in \partial D. \end{cases} \tag{2}$$

(A0) Пусть функции $f(u,v,x,\varepsilon)$, $g(u,v,x,\varepsilon)$, $h(x)$ и $q(x)$ достаточно гладкие в своих областях определения.

Вырожденная система (дифференциально-алгебраическая) для задачи (2) при $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = f(u,v,x,0), \\ \Delta v = g(u,v,x,0), \end{cases} \tag{3}$$

Потребуем выполнения стандартного условия разрешимости вырожденной системы: **(A1)** Пусть вырожденное уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет решение $u = \varphi(v,x)$ такое, что $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0$ при $(v,x) \in (I_v \times \overline{D})$, а задача

$$\Delta v - g(\varphi(v,x),v,x,0) = 0,\ x \in \overline{D},$$
$$v(x)|_{x\in\partial D} = q(x)$$

имеет решение $v = \overline{v}(x)$.

Определим функцию $\overline{u}(x) = \varphi(\overline{v}(x),x)$.

Потребуем также выполнения условий:

(A2) Граничное условие для компоненты u принадлежит области притяжения корня вырожденной системы $\overline{u}$, то есть выполнено неравенство $\int\limits_{\overline{u}(x)}^{\widetilde{u}} f(\widetilde{u},\overline{v}(x),x,0)d\widetilde{u} > 0$, где $\widetilde{u} \in (\overline{u}(x),h(x)]$ или $\widetilde{u} \in [h(x),\overline{u}(x))$ и $x \in \partial D$.

В работе рассмотрен случай, когда нелинейности в системе удовлетворяют условию следующему условию квазимонотонности:

(A3) Функции f и g являются квазимонотонно невозрастающими в области определения и ε достаточно малых.

Это условие означает, что $f_v \le 0$ при фиксированном u, $g_u \le 0$ при фиксированном v в области определения.

Из **(A2)** также следует, что $\bar{f}_u(x) \equiv$ $\equiv f_u(\bar{u}(x),\bar{v}(x),x,0) > 0$, $x \in \overline{D}$ (здесь и далее черта над какой-либо функцией или ее производной означает, что ее значение берется в точке $(\bar{u}(x),\bar{v}(x),x,0)$). Обозначим также $\overline{\varphi}_v(x) = \varphi_v(\overline{v}(x),x)$.

Потребуем также выполнения условия:

(A4) Пусть для всех $x \in \overline{D}$ выполнено неравенство

$$\bar{g}_v(x) + \bar{\varphi}_v(x)\bar{g}_u(x) > -\lambda_0,$$

λ_0 — главное собственное значение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi + \lambda\Psi = 0,\ x \in \overline{D}, \\ &\Psi(x) = 0,\ x \in \partial D. \end{aligned} \tag{4}$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Асимптотическое приближение решения стационарной задачи

Построение формальной асимптотики проводится по стандартной схеме метода пограничных функций (см. [7]) с использованием локальной системы координат для описания решения вблизи границы. Если границу ∂D можно задать параметрически $x_1 = \hat{x_1}(\theta)$, $x_2 = \hat{x_2}(\theta)$, где $0 \le \theta \le \Theta$, то вводятся новые координаты (r,θ), где r — расстояние от некоторой внутренней точки $M(x_1,x_2) \in D$ до границы ∂D вдоль нормали к ∂D, θ — координата точки на ∂D, из которой эта нормаль выходит. Если граница достаточно гладкая и окрестность достаточно мала $0 \le r < \widetilde{\delta}$, то существует взаимнооднозначное соответствие между координатами (x_1,x_2) и (r,θ), заданное уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= \hat{x_1}(\theta) - r\frac{\hat{x_2}'(\theta)}{\sqrt{\hat{x}'^2(\theta) + \hat{x_2}'^2(\theta)}}, \\ x_2 &= \hat{x_2}(\theta) + r\frac{\hat{x_2}'(\theta)}{\sqrt{\hat{x}'^2(\theta) + \hat{x_2}'^2(\theta)}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Оператор Лапласа в новой системе координат имеет вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(r,\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \beta(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{6}$$

