

Особенности диффузных волновых полей в рассеивающих средах с градиентами коэффициента преломления

Я. А. Илюшин^{1,2,*}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Институт радиотехники и электроники В. А. Котельникова РАН
Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

(Поступила в редакцию 03.03.2024; после доработки 26.03.2024; подписана в печать 01.04.2024)

В настоящей работе исследуется перенос излучения в средах с градиентами коэффициента преломления. Выводятся асимптотики распределений интенсивности в окрестностях сингулярных направлений. Формулируются критические условия появления сингулярных распределений интенсивности в полях рассеянного излучения в среде. Показывается, что сингулярные радиационные поля в таких средах могут порождаться в том числе несингулярными конфигурациями источников излучения. Проверка полученных результатов проводится непосредственным сравнением с результатами численных расчетов методом статистического моделирования Монте–Карло.

PACS: 42.68.Ay. УДК: 535.36

Ключевые слова: перенос излучения, сингулярность, коэффициент преломления.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.79.2430302](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.79.2430302)

ВВЕДЕНИЕ

Особенности пространственного и углового распределений интенсивности и поляризации [1–3] являются важными физическими характеристиками диффузных волновых полей, которые являются предметом исследования теории переноса излучения. Кроме того, при практических расчетах переноса излучения в средах эти особенности нарушают работу численных расчетных схем, не приспособленных специально для этих случаев [4–6]. В связи с этим эти особенности необходимо регуляризовать [5–7], особенно в средах с сильно анизотропным рассеянием [8]. По этим причинам сингулярности играют важную роль в теории переноса излучения и представляют значительный интерес для исследования. Несмотря на это, в настоящее время опубликовано сравнительно немного работ по этой теме. Во многих численных исследованиях переноса излучения эти особенности аподизируются [6, 9] или просто игнорируются [4, 9].

Гермогенова [2] изучила и классифицировала особенности нескольких основных типов источников излучения, в том числе точечных мононаправленных (ТМ), точечных изотропных (ТИ), плоских мононаправленных (ПМ) и некоторых других [7]. Как следует из ее исследований, особенности яркости однозначно связаны с соответствующими особенностями функций источника излучения. Согласно Гермогеновой операторы рассеяния и распространения поля обладают сглаживающими свойствами,

так что изучаемые там особенности поля проявляются только в низких порядках рассеяния и сглаживаются с каждым последующим актом рассеяния. Источник ТМ создает наиболее сложную структуру поля в рассеивающей среде. Особенности этого поля проявляются в трех низших порядках рассеяния. Однократно рассеянное излучение источника ТМ более подробно изучено в [1, 3]. В этих работах получены явные выражения для яркости в прямом и обратном направлениях, учитывающие особенности. Позже было показано [10], что особенности в передней и задней полусферах симметричны, и установлено отношение эквивалентности, справедливое для произвольного порядка рассеяния.

Градиенты показателя преломления в рассеивающей среде требуют соответствующей модификации уравнения переноса излучения [11–13]. К таким средам относится космическая и звездная плазма [14–16], где показатель преломления вблизи плазменной частоты может изменяться в широких пределах. Рассеяние электромагнитных волн в плазме с флуктуациями вызывает значительный исследовательский интерес в связи с многочисленными научными и практическими приложениями [11, 17]. Теория переноса излучения, первоначально предложенная для оптического излучения в среде дискретных частиц, затем была адаптирована для радиоволн в флуктуирующей плазме с непрерывным распределением электронной плотности [12, 18]. Например, эффект усиления когерентного обратного рассеяния, играющий сейчас большую роль в оптических исследованиях, был впервые предсказан при исследовании обратного рассеяния в плазме применительно

* E-mail: ilyushin@phys.msu.ru

к моностатическому радиолокационному зондированию [19].

Кроме того, в настоящее время активно изучаются и разрабатываются и получают широкое применение искусственные диэлектрические и оптические материалы с заданными свойствами, в том числе с градиентами преломления [20]. В частности, исследуются и разрабатываются покрытия с непрерывно изменяющимся показателем преломления для эффективного поглощения и испускания теплового излучения [21, 22]. В таких средах могут возникать сингулярности яркости диффузных полей излучения без соответствующих сингулярностей в исходных функциях источников излучения. Такие особенности возникают из-за кривизны траекторий лучей и могут формироваться рассеянным излучением сколь угодно высокого порядка [23].

