

Поляризация вакуума в поле точечного дефекта

Ю.В. Грац,^{1,*} П.А. Спирин^{1,†}¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 12.04.2024; после доработки 18.04.2024; подписана в печать 22.04.2024)

Рассматривается эффект поляризации вакуума массивного скалярного поля $\phi(x)$ вблизи точечного источника с δ -образным потенциалом. Соответствующее взаимодействие вводится в рамках техники, основанной на построении самосопряженных расширений оператора Лапласа. Этот метод введения δ -образных взаимодействий широко обсуждался в рамках квантовой механики. Мы предлагаем воспользоваться им для исследования вакуумных теоретико-полевых эффектов. В рамках этого подхода получено выражение для перенормированной функции Адамара и перенормированной плотности вакуумной энергии $\langle T_{00}(x) \rangle_{\text{ren}}$ массивного скалярного поля с минимальной связью. Проанализирована зависимость эффекта поляризации вакуума от массы поля.

PACS: 11.27.+d УДК: 53.02

Ключевые слова: точечные взаимодействия, самосопряженные расширения, поляризация вакуума.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2440101

ВВЕДЕНИЕ

В 2023 г. исполнилось 75 лет эффекту Казимира. Получивший экспериментальное подтверждение спустя 10 лет, он наглядно подтвердил нетривиальную зависимость теоретико-полевых эффектов от макроскопических внешних условий, таких как наличие границ, внешних полей, нетривиальной топологии пространства-времени. С формальной точки зрения причиной таких нетривиальных эффектов является эффективная нелокальность теории поля. Последняя проявляется в том, что уравнения поля, как уравнения в частных производных, «чувствуют» структуру пространства в целом. Эта нелокальность дает себя знать даже если рассматривается евклидово пространство с дискретным (конечным или бесконечным) числом выколотых точек. В этом случае наложение адекватных граничных условий позволяет исследовать квантовые системы, гамильтониан которых на эвристическом уровне записывается в виде

$$H = -\Delta + \sum_y \lambda_y \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

где Δ — оператор Лапласа на $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$ — размерность конфигурационного пространства, $\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — δ -функция Дирака, локализованная в точке \mathbf{y} , а λ_y — константа взаимодействия с локализованным в точке \mathbf{y} источником.

Взаимодействия такого типа обсуждались в литературе в связи с задачами, возникающими в физике твердого тела [1], атомной и ядерной физике [2]. Аналогичный подход позволил рассмотреть

казимировское взаимодействие двух параллельных идеально проводящих пластин [3–5], двух точечных или линейных источников с потенциалом нулевого радиуса [6]. Выяснилось, что похожая ситуация возникает при рассмотрении теоретико-полевых эффектов в окрестности космических струн. Действительно, при подходящем выборе координат уравнение для безмассового скалярного поля с минимальной связью приобретает вид полевое уравнение с линейным δ -образным потенциалом, что требует корректного учета этой особенности [7].

Ниже мы рассмотрим эффект поляризации вакуума массивного скалярного поля вблизи δ -образного источника в рамках подхода, основанного на введении соответствующего взаимодействия путем построения самосопряженных расширений оператора поля. Ранее предложенный подход использовался для исследования теоретико-полевых эффектов в случае безмассового поля [8–10]. Наша задача состоит в изучении зависимости рассматриваемого эффекта от массы.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(+, -, -, -)$.

1. САМОСOPPЯЖЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ

Формально уравнение Клейна–Гордона с δ -образным потенциалом имеет вид

$$(\square + m^2 + \lambda\delta(\mathbf{x}))\phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

и нахождение его положительно- и отрицательно-частотных решений,

$$\phi_{\omega}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = e^{\mp i\omega t} u_{\omega}(\mathbf{x}),$$

* E-mail: grats@phys.msu.ru

† E-mail: pspirin@physics.uoc.gr

сводится к поиску решений уравнения

$$(-\Delta + \lambda\delta(\mathbf{x}))u_\omega(\mathbf{x}) = (\omega^2 - m^2)u_\omega(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет вид стационарного уравнения Шрёдингера для частицы массы $1/2$ в поле потенциала нулевого радиуса. Однако это формально записанное уравнение требуется доопределить, поскольку следует дать определение эвристически записанного выражения $\lambda\delta(\mathbf{x})$ для потенциала.