где

$$\alpha(r,\theta) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)^2,$$
$$\beta(r,\theta) = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2},$$
$$\gamma(r,\theta) = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}.$$

Формальное асимптотическое приближение будем строить в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_n(x,\varepsilon) &= \overline{u}_\varepsilon(x,\varepsilon) + P_\varepsilon u(\xi,\theta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{u}_i(x) + P_i u(\xi,\theta)\right), \\ V_n(x,\varepsilon) &= \overline{v}_\varepsilon(x,\varepsilon) + P_\varepsilon v(\xi,\theta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{v}_i(x) + P_i v(\xi,\theta)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\xi = \dfrac{r}{\varepsilon}$ — растянутая переменная.

Нелинейность в задаче (2) представим по методу А. Б. Васильевой:

$$\begin{aligned} & f(u,v,x,\varepsilon) = \overline{f}(x,\varepsilon) + Pf(\xi,\theta,\varepsilon), \\ & \overline{f}(x,\varepsilon) = f(\overline{u}(x,\varepsilon), \overline{v}(x,\varepsilon), x, \varepsilon), \\ & Pf(\xi,\theta,\varepsilon) = f(\overline{u}(\varepsilon\xi,\theta,\varepsilon) + \\ & \quad + Pu(\xi,\theta,\varepsilon), \overline{v}(\varepsilon\xi,\theta,\varepsilon) + Pv(\xi,\theta,\varepsilon), \varepsilon\xi,\theta,\varepsilon) - \\ & \qquad - f(\overline{u}(\varepsilon\xi,\theta,\varepsilon), \overline{v}(\varepsilon\xi,\theta,\varepsilon), \varepsilon\xi,\theta,\varepsilon). \end{aligned} \tag{8}$$

Используя растянутую переменную $\xi = \dfrac{r}{\varepsilon}$, представление (6) и локальную систему координат, операторы уравнений задачи (2) в $\widetilde{\delta}$-окрестности границы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} L_f[u,v] &= \varepsilon^2 \Delta u - f(u,v,x,\varepsilon) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - f(u,v,r,\theta,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i L_f^i[u,v], \\ L_g[v,v] &= \Delta v - g(u,v,x,\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - g(u,v,r,\theta,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i L_g^i[u,v], \\ & (\xi,\theta) \in \{0 \le \xi < \infty, 0 \le \theta \le \Theta\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $L_f^i[u,v]$ и $L_g^i[u,v]$ — линейные операторы, содержащие операции дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Учитывая разложения (7), (8) и (9), для функций регулярной части $\overline{u}_i$, $\overline{v}_i$ и функций пограничного слоя $P_i u$, $P_i v$ получим уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta \overline{u} = \overline{f}(x,\varepsilon), \\ \Delta \overline{v} = \overline{g}(x,\varepsilon),\ x \in \overline{D}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Pu}{\partial \xi^2} = Pf(\xi,\theta\varepsilon) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i L_f^i[u,v], \\ \dfrac{\partial^2 Pv}{\partial \xi^2} = \varepsilon^2 Pg(\xi,\theta,\varepsilon) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{2+i} L_g^i[u,v],\ \xi > 0,\ 0 \le \theta \le \Theta, \end{cases} \tag{10}$$

связанные через граничные условия

$$\begin{aligned} \overline{u}(x)|_{x\in\partial D} + Pu(0,\theta) = h(x)|_{x\in\partial D}, \\ \overline{v}(x)|_{x\in\partial D} + Pv(0,\theta) = q(x)|_{x\in\partial D}, \end{aligned} \tag{11}$$

к которым добавляются стандартные условия метода — условия убывания пограничных функций по растянутому аргументу на бесконечности:

$$P_i u(\infty,\theta) = P_i v(\infty,\theta) = 0.$$

Порядок определения коэффициентов асимптотического представления (7) следующий. На k-м шаге вначале определяются пограничные функции компоненты v, затем определяются функции $\bar{u}_k, \bar{v}_k$, после чего определяются пограничные функции компоненты u.