Соловьев в своих работах [24, 25] исследовал, как лучевые каустики, образующиеся в преломляющей среде, частично разрушаются при рассеянии. В отличие от него в работе [23] показано, как в поле рассеянного излучения могут формироваться особенности яркости, отсутствующие в функциях источников. Целью настоящей работы является исследование особенностей более общего вида.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Уравнение переноса излучения в преломляющей среде

Скалярное уравнение переноса излучения (УПИ) в среде с неоднородным пространственным распределением показателя преломления [13]

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{L}{n^2} \right) + \frac{\varepsilon L}{n^2} = \frac{S}{n^2} + \frac{e}{n^2}, \quad (1)$$

где

$$S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' \quad (2)$$

— интеграл рассеяния, $e(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ — функция источника УПИ, $L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ — яркость, $x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')$ — фазовая функция, $n(\mathbf{r})$ — показатель преломления, $\varepsilon = \mu_a + \mu_s$ — объемный коэффициент экстинкции, $\Lambda = \mu_s/\varepsilon$ — альbedo однократного рассеяния, μ_a и μ_s — объемные коэффициенты поглощения и рассеяния, s — длина пути излучения по траектории луча, $\boldsymbol{\Omega} = \{\mu_x, \mu_y, \mu_z\}$ — единичный вектор направления излучения, $\mu_x = \cos \phi \sin \theta$, $\mu_y = \sin \phi \sin \theta$, $\mu_z = \cos \theta$ — направляющие косинусы, θ и ϕ — полярный и азимутальный углы в сферической системе координат. Здесь и далее предполагается, что μ_a , μ_s и ε постоянны во всей среде. Кроме того, в связи с дальнейшим использованием диффузионного приближения мы предполагаем, что $\mu_s \gg \mu_a$.

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде интеграла вдоль траектории луча в прелом-

ляющей среде: [23]

$$\frac{L}{n^2} = \int_{s_0}^{\infty} e^{-\varepsilon s'} \frac{S(\mathbf{r}(s'), \boldsymbol{\Omega}(s')) + e(\mathbf{r}(s'), \boldsymbol{\Omega}(s'))}{n^2(s')} ds', \quad (3)$$

где длина пути s по траектории луча отсчитывается от точки наблюдения против излучения, т.е. μ_0 — косинус полярного угла направления визирования.

Следуя [26–28], вычислим интеграл рассеяния S в диффузионном приближении. Это означает, что мы находим решение уравнения диффузии фотонов для данной конфигурации источников излучения, вычисляем интеграл рассеяния S для этого решения и подставляем его в формальное решение УПИ (3). После этого мы используем методы асимптотического разложения, чтобы получить простое приближенное выражение для яркости вблизи сингулярного направления.

1.2. Уравнение диффузии фотонов в преломляющей среде

Уравнение диффузии фотонов в среде с градиентом рефракции [13] записывается в виде

$$-\nabla \cdot \left(D n^2 \nabla \frac{\phi(\mathbf{r})}{n^2} \right) + \mu_a \phi(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где

$$E(\mathbf{r}) = \oint_{4\pi} e d\boldsymbol{\Omega} \quad (5)$$

— локальная интенсивность всех источников в среде $e(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$, усредненная по всей сфере направлений [13],

$$\phi(\mathbf{r}) = \oint_{4\pi} L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad (6)$$

— актинический поток. В уравнении (4) $n(\mathbf{r})$ — показатель преломления среды, D — коэффициент диффузии,

$$D = \frac{1}{3(\mu_a + (1-g)\mu_s)}, \quad (7)$$

g — параметр асимметрии рассеяния (косинус среднего угла рассеяния) [29]. Согласно [13, 29] яркость $L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ в диффузионном приближении равна:

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \phi(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad (8)$$

где поток излучения $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ в стационарном диффузионном поле равен [13]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D \nabla \phi(\mathbf{r}) + \frac{2D}{n(\mathbf{r})} \phi(\mathbf{r}) \nabla n(\mathbf{r}). \quad (9)$$

В частном случае одномерных задач $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = L(z, \mathbf{\Omega})$, поэтому поток $J(z) = \mathbf{J}_z$ есть

$$J(z) = -D \frac{\partial}{\partial z} \phi(z) + \frac{2D}{n(z)} \phi(z) \frac{\partial}{\partial z} n(z) \quad (10)$$

и

$$L(z, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \phi(z) + \frac{3}{4\pi} J \mu_z. \quad (11)$$

1.3. Модель среды

Рассмотрим плоскостойкую полубесконечную ($z > 0$) среду с экспоненциальным плоскостойким распределением коэффициента преломления

$$n(z) = n(0) e^{\gamma z}, \quad (12)$$

т.е. $\gamma = \partial \ln n(z) / \partial z = \text{const}$. В данной работе исследуем функцию источников вида

$$e(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = e_0(\mathbf{\Omega}) e^{-bz} z^\beta, \quad (13)$$

где $b > 0$ — постоянный коэффициент.