Считается, что корректное описание δ^d -взаимодействий при размерности пространства $d = 1, 2, 3$ достигается построением самосопряженного расширения неотрицательно определенного оператора $-\Delta$, рассматриваемого на $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ [11–13]. В случае одного пространственного измерения ($d = 1$) это достигается наложением условия на разрыв первой производной волновой функции в точке расположения источника. При этом при надлежащем выборе параметра самосопряженного расширения он совпадает с интенсивностью одномерного δ -взаимодействия λ . В случае двух и трех измерений оператор $-\Delta$ остается самосопряженным, даже если собственные функции обращаются в бесконечность в точке локализации центра, но при условии, что они остаются локально квадратично интегрируемыми и удовлетворяют соответствующим граничным условиям. Для этих двух размерностей конфигурационного пространства имеются однопараметрические семейства самосопряженных операторов. При этом параметр самосопряженного расширения α уже не связан напрямую с интенсивностью взаимодействия, а определяет длину s -волнового рассеяния [11, 12] (см. также [14]). При $d \geq 4$ оператор $-\Delta$ являет-

ся существенно самосопряженным и указанным способом ввести точечные взаимодействия уже нельзя.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае речь идет о самосопряженном расширении неотрицательно определенного оператора $H = -\Delta$, рассматриваемого на $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

В сферических координатах пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ представляется в виде прямой суммы

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L^2((0, \infty); r^2 dr) \otimes [Y_{l,-l}, \dots, Y_{l,l}], \quad (3)$$

где $L^2((0, \infty); r^2 dr)$ обозначает пространство функций, локально интегрируемых на \mathbb{R}_+ с мерой r^2 , $\{Y_{l,m} \mid l = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l\}$ — сферические гармоники, а символом $[...]$ обозначена линейная оболочка соответствующих векторов.

Соответственно этому оператор H разлагается в сумму (см. [11–13] и процитированную там литературу)

$$H = \bigoplus_{l=0}^{\infty} H_l \otimes \mathbf{1}, \quad (4)$$

где

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r > 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Известно, что операторы H_l при $l \geq 1$ являются самосопряженными, в то время как однопараметрическое семейство самосопряженных расширений оператора H_0 имеет вид [12, 13]:

$$H_{0,\alpha} = -\Delta_{0,\alpha} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr}, \quad \mathcal{D}(H_{0,\alpha}) = \left\{ u_\alpha \in L^2((0, \infty); r^2 dr); 4\pi\alpha \lim_{r \rightarrow +0} r u_\alpha(r) = \lim_{r \rightarrow +0} [u_\alpha + r u'_\alpha] \right\}, \quad (6)$$

где $-\infty < \alpha \leq \infty$. При этом выключение взаимодействия соответствует предельному случаю $\alpha = \infty$.

Таким образом, самосопряженное расширение оператора $H = -\Delta$ задает точечное взаимодействие только в s -волне.

1.1. Функция Грина

Задача на собственные функции и собственные значения оператора $H_{0,\alpha}$,

$$H_{0,\alpha} u_{p\alpha}(r) = p^2 u_{p\alpha}(r), \quad p^2 = (\omega^2 - m^2), \quad (7)$$

сводится к исследованию уравнения

$$u''_{p\alpha}(r) + \frac{2}{r} u'_{p\alpha} + p^2 u_{p\alpha} = 0. \quad (8)$$

После очевидной подстановки $u_{p\alpha} = \chi_{p\alpha}(r)/r$ оно приводится к уравнению

$$\chi''_{p\alpha} = -p^2 \chi_{p\alpha},$$

которое для действительных значений p^2 имеет следующие решения:

$$\chi_{p\alpha} = \begin{cases} \mu_+ \sin pr + \nu_+ \cos pr, & p^2 > 0; \\ \mu_- e^{-|p|r} + \nu_- e^{+|p|r}, & p^2 < 0; \\ \mu_0 r + \nu_0, & p = 0, \end{cases}$$

где коэффициенты определяются граничными условиями и требованием квадратичной интегрируемости. Последнее условие однозначно фиксирует $\nu_- = \mu_0 = \nu_0 = 0$.