Заметим, что в уравнениях для погранслойных компонент $P_0 v$ и $P_1 v$ отсутствуют неоднородности при соответствующих степенях ε. Задача для $P_0 v$ может быть записана в следующем виде, где учтено необходимое нам поведение при $\xi \to +\infty$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 P_0 v}{\partial \xi^2} = 0, \\ P_0 v(+\infty,\theta) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial \xi} P_0 v(+\infty,\theta) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Задача имеет только тривиальное решение. Для $P_1 v$ будет аналогичная задача, решение которой $P_1 v(\xi,\theta) = 0$.

Для $\overline{u}_0, \overline{v}_0$ из (10), (11) получим задачу:

$$\begin{cases} 0 = f(\overline{u}_0, \overline{v}_0, x, 0), \\ \Delta \overline{v}_0 = g(\overline{u}_0, \overline{v}_0, x, 0), \\ \overline{v}_0(x)|_{x\in\partial D} = q(x). \end{cases} \tag{13}$$

В силу условия **(A1)** данная задача разрешима, решение $(\overline{u}_0, \overline{v}_0) = (\varphi(\overline{v}(x),x), \overline{v}(x))$.

Задачу для $P_0 u$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} P_0 u = f(P_0 u + \overline{u}_0(0,\theta), \overline{v}_0(0,\theta), 0, \theta, 0), \\ P_0 u(0,\theta) = \left(h(x) - \varphi(q(x),x)\right)|_{x\in\partial D}, \\ P_0 u(+\infty,\theta) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Известно, что разрешимость задач (14) гарантирует условие **(A2)**. При этом существует единственное монотонное решение этой задачи, которое находится квадратурах и имеет стандартную экспоненциальную оценку (см., например, [8]):

$$|P_0 u(\xi,\theta)| < C\exp(-\varkappa\xi), C > 0, \varkappa > 0. \tag{15}$$

Ниже используем обозначения $\widetilde{u}(\xi,\theta) = P_0u(\xi,\theta) + \overline{u}_0(0,\theta)$ и $\Phi(\xi,\theta) = \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi}(\xi,\theta)$.

Функции $\bar{u}_1, \bar{v}_1$ определяются из линейной дифференциально-алгебраической системы:

$$\begin{cases} \overline{f}_u(x)\overline{u}_1 + \overline{f}_v(x)\overline{v}_1 + \overline{f}_\varepsilon(x) = 0, \\ \Delta\overline{v}_1 = \overline{g}_u(x)\overline{u}_1 + \overline{g}_v(x)\overline{v}_1 + \overline{g}_\varepsilon(x), \\ \overline{v}_1(x)|_{x\in\partial D} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Выразим из первого уравнения в (16) $\overline{u}_1$ и $\overline{v}_1$:

$$\overline{u}_1(x) = -\frac{\overline{f}_v(x)}{\overline{f}_u(x)}\overline{v}_1 - \frac{\overline{f}_\varepsilon(x)}{\overline{f}_u(x)}. \tag{17}$$

Для компоненты $\overline{v}_1$ получим задачу:

$$\begin{cases} \Delta\overline{v}_1 = \left[\overline{g}_v(x) - \dfrac{\overline{f}_v(x)}{\overline{f}_u(x)}\overline{g}_u(x)\right]\overline{v}_1 + \\ \qquad\qquad + \left(\overline{g}_\varepsilon(x) - \overline{g}_u(x)\dfrac{\overline{f}_\varepsilon(x)}{\overline{f}_u(x)}\right), \\ \overline{v}_1(x)|_{x\in\partial D} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Из условия **(A1)** следует, что

$$\left[\overline{g}_v(x) - \frac{\overline{f}_v(x)}{\overline{f}_u(x)}\overline{g}_u(x)\right] = \bar{g}_v(x) + \bar{\varphi}_v(x)\bar{g}_u(x),$$

В силу условия **(A4)** решение задачи (18) существует, единственно и может быть записано через функцию Грина (см., например, [9] and [10] (Теорема 3)). Учитывая (17), получим решение задачи дифференциально-алгебраической задачи (16).