1.4. Интегральное представление решения уравнения диффузии фотонов через функцию Грина

В общем случае наклонного падения решение уравнения диффузии фотонов $\phi(z)$ выражается че-

$$G(z, z') = \begin{cases} C_1(z') \exp(\gamma z - z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}) + C_2(z') \exp(\gamma z + z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}), & z_1 < z < z' < z_2, \\ C_3(z') \exp(\gamma z - z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}) + C_4(z') \exp(\gamma z + z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}), & z_1 < z' < z < z_2. \end{cases} \quad (18)$$

Функция Грина (18) удовлетворяет краевым условиям задачи (16a), (16b) и условиям сшивки при $z = z'$

$$G(z, z') = G(z', z), \quad (19)$$

$$\partial G(z, z')|_{z \rightarrow z'+0} - \partial G(z, z')|_{z \rightarrow z'-0} = 1/D. \quad (20)$$

Подставляя функцию источников уравнения диффузии фотонов (5), соответствующую функции источников УПИ (13), в интегральное представление (14), получим соответствующее решение уравнения диффузии фотонов $\phi(z)$. С его помощью по формулам раздела (1.2) получим выражение для яркости (8) и интеграла рассеяния (2). Схематическое эскизное изображение графика соответствующей подынтегральной функции показано на рис. 1. Как следует из графика, при $z = z'$ имеет место негладкий максимум подынтегральной функции. Исследуя известными методами [31, 32] его асимптотику на больших глубинах $z \rightarrow \infty$, можно показать, что главная асимптотика правой части УПИ (1) с точностью до множителя, зависящего от направления, совпадает с функцией источников (13)

рез функцию Грина

$$\phi(z) = \int_0^\infty G(z, z') E(z') dz'. \quad (14)$$

Функция Грина одномерного уравнения диффузии фотонов $G(z, z')$ является решением уравнения:

$$\mu_a G(z, z') + 2\gamma D \frac{d}{dz} G(z, z') - D \frac{d^2}{dz^2} G(z, z') = \delta(z - z'), \quad (15)$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$G(-z_0, z') = 0, \quad (16a)$$

$$G(+\infty, z') < \infty, \quad (16b)$$

где z_0 — длина экстраполяции граничного условия [29].

Общее решение однородного уравнения (15) записывается в виде

$$G(z, z') = C_1 \exp(\gamma z - z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}) + C_2 \exp(\gamma z + z \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}). \quad (17)$$

Будем искать функцию Грина краевой задачи для уравнения (15) с граничными условиями (16a), (16b) в виде линейной комбинации базисных решений однородного уравнения (15) [30]:

и определяется ею. Вследствие формул (3) асимптотика сингулярности углового распределения интенсивности (42) также полностью определяется функцией источников УПИ (13). Поэтому дальнейшее исследование сводится к анализу интегрального представления решения (3) фактически без учета интеграла рассеяния $S(\mathbf{r}(s'), \mathbf{\Omega}(s'))$ для одной лишь только функции источников $e(\mathbf{r}(s'), \mathbf{\Omega}(s'))$ (13).

1.5. Уравнения геометрической оптики в плоскостойкой преломляющей среде

Траектории лучей в плоскостойкой преломляющей слоистой среде подчиняются закону Снеллиуса:

$$n(z) \sin \theta = n_0 \sin \theta_0 = \text{const} \quad (21)$$

(здесь и далее индекс «0» обозначает значения в начальной точке луча). Из дифференциальных уравнений луча

$$dz = \mu_z ds \quad (22)$$

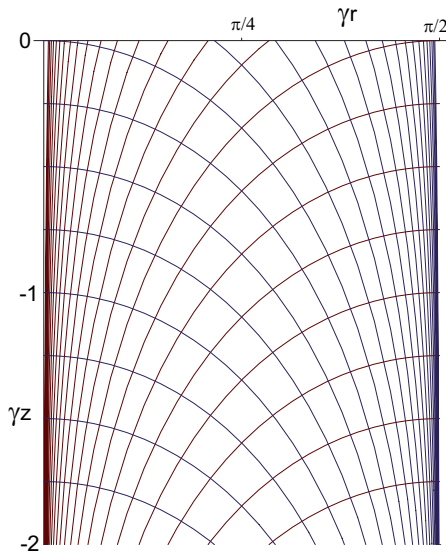


Рис. 1. (В цвете онлайн) Семейства взаимно ортогональных лучевых траекторий (31) и (35)