В результате при $p^2 > 0$ s -волновое решение отличается от соответствующего пустому пространству Минковского регулярного решения $\sin pr/r$ и может

быть представлено в виде

$$u_{p\alpha}(r) = C_{p\alpha} \left(\frac{\sin pr}{r} + \operatorname{tg} \delta_{p\alpha} \frac{\cos pr}{r} \right)$$

с некоторым углом смещения $\delta_{p\alpha}$, который фиксируется из граничных условий при $r = 0$:

$$\operatorname{tg} \delta_{p\alpha} = \frac{p}{4\pi\alpha}.$$

Коэффициент $C_{p\alpha}$ находится из условия нормировки

$$i \int d^3x \phi_{\omega}^{(\pm)*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\omega}^{(\pm)} = \pm \delta(\omega - \omega'),$$

что эквивалентно требованию, чтобы выполнялось

$$\int d^3x u_{p\alpha}^* u_{p'\alpha} = \frac{\delta(p - p')}{2p}.$$

Откуда получаем $C_{p\alpha} = \cos \delta_{p\alpha} / (2\pi\sqrt{p})$.

Таким образом s -волновое решение имеет вид:

$$u_{p\alpha}(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\sin(pr + \delta_{p\alpha})}{\sqrt{p}}. \quad (9)$$

Это решение имеет место при всех $p^2 > 0$ и для любого $-\infty < \alpha \leq \infty$.

Если $\alpha \geq 0$, то самосопряженный оператор $H_{0,\alpha}$ не имеет отрицательных собственных значений

$$D_{\alpha}^{(1)}(x, x') = \frac{1}{2} \left\langle \phi(x) \phi(x') + \phi(x') \phi(x) \right\rangle_{\text{vac}} = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \left[u_{p\alpha}(x) u_{p\alpha}^*(x') + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{plm}(x) u_{plm}^*(x') \right]. \quad (10)$$

Заметим, что при $\alpha = \infty$ полученное выражение совпадает с функцией Адамара в отсутствие взаимодействия:

$$D_{\infty}^{(1)}(x, x') = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{\omega lm}(x) u_{\omega lm}^*(x').$$

Последняя определяет вакуумное среднее тензора энергии-импульса в пустом пространстве Минковского, которое принимается равным нулю, и потому должна быть отброшена при перенормировке.

Таким образом, следует определить перенормированную функцию Грина $D_{\text{ren}}^{(1)}$ как разность

$$D_{\text{ren}}^{(1)} = D_{\alpha}^{(1)} - D_{\infty}^{(1)}.$$

В результате мы имеем

$$D_{\text{ren}}^{(1)}(x, x') = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \left[u_{p\alpha}(x) u_{p\alpha}^*(x') - u_{p\infty}(x) u_{p\infty}^*(x') \right].$$

ний и полный набор его собственных функций состоит из $\{u_{plm}\}, l > 0$, и $u_{p\alpha}(r)$, где u_{plm} представлено в виде

$$u_{plm}(r, \theta, \varphi) = v_{pl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad H_l v_{pl} = p^2 v_{pl}.$$

Если $-\infty < \alpha < 0$, то гамильтониан $H_{0,\alpha}$ имеет одно дискретное собственное значение

$$p_{\alpha}^2 = -(4\pi\alpha)^2, \quad \omega_{\alpha}^2 = -(4\pi\alpha)^2 + m^2,$$

при этом соответствующий собственный вектор равен

$$u_{0,\alpha}(r) = \frac{\sqrt{-\alpha}}{r} e^{4\pi\alpha r}.$$

В квантовой механике это решение описывает связанное состояние частицы в поле точечного потенциала притяжения. В нашей же ситуации при $m^2 < (4\pi\alpha)^2$ квадрат частоты становится отрицательным и соответствующее решение уравнения Клейна–Гордона становится неустойчивым. Поэтому ограничимся случаем $\alpha \geq 0$, когда расширения оператора $-\Delta$ являются неотрицательными самосопряженными операторами, спектр оператора $H_{0,\alpha}$ непрерывен и покрывает всю неотрицательную полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, а неустойчивости отсутствуют.

Пусть $\{u_{plm}\}$ — полный набор собственных функций свободного лапласиана. Тогда функция Адамара рассматриваемой задачи может быть представлена в виде

Здесь мы учли, что $u_{p00} = u_{p\infty}$.

Подставляя найденные $u_{p\alpha}$ (9) и заменяя переменную интегрирования ω на $z = p/4\pi\alpha$, мы окончательно получаем перенормированную функцию Адамара в виде

$$D_{\text{ren}}^{(1)}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2 r r'} \int_0^{\infty} dz z \frac{\cos[\sqrt{(4\pi\alpha z)^2 + m^2}(t-t')]}{\sqrt{z^2 + (m/4\pi\alpha)^2(1+z^2)}} \times \left(\sin[4\pi\alpha z(r+r')] + z \cos[4\pi\alpha z(r+r')] \right). \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, в безмассовом пределе полученное нами выражение совпадает с опубликованным нами ранее [8, 15].

2. ВАКУУМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ

При вычислении вакуумной плотности энергии мы ограничимся случаем скалярного поля с минимальной связью. Добавление члена ξR (где R — скалярная кривизна) в лагранжиан в случае плоского пространства не меняет уравнение поля, но

приводит к изменению выражения для тензора энергии-импульса. Однако это отражается только на числовых коэффициентах и не приводит к существенному изменению интересующего нас характера зависимости поляризационных эффектов от массы поля.

Тогда

$$T_{\mu}^{\nu} = \partial^{\nu} \phi \partial_{\mu} \phi + \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} (m^2 \phi^2 - \partial^{\lambda} \phi \partial_{\lambda} \phi) \quad (12)$$

и перенормированное вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса определяется дифференцированиями перенормированной функции Адамара $D_{\text{ren}}^{(1)}(x, x')$ с последующим переходом к пределу совпадающих точек:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \lim_{x' \rightarrow x} \left[\partial_0 \partial'_0 + \frac{1}{2} (m^2 - \partial^{\lambda} \partial'_{\lambda}) \right] D_{\text{ren}}^{(1)}(x, x'). \quad (13)$$

В результате мы получаем, что перенормированная вакуумная плотность энергии может быть записана в виде

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[\left(\frac{1}{2} + m^2 r^2 \right) \mathcal{J} - \frac{1}{2} \mathcal{J}_1 \right], \quad (14)$$

где введено

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\beta, a) &= \int_0^{\infty} dz \frac{1}{1+z^2} \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} (\sin \beta z + z \cos \beta z), \\ \mathcal{J}_1(\beta, a) &= \beta \frac{\partial \mathcal{J}(\beta, a)}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (15)$$

а аргументы $\beta = 8\pi\alpha r$, $a = m/4\pi\alpha$.

Функции \mathcal{J} и \mathcal{J}_1 можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\beta, a) &= K_0(\beta a) - e^{\beta} \int_{\beta}^{\infty} dt e^{-t} K_0(at), \\ \mathcal{J}_1(\beta, a) &= \beta \mathcal{J} - \beta a K_1(\beta a), \end{aligned} \quad (16)$$

где $K_{\nu}(\cdot)$ — функции Макдональда. Тогда для вакуумной плотности энергии мы получаем окончательно

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{d_s} + \frac{r^2}{l_c^2} \right) \mathcal{J} \left(\frac{2r}{d_s}, \frac{d_s}{l_c} \right) + \frac{r}{l_c} K_1 \left(\frac{2r}{l_c} \right) \right], \quad (17)$$

где введены две константы с размерностью длины: комптоновская длина $l_c = 1/m$ и длина рассеяния $d_s = 1/4\pi\alpha$.

В безмассовом пределе ($a \rightarrow 0$)

$$\mathcal{J}(\beta, 0) = e^{\beta} E_1(\beta), \quad \mathcal{J}_1(\beta, 0) = \beta \mathcal{J}(\beta, 0) - 1, \quad (18)$$

где $E_1(x)$ обозначает интегральную экспоненту, и наш результат переходит в полученный ранее в работах [9, 10].

Асимптотические режимы. Помимо расстояния r от точки наблюдения до точечного источника взаимодействия, в задаче есть две константы с размерностью длины: комптоновская длина l_c и длина рассеяния d_s .

Пусть $r \gg \max\{l_c, d_s\}$. В этом случае можно воспользоваться асимптотическим разложением функций Макдональда [16]

$$K_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + k + 1/2)}{\Gamma(\nu - k + 1/2)} \frac{(2x)^{-k}}{k!}, \quad x \gg 1, \quad (19)$$

и верна асимптотика

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \left(\frac{2r}{d_s}, \frac{d_s}{l_c} \right) &\simeq \frac{d_s}{d_s + l_c} K_0 \left(\frac{2r}{l_c} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{d_s}{2(d_s + l_c)} \sqrt{\frac{\pi l_c}{r}} e^{-2r/l_c}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответственно плотность энергии вакуума на больших в указанном смысле расстояниях спадает экспоненциально:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} \simeq \frac{1}{8\pi^{3/2}} \frac{l_c^{-3/2}}{1 + l_c/d_s} \frac{e^{-2r/l_c}}{r^{5/2}}. \quad (21)$$