Функция P_1u определится из задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_1u = \widetilde{f}_u(\xi,\theta)P_1u + P_1f(\xi,\theta), \\ P_1u(0,\theta) = -\overline{u}_1(0,\theta), \quad P_1u(+\infty,\theta) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где $P_1f(\xi,\theta)$ — известная функция:

$$P_1f(\xi,\theta) = \left(\widetilde{f}_u(\xi,\theta) - \overline{f}_u(0,\theta)\right)\overline{u}_1(0,\theta) + \\ + \left(\widetilde{f}_v(\xi,\theta) - \overline{f}_v(0,\theta)\right)\overline{v}_1(0,\theta) + \left(\widetilde{f}_x(\xi,\theta) - \overline{f}_x(0,\theta)\right)\xi + \\ + \left(\widetilde{f}_\varepsilon(\xi,\theta) - \overline{f}_\varepsilon(0,\theta)\right) + L_f^1[P_0u(\xi,\theta)]$$

(здесь и ниже знаком «$\widetilde{\ }$» будем обозначать функции, вычисленные в точке $(\overline{u}_0(0,\theta) + P_0u, \overline{v}_0(0,\theta), 0, \theta, 0)$. Решение задачи (19) можно записать в виде (см., например, [8]):

$$P_1u(\xi,\theta) = -\frac{\overline{u}_1(0,\theta)}{\Phi(0,\theta)}\Phi(\xi,\theta) + \\ + \Phi(\xi,\theta)\int\limits_0^\xi \frac{d\xi_1}{\Phi^2(\xi_1,\theta)}\int\limits_{+\infty}^{\xi_1}\Phi(\xi_2,\theta)P_1f(\xi_2,\theta)d\xi_2. \tag{20}$$

Функция P_2v определится из задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_2v = g(P_0u(\xi,\theta) + \overline{u}_0(0,\theta), \overline{v}_0(0,\theta), 0, \theta, 0) - \\ \qquad - g(\overline{u}_0(0,\theta), \overline{v}_0(0,\theta), 0, \theta, 0) = P_2g(\xi,\theta), \\ P_2v(+\infty,\theta) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial\xi}P_2v(+\infty,\theta) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

решение которой находится двукратным интегрированием и имеет экспоненциальную оценку.

Процесс построения формальной асимптотики может быть продолжен до произвольного порядка. Функции P_kv определятся из задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_kv = P_kg(\xi,\theta), \\ P_kv(+\infty,\theta) = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial\xi}P_kv(+\infty,\theta) = 0, \end{cases}$$

где $P_kg(\xi,\theta)$ известны на каждом шаге. Решения данных задач можно получить двукратным интегрированием виде, для них справедливы экспоненциальные оценки.

Функции регулярной части асимптотики определятся из дифференциально-алгебраических систем, аналогичных системе для $\overline{u}_1, \overline{v}_1$ (16). Разрешимость этих задач также обеспечивается условием **(A4)**.

Задачи для P_ku можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_ku = \widetilde{f}_u(\xi,\theta)P_ku + P_kf(\xi,\theta), \\ P_ku(0,\theta) = -\overline{u}_k(0,\theta), \quad P_ku(+\infty,\theta) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

здесь также $P_kf(\xi,\theta)$ известно при всех $1 \le k \le n$, а решение может быть получено в виде, аналогичном (20).

Таким образом можно определить все слагаемые формальной асимптотики (7) до произвольного порядка n. Из способа построения формальной асимптотики следует, что частичная сумма порядка n представления (7) $U_n(x,\varepsilon)$ и

$$\widetilde{V}_n(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}P_{n+1}v(\xi,\theta) + \\ + \varepsilon^{n+2}P_{n+2}v(\xi,\theta) \tag{23}$$

удовлетворяют задаче (2) по невязке с точность $O(\varepsilon^{n+1})$.