для распределения показателя преломления (12), рассматриваемого здесь вместе с (21),

$$dr = \sqrt{1 - \mu_z^2} ds. \quad (23)$$

$$\phi = \text{const}, \quad (24)$$

вместе с (21) для рассматриваемого здесь распределения показателя преломления (12), получаем уравнения лучей в параметрической форме

$$\gamma(z - z_0) = \ln \left(\frac{1 + \mu_0}{2} e^{\gamma(s-s_0)} + \frac{1 - \mu_0}{2} e^{-\gamma(s-s_0)} \right), \quad (25)$$

$$\gamma r = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma(s-s_0)} \sqrt{\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}} \right), \quad (26)$$

где $\mu_z(s) = dz/ds$, $z_0 = z(s_0)$ — начальная точка траектории луча, а $\mu_0 = \mu_z(z_0)$ — соответствующее значение направляющего косинуса в этой начальной точке.

Разрешая уравнение (25) относительно длины пути луча s получаем

$$\gamma(s - s_0) = \ln \left(\frac{e^{\gamma z} \pm \sqrt{\mu_0^2 + e^{2\gamma(z-z_0)} - 1}}{\mu_0 + 1} \right). \quad (27)$$

Полагая $\mu = 0$, находим точку поворота луча

$$(z_{\text{turn}} - z_0) = \frac{\ln(1 - \mu_0^2)}{2\gamma}. \quad (28)$$

Легко показать, что локальный радиус кривизны траектории луча в произвольной ее точке равен

$$R = \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (29)$$

Когда в какой-то точке луча $R \gg l$, тогда кривизной луча в этой точке можно пренебречь, т.е. ход луча можно локально аппроксимировать прямой линией.

Аналогично, разрешая относительно s уравнение (26) для горизонтального смещения луча, получим

$$\gamma(s - s_0) = \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \mu_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma r}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\mu_0 + 1}}{\sqrt{1 - \mu_0}} \right) \right)}{\sqrt{\mu_0 + 1}} \right). \quad (30)$$

Подставляя (30) в (25) и полагая $\mu_0 = 0$, получим уравнение траектории луча в непараметрической форме:

$$\gamma(z - z_0) = -\ln \cos \gamma r. \quad (31)$$

Найдём уравнения кривых, всюду нормальных к семейству лучевых траекторий (31). Производные (25) и (26) по параметру s соответственно равны:

$$\frac{dz}{ds} = \sin \gamma r, \quad (32)$$

и

$$\frac{dr}{ds} = \cos \gamma r. \quad (33)$$

Следовательно, таким образом, кривые искомого семейства, всюду ортогональные к (31), удовлетворяют уравнению

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \gamma r, \quad (34)$$

решение которого с точностью до произвольной аддитивной константы выражается формулой

$$\gamma(z - z_0) = -\ln \sin \gamma r. \quad (35)$$

Нетрудно заметить, что (35) также является уравнением траектории луча в среде с другими начальными условиями. Ортогональные друг другу семейства лучевых траекторий (31) и (35) вместе определяют систему ортогональных координат в полосе $0 \leq \gamma r \leq \pi/2$ (рис. 2).

1.6. Асимптотика сингулярной интенсивности вблизи нормали к поверхности границы

Мы ожидаем, что подынтегральная функция в (3) будет возрастать до точки поворота траектории луча, если отрицательный градиент показателя преломления достаточно силен. Его окрестность вносит определяющий вклад в интеграл, т.е. определяет асимптотическое поведение наблюдаемой интенсивности. Эти качественные соображения можно формализовать.

Как показано в [23], при достаточно сильном отрицательном градиенте показателя преломления среды $\gamma < 0$ определяющий вклад в интеграл (3)

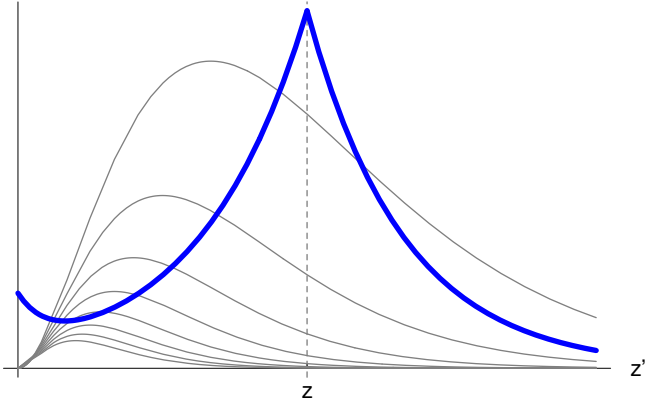


Рис. 2. (В цвете онлайн) Схематическое эскизное изображение графика подынтегральных функций в интегральном представлении решения уравнения диффузии фотонов (14). Жирная кривая — функция Грина $G(z, z')$ (18), тонкие кривые — различные функции источников уравнения диффузии фотонов $E(z')$

вносит окрестность точки поворота луча. Это позволяет записать интегральное представление решения в виде интеграла Лапласа и исследовать его асимптотику с помощью известных приёмов. Без ограничения общности объёмный коэффициент ослабления в среде положим равным единице $\varepsilon = 1$.

Подставим параметрическое решение (25) для $z(s)$ в формулу (3) с функцией источника (13) и запишем его в виде интеграла Лапласа [31, 32]

$$L = \int e^{\Phi(s)} f(s) ds, \quad (36)$$

где $f(s)$ — функция, меняющаяся гораздо медленнее, чем $e^{\Phi(s)}$.

В рассматриваемом здесь случае в интеграле (2)

$$\Phi(s) = \ln \left(e^{-s} \left(\frac{1}{2} e^{-s\gamma} (1 - \mu_0) + \frac{1}{2} e^{s\gamma} (\mu_0 + 1) \right)^{-\frac{b}{\gamma} - 2} \right), \quad (37)$$

$f(s) = z^\beta(s)$. Можно показать, что при условии

$$\gamma < -\frac{1+b}{2} \quad (38)$$

$\Phi(s)$ достигает своего максимального значения во внутренней точке области интегрирования. Это максимальное значение бесконечно растёт, когда μ_0 приближается к единице. В противном случае,

когда показатель показателя преломления γ превышает свое критическое значение (38), подынтегральная функция интеграла Лапласа (36) достигает максимума в начальной точке области интегрирования $s = 0$ и ограничена для любого μ_0 . Из условия $\Phi'(s) = 0$ можно найти точку максимума s^* :

$$\exp(2\gamma s^*) = \frac{-(\mu_0^2 - 1)b^2 - 4\gamma(\mu_0^2 - 1)b + 4\gamma^2 - 4\gamma^2\mu_0^2 + \mu_0^2 - 1}{(b + 2\gamma + 1)^2(\mu_0 + 1)^2}. \quad (39)$$

Вторая производная от $\Phi(s)$ в точке максимума s^* соответственно равна:

$$\Phi''(s^*) = -\frac{\gamma(b + 2\gamma - 1)(b + 2\gamma + 1)}{b + 2\gamma}. \quad (40)$$

Нетрудно заметить, что она не зависит от направления косинуса μ_0 в конце траектории (3). Аппроксимация $\Phi(s)$ вблизи s^* квадратичной функцией даёт приближенное асимптотическое значение интеграла (3) [31, 32]:

$$L \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\Phi''(s^*)}} \exp(\Phi(s^*)) f(s^*). \quad (41)$$

Это выражение, в свою очередь, можно разложить в ряд по степеням μ_0 в особой точке $\mu_0 = -1$. Главная асимптотика этого ряда имеет вид:

$$\begin{aligned} L(\mu_0) &\propto (1 - \mu_0)^{-1 - \frac{1+b}{2\gamma}} \ln^\beta(1 - \mu_0) \equiv \\ &\equiv (1 - \mu_0)^\alpha \ln^\beta(1 - \mu_0). \end{aligned} \quad (42)$$

В частности, когда $b = 1$ (коллимированное излучение, нормально падающее на границу полубес-

конечной слоистой среды) и $b = 0$ (тепловое излучение изотермической поглощающей среды), показатель степени особенности α равен $\alpha = 1 - \gamma^{-1}$ и $\alpha = 1 - \gamma^{-1}/2$ соответственно. При невыполнении условия (38) не выполняется, асимптотическое разложение интеграла (36) определяется вкладом граничной точки области интегрирования в s и особенностей нет. Следует отметить, что коэффициент $b_- = \gamma - \sqrt{\gamma^2 + \mu_a/D}$ в решении уравнения однородной диффузии фотонов никогда не удовлетворяет критическому условию (38). Поэтому диффузное излучение не образует сингулярного распределения интенсивности.