Отметим, что так как локальная система координат определена лишь в $\widetilde{\delta}$-окрестности границы ∂D, то для гладкого продолжения пограничных функций на всю область используется стандартная процедура умножения погранслойной части асимптотики на срезающую функцию (см, например, [7]).

Существование и асимптотическое приближение решения стационарной задачи

Доказательство существования решения стационарной задачи основывается на известных теоремах о дифференциальных неравенствах (см., например, [13]), для применения которых строятся так называемые верхние и нижние решения. Дадим им определение.

Определение 1. Пары функций $(\beta_u(x,\varepsilon), \alpha_u(x,\varepsilon))$ и $(\beta_v(x,\varepsilon), \alpha_v(x,\varepsilon))$, принадлежащие пространству $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ и удовлетворяющие следующим условиям при достаточно малых ε:

(B1) $\beta_u(x,\varepsilon) \geq \alpha_u(x,\varepsilon)$ при $x \in \overline{D}$,

(B2) $L_f(\beta_u, \beta_v) \leq 0 \leq L_f(\alpha_u, \alpha_v)$ при $x \in \overline{D}$,

(B3) $\beta_u(x,\varepsilon) \geq h(x) \geq \alpha_u(x,\varepsilon)$ при $x \in \partial D$,

а также аналогичным неравенствам для компоненты v, называются соответственно верхними и нижними решениями задачи (2).

Строить данные функции будем согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&U_{\beta n}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\mu_\beta u(x) + P_\beta u(\xi,\theta)\right),\\
&V_{\beta n}(x,\varepsilon) = \widetilde{V}_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_\beta v(x),\\
&U_{\alpha n}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\mu_\alpha u(x) + P_\alpha u(\xi,\theta)\right),\\
&V_{\alpha n}(x,\varepsilon) = \widetilde{V}_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \mu_\alpha v(x).
\end{aligned} \tag{24}$$

В представлении (24) $\widetilde{V}_n(x,\varepsilon)$ определена выражением (23), $\mu_\beta u(x)$ и $\mu_\beta v(x)$ — решения дифференциально-алгебраической системы

$$\begin{cases}
-\overline{f}_u(x)\mu_\beta u(x) - \overline{f}_v(x)\mu_\beta v(x) = -A,\\
\Delta\mu_\beta v - \overline{g}_u(x)\mu_\beta u - \overline{g}_v(x)\mu_\beta v = -B,\\
\mu_\beta v|_{x\in\partial D} = \delta_\beta v,
\end{cases} \tag{25}$$

где $A>0$, $B>0$ и $\delta_\beta v > 0$ — некоторые постоянные. Определим $\mu_\alpha u(x) = -\mu_\beta u(x)$ и $\mu_\alpha v(x) = -\mu_\beta v(x)$.

Имеет место следующий результат.

Лемма 1. При выполнении условий **(A1)**, **(A3)**, **(A4)** дифференциально-алгебраическая система (25) имеет решение $\mu_\beta u(x) \geq 0$, $\mu_\beta v(x) \geq 0$.

Доказательство. Дифференциально-алгебраическая система (25) приводится к виду

$$\mu_\beta u(x) = -\frac{\overline{f}_v(x)}{\overline{f}_u(x)}\mu_\beta v(x) + \frac{A}{\overline{f}_u(x)},$$

$$\begin{cases}
\Delta\mu_\beta v = \left[\overline{g}_v(x) - \dfrac{\overline{f}_v(x)}{\overline{f}_u(x)}\overline{g}_u(x)\right]\mu_\beta v + \\
\qquad\qquad + \left(\dfrac{\overline{g}_u(x)}{\overline{f}_u(x)}A - B\right),\\
\mu_\beta v(x)|_{x\in\partial D} = \delta_\beta v,
\end{cases} \tag{26}$$

где $\left(\dfrac{\overline{g}_u(x)}{\overline{f}_u(x)}A - B\right) < 0$ в силу условий **(A1)** и **(A3)**. В силу условия **(A4)** задача для $\mu_\beta v(x)$ в (26) имеет положительное решение (см., например, [9] and [10] (Теорема 3)). Из первого уравнения системы (26) очевидным образом следует, что $\mu_\beta u(x) > 0$.

Определим функцию $P_\beta u$ из задачи:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_\beta u = \widetilde{f}_u(\xi,\theta)P_\beta u + P_\beta f(\xi,\theta),\\
P_\beta u(0,\theta) = \delta_\beta u - \mu_\beta u(x)|_{x\in\partial D},\\
P_\beta u(+\infty,\theta) = 0,
\end{cases} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
P_\beta f(\xi,\theta) = (\widetilde{f}_u(\xi,\theta) - \overline{f}_u(0,\theta))\mu_\beta u(0,\theta) + \\
+ (\widetilde{f}_v(\xi,\theta) - \overline{f}_v(0,\theta))\mu_\beta v(0,\theta) - C_u e^{-\varkappa_u \xi},
\end{aligned}$$

$\delta_\beta u > 0$, $C_u > 0$ и $\varkappa_u > 0$ — некоторые константы.

В силу оценок (15) можно выбрать такие $C_u > 0$ и $\varkappa_u > 0$, что $P_\beta f(\xi,\theta) < 0$. Выберем $\delta_\beta u$ так, что $P_\beta u(0,\theta) > 0$. Из явного представления $P_\beta u(\xi,\theta)$

$$P_\beta u(\xi,\theta) = \frac{\delta_\beta u - \mu_\beta u(0,\theta)}{\Phi(0,\theta)}\Phi(\xi,\theta) +$$

$$+ \Phi(\xi,\theta)\int\limits_0^\xi \frac{d\xi_1}{\Phi^2(\xi_1,\theta)}\int\limits_{+\infty}^{\xi_1}\Phi(\xi_2,\theta)P_\beta f(\xi_2,\theta)d\xi_2 \tag{28}$$

следует положительность и экспоненциальное убывание этой функции. Функцию $P_\alpha u(\xi,\theta)$ определим как $P_\alpha u(\xi,\theta) = -P_\beta u(\xi,\theta)$.

Из представления (24) следует упорядоченность нижнего и верхнего решений и удовлетворение граничных неравенств. Проверка дифференциальных неравенств проводится стандартным образом с учетом задач для формальной асимптотики и задач для ее модификации.

Таким образом, построенные функции $(U_{\beta n}, V_{\beta n})$, $(U_{\alpha n}, V_{\alpha n})$ являются верхним и нижним решением для задачи (2). Из теорем сравнения следует существование решения задачи (2), заключенного между нижним и верхним решениями. Из представления этих функций (см. (24)) следует теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия **(A0)–(A4)**. Тогда при достаточно малом ε существует решение $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ задачи (2) с пограничным слоем вблизи ∂D, для которого построенные функции $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ при $x \in \overline{D}$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Доказательство асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (1) проводится по схеме, предложенной в [14] (см. [6] и ссылки в этой работе). Для этого используются верхнее и нижнее решения для нестационарной задачи (1) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u_{\beta n}(x,t,\varepsilon) &= u_s(x,\varepsilon) + (U_{\beta n}(x,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon))\, e^{-\lambda t},\\
v_{\beta n}(x,t,\varepsilon) &= v_s(x,\varepsilon) + (V_{\beta n}(x,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon))\, e^{-\lambda t},\\
u_{\alpha n}(x,t,\varepsilon) &= u_s(x,\varepsilon) - (U_{\alpha n}(x,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon))\, e^{-\lambda t},\\
v_{\alpha n}(x,t,\varepsilon) &= v_s(x,\varepsilon) - (V_{\alpha n}(x,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon))\, e^{-\lambda t}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Здесь $u_s(x,\varepsilon)$ и $v_s(x,\varepsilon)$ — решения задачи (2), $\lambda = O(1) > 0$ — произвольно выбранная постоянная. Проверка соответствующих условий определения нижнего и верхнего решений задачи (1) проводится стандартным образом (определение нижнего и верхнего решений начально-краевой задачи для параболической системы можно найти, например в [13]). При этом легко устанавливается, что достаточная точность стационарных нижнего и верхнего решений при $n = 1$. Из структуры верхнее и нижнее решения для нестационарной задачи и единственности решения задачи (1) следует теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия **(A0)–(A4)**. Тогда при достаточно малом ε решение $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ задачи (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область притяжения не менее $(U_{\alpha 1}, U_{\beta 1}) \times (V_{\alpha 1}, V_{\beta 1})$. Это решение также локально единственно как решение задачи (2) в этой области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выявлены условия существования устойчивого по Ляпунову стационарного решения задачи (1) с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. Данный результат применим для обоснования моделей химической кинетики и для построения оптимальных численных методов их решения. Дальнейшее развитие возможно в контексте других граничных условий и при рассмотрении задачи с переходными слоями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-11-00069).