1.7. Особый случай

Отдельный особый интерес представляет специальный случай:

$$2\gamma = -(1 + b). \quad (43)$$

В этом случае дополнительный множитель z^β должен быть включен в фазовую функцию инте-

грала

$$S(s) = -s - bz(s) - 2\gamma z(s) + \beta \ln z(s). \quad (44)$$

Производная фазовой функции тогда оказывается равной

$$\frac{-\beta(1+b)(-1+t+\mu_0+t\mu_0) - 4(1-\mu_0)\ln p}{2(1+t-\mu_0+t\mu_0)\ln p}, \quad (45)$$

где $t = e^{2\gamma s}$,

$$p = \frac{1+t-\mu_0+t\mu_0}{2\sqrt{t}}. \quad (46)$$

Приравнивая производную (45) нулю, получаем уравнение относительно s для определения стационарной точки подынтегральной функции. В данном случае уравнение получается трансцендентным и его решение в элементарных функциях невозможно. Анализ данного случая, в т.ч. решение этого уравнения, выходит за рамки настоящего исследования.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сингулярные распределения интенсивности моделировались численно методом Монте-Карло. Использованный для этого алгоритм ранее применялся в [27, 28]. Однако исследованные там поля излучения не были сингулярными, так как критическое условие (38) не выполнялось. Для расчета была выбрана функция рассеяния Рэлея. Поглощением в среде и поляризацией излучения пренебрегали.

$$\int \nu^\alpha \ln \nu \, d\nu = \frac{\nu^{\alpha+1}((\alpha+1)\ln(\nu) - 1)}{(\alpha+1)^2}, \quad (51a)$$

$$\int \nu^\alpha \ln^2 \nu \, d\nu = \frac{\nu^{\alpha+1}((\alpha+1)^2 \ln^2(\nu) - 2(\alpha+1)\ln(\nu) + 2)}{(\alpha+1)^3}, \quad (51b)$$

$$\int \nu^\alpha \ln^3 \nu \, d\nu = \frac{\nu^{\alpha+1}((\alpha+1)^3 \ln^3(\nu) - 3(\alpha+1)^2 \ln^2(\nu) + 6(\alpha+1)\ln(\nu) - 6)}{(\alpha+1)^4}, \quad (51c)$$

$$\int \nu^\alpha \ln^{1/2} \nu \, d\nu = \frac{\nu^{\alpha+1} \ln^{1/2}(\nu)}{\alpha+1} - \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\alpha+1} \ln^{1/2}(\nu)\right)}{2(\alpha+1)^{3/2}}. \quad (51d)$$

На рис. 3, 4 показаны результаты численного расчета углового распределения интенсивности в окрестности особенности $\mu = 1$. Сплошные кривые — статистическое моделирование методом Монте-Карло. За исключением особого случая $2\gamma = -(1+b)$ (рис. 4) проведено сравнение с полученными в работе асимптотическими выражениями (пунктирные и штрихпунктирные кривые — асимп-

Для регуляризации расчета вычислялось число фотонов $N(\mu)$, вышедших из среды через границу в пределах узкого конуса направлений $-\mu_z < -\mu$:

$$N(\mu) \propto \int_{\mu_0}^1 L(0, \mu) \mu \, d\mu. \quad (47)$$

Для функции источников со степенным множителем z^β (13) интегрирование сингулярного распределения интенсивности (42) может быть произведено по частям. Полагая $\nu = (1 - \mu)$, получим:

$$\int \nu^\alpha \ln^\beta \nu \, d\nu = \nu^{\alpha+1} \ln^\beta \nu - \int \frac{\nu^{\alpha+1}}{\alpha+1} \beta \ln^{\beta-1} \nu \, d\nu, \quad (48)$$

т.е. интегрирование по частям позволяет понизить степень логарифма в подынтегральной функции на единицу. Повторяя интегрирование по частям, получим бесконечный ряд слагаемых с различными степенями $\ln \nu$. Очевидно, что главную асимптотику интегрального числа фотонов $N(\mu)$ в нуле определяет первое слагаемое (48) с наибольшим β и наименьшим α , т.е.

$$N(\mu) \propto (1 - \mu)^{\alpha+1} \ln^\beta(1 - \mu). \quad (49)$$

В общем случае интегрирование сингулярного распределения интенсивности (42) приводит к неполной гамма-функции:

$$\int \nu^\alpha \ln^\beta \nu \, d\nu = -\Gamma(\beta+1, -(\alpha+1)\ln(\nu)) \ln^{\beta+1}(\nu) \times \\ \times (-(\alpha+1)\ln(\nu))^{-\beta-1}. \quad (50)$$

Для некоторых частных значений показателя степени β логарифма $\ln \nu$ в (42) интегрирование приводит к сумме конечного числа слагаемых. Так,

отитические оценки (49) и (51) соответственно.