---

[1] *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* // Journal of Mathematical Sciences. **121**:1. 1973 (2004).

[2] *Тихонов А.Н.* // Матем. сб. **31(73)**:3 575 (1952).

[3] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

[4] *Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н.* // Диффер. уравнения. **56**:4. 475 (2020). (*Melnikova A.A., Deryugina N.N.* // Differential Equations. **56**:4. 462 (2020)).

[5] *Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 3. 48 (2018). (*Melnikova A.A., Derugina N.N.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **73**, N 3. 284 (2018)).

[6] *Нефедов Н.Н.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **61**:12. 2074 (2021). (*Nefedov N.N.* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. **61**:12. 2068 (2021)).

[7] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

[8] *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* // Автоматика и телемеханика. **7**. 4 (1997).

[9] *Amann H.* // SIAM review. **18**:4 620 (1976).

[10] *Calc N.P.* // Proceedings of the American Mathematical Society. **88**, N 1. 47 (1983).

[11] *Нефедов Н.Н., Дерюгина Н.Н.* // ТМФ. Астрономия. **212**. 83 (2022). (*Nefedov N.N., Deryugina N.N.* // Theoretical and Mathematical Physics. **212**. 962 (2022)).

[12] *Мельникова А.А.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **59**:7. 1184 (2019). (*Melnikova A.A.* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. **59**:7. 1131 (2019)).

[13] *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.

[14] *Нефедов Н.Н.* // Диффер. уравнения. **36**:2. 262 (2000). (*Nefedov N.N.* // Differ.Uravn. **36** 262 (2000)).

Existence and Stability of a Stationary Solution in a Two-Dimensional Reaction-Diffusion System with Slow and Fast Components

N. N. Nefedov[a], **K. A. Kotsubinsky**[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*nefedov@phys.msu.ru*, [b]*kkotsubinsky@gmail.com*

In the paper, the existence of a stable stationary solution in a reaction-diffusion system with slow and fast components in a two-dimensional spatial variable case is investigated. The theorem of the existence of a stationary solution with boundary layers in the case of Dirichlet boundary conditions is proven, its asymptotic approximation is constructed, and conditions for Lyapunov asymptotic stability of this solution are obtained. The research is based on the asymptotic method of differential inequalities, applied to a new class of problems. This result is practically important both for various applications described by similar systems and for the application of numerical stationing methods when solving elliptical boundary value problems.

PACS:

Keywords: reaction-diffusion system, singularly perturbed system of second-order differential equations, small parameter, Lyapunov stability, asymptotic method.
Received 02 March 2024.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 3. Pp. .

Сведения об авторах

1. Нефедов Николай Николаевич — доктор физ.-мат наук, профессор, зав. кафедрой; (495) 939-48-59, e-mail: nefedov@phys.msu.ru.
2. Коцюбинский Константин Алексеевич — аспирант; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: kkotsubinsky@gmail.com.