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования особого случая (43). Можно заметить усиление сингулярности с ростом показателя степени β в функции источников (13).

На представленных графиках можно отметить качественное соответствие результатов численного расчета и приближенных аналитических моделей.

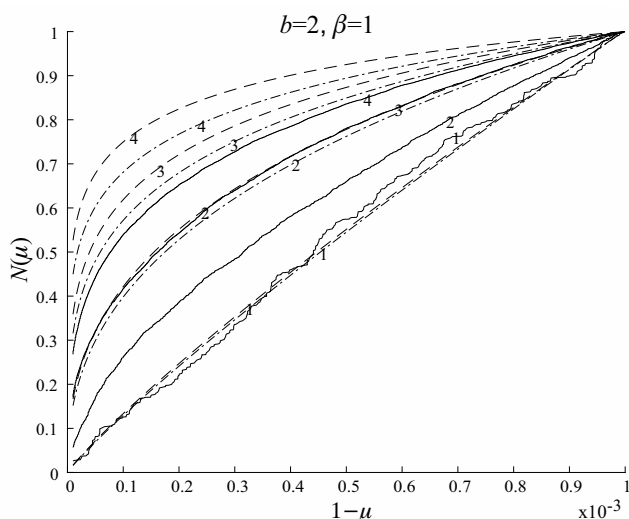


Рис. 3. Интегральное число фотонов $N(\mu)$ (47). Чтобы показать все кривые на одном графике, каждая из них нормирована на произвольную константу. Значения логарифмической производной показателя преломления $-\gamma/\varepsilon$ показаны числами при каждой кривой соответственно

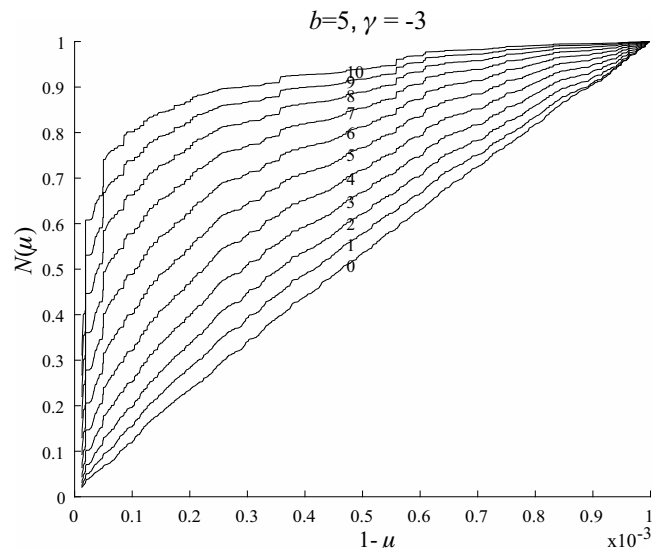


Рис. 4. Особый случай (43). Интегральное число фотонов $N(\mu)$ (47). Чтобы показать все кривые на одном графике, каждая из них нормирована на произвольную константу. Значения показателей степени β показаны числами при каждой кривой соответственно

Видимые расхождения следует объяснить упрощениями и огрублениями расчета, неоднократно допущенными здесь при выводе асимптотик.

3. ВЫВОДЫ И ЗАМЕЧАНИЯ.

Исследованы пространственно угловые распределения интенсивности диффузных волновых полей в средах с градиентами коэффициента преломления.

Показано, что сингулярные радиационные поля в таких средах могут порождаться в том числе несингулярными конфигурациями источников излучения. Получены и исследованы приближенные

аналитические выражения для распределений интенсивности в окрестностях сингулярных направлений. Сформулированы критические условия появления сингулярных распределений интенсивности в полях рассеянного излучения в среде. Проведена проверка полученных результатов непосредственным сравнением с результатами численных расчетов методом статистического моделирования.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова [33].

Настоящее исследование частично поддержано грантом РФФ № 22-27-00396.

- [1] *Siewert C.E.* // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **33**. 551 (1985).
- [2] *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
- [3] *Sanchez R.* // *Annals of Nuclear Energy.* **27**. 1167 (2000).
- [4] *Helliwell W.S.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **2**. 1325 (1985).
- [5] *Plyushin Y.A., Budak V.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **28**, N 2. 76 (2011).
- [6] *Plyushin Y.A., Budak V.* // *J. Opt. Soc. Am. A* **28**. 1358 (2011).
- [7] *Budak V., Klyuykov D.A., S.V. Korkin,* Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010., pp. 147–203.
- [8] *Feinstein D.L., Butler F.E., Piech K.R., Leonard A.* // *The Phys. Fluids.* **15**. 1641 (1972).
- [9] *Долы И.С., Сергеева Е.А.* // *Изв. ВУЗов. Радио-*

физика. **44**. 931 (2001).

- [10] *Plyushin Ya.A.* Backscattering // *J. Opt. Soc. Am. A.* **29**. 1986 (2012).
- [11] *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. М.: Мир, 1971.
- [12] *Smerd S.F., Westfold K.C.* // *Phil. Mag.* **40**. 831 (1949).
- [13] *Shendeleva M.L.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **21**. 2464 (2004).
- [14] *Vologdin A.G., Prikhod'ko L.I.* // *Radiotekhnika i Elektronika.* **49**(10). 1218 (2004).
- [15] *Afanasiev A.* // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* **67**. 1002 (2005).
- [16] *Prikhodko L.I., Shirokov I.A., Padokhin A.M.* // *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*, 10833, 108331C (2018).
- [17] *Granatstein V.L., Buchsbaum S.J.* // *The Phys. Fluids.* **10**, 1851 (1967).

- [18] *Feinstein D.L., Granatstein V.L.* // *The Phys. Fluids.* **12**, 2658 (1969).
- [19] *Watson K.M.* // *J. Math. Phys.* **10**. 688 (1969).
- [20] *Ziolkowski R.W., Engheta N.* *Introduction, History, and Selected Topics in Fundamental Theories of Metamaterials.* John Wiley & Sons, Ltd, 2006, chap. 1, pp. 1–41.
- [21] *Lemonnier D., Dez V.L.* // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **73**. 195 (2002).
- [22] *Ben Abdallah, et al.* // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **78**, 481 (2003).
- [23] *Ilyushin Y.A.* // *J. Opt. Soc. Am. A: Optics and Image Science and Vision.* **39**, N 1. 160 (2022).
- [24] *Soloviev V.Y.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **33**. 383 (2016).
- [25] *Soloviev V.Y.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **33**. 1323 (2016).
- [26] *Akkermans E., Wolf E., Maynard R.* // *Phys. Rev. Lett.* **56**. 1471 (1986).
- [27] *Ilyushin Y.A.* // *J. Opt. Soc. Am. A.* **30**. 1305 (2013).
- [28] *Ilyushin Y.A.* // *Radiophysics and quantum electronics.* **57**, 730 (2015).
- [29] *Ishimaru A.* *Wave Propagation and Scattering in Random Media.* Academic, New York, 1978.
- [30] *Эльсгольц Л.Э.* *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1969
- [31] *Олвер Ф.* *Введение в асимптотические методы и специальные функции.* Пер. с англ. М.:Наука, 1990.
- [32] *Федорюк М.В.* *Асимптотика. Интегралы и ряды.* М.: Наука, 1987.
- [33] *Воеводин Вл.В., Жуматый С.А., Соболев С.И. et al.* // *Открытые системы.* **7**. 36. М: Издательский дом «Открытые системы», 2012.

Singularities of Diffuse Wave Fields in Scattering Media with Refractive Index Gradients

Ya. A. Ilyushin^{1,2}

¹*Department of Atmospheric Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

²*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics Russian Academy of Sciences
Moscow, 125009, Russia*

E-mail: ilyushin@phys.msu.ru

The subject of this paper is the radiative transfer in media with gradients of the refractive index. Asymptotic expressions of the intensity distributions in the vicinity of singular directions are derived. Critical conditions for the appearance of singular intensity distributions in fields of scattered radiation in a medium are formulated. It is shown that singular radiation fields in such media can be generated, among other things, by non-singular configurations of radiation sources. The obtained results are verified by direct comparison with the results of numerical calculations using the Monte Carlo statistical modeling method.

PACS: 42.68.Ay.

Keywords: radiative transfer, singularity, refraction.

Received 03 March 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2024. **79**, No. 3. Pp. .

Сведения об авторе

Илюшин Ярослав Александрович — доктор физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-32-52, e-mail: ilyushin@phys.msu.ru.