В то время как для безмассового поля при $r \gg d_s$

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{d_s} - 1 \right) \mathcal{J} \left(\frac{2r}{d_s}, 0 \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (22)$$

и вакуумное среднее спадает степенным образом [8, 9]:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{d_s}{8\pi^2 r^5} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{d_s}{r} \right) \right]. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь малые, $r \ll \min\{l_c, d_s\}$, расстояния. В этом случае используем разложение функции Макдональда [16]:

$$K_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left[\ln \frac{2}{x} + h_k - \gamma \right], \quad x \ll 1, \quad (24)$$

где h_k — k -е гармоническое число, а γ — постоянная Эйлера. Тогда верно

$$\mathcal{J} \left(\frac{2r}{d_s}, \frac{d_s}{l_c} \right) \simeq \ln \frac{l_c}{r} - \gamma + \mathcal{O}(d_s/l_c), \quad (25)$$

и для $\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}}$ верна асимптотика

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2 r^4} \left[\ln \frac{l_c}{r} + \mathcal{O}(1) \right]. \quad (26)$$

Таким образом, на малых расстояниях плотность вакуумной энергии растет логарифмически с увеличением комптоновской длины.

Для безмассового поля или при $l_c \gg d_s$ малость расстояния означает $r \ll d_s$; тогда справедлива асимптотика

$$\mathcal{J}(x, a) = \left(\ln \frac{1}{x} - \gamma \right) (1 + x) + x - \frac{1}{2} \left(x^2 \ln \frac{1}{x} + a^2 \ln \frac{1}{a} \right) + \mathcal{O}(a^2 + x^2). \quad (27)$$

Подставляя асимптотику в (22), получим:

$$\langle T_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{8\pi^2 r^4} \left[\ln \frac{d_s}{2r} + (1 - \gamma) \right]. \quad (28)$$

График плотности вакуумной энергии (на масштабах порядка d_s) представлен на рис. 1. Все кривые при $r \rightarrow 0$ имеют предельное значение тангенса угла наклона к горизонтали, равное -4 , в соответствии с выражением (26). На больших расстояниях безмассовая кривая имеет тангенс наклона -5 , в соответствии с формулой (23), а массивные поля экспоненциально подавлены при $r > l_c$. Точки, соответствующие $r = l_c$ для каждого графика массивного поля, отмечены вертикальной штриховой линией соответствующего цвета.

Мы видим, что на масштабах $r \lesssim l_c$ кривые, соответствующие массивным частицам, практически неотличимы от безмассовой. Область очень малых, $r \ll l_c$, расстояний представлена на рис. 2. В этой области кривые практически параллельны, а их небольшое расхождение обусловлено только разностью значений логарифмов l_c/r и d_s/r (26, 28). Таким образом, парциальные вклады различающихся по массе мод в плотность энергии вакуума в этой области становятся сравнимыми.

Это подтверждает сделанные в [15, 17–19] выводы об эффективно безмассовом поведении массивных полей в эффекте Казимира на малых, по сравнению с комптоновской длиной, расстояниях.

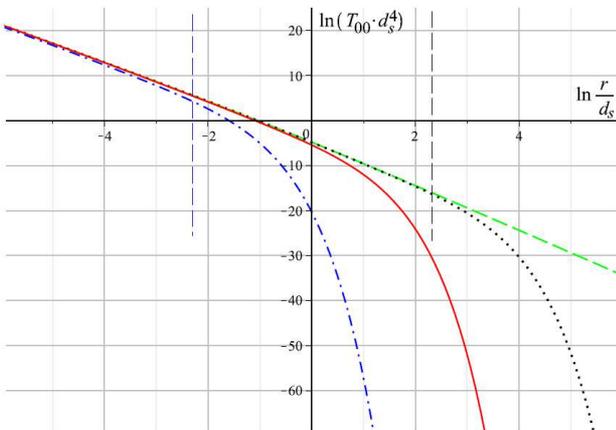


Рис. 1. Плотность вакуумной энергии в двойном логарифмическом масштабе: для безмассового поля (зеленая штриховая), для $l_c/d_s = 10$ (черная пунктирная), $l_c/d_s = 1$ (красная сплошная) и $l_c/d_s = 0.1$ (синяя штрихпунктирная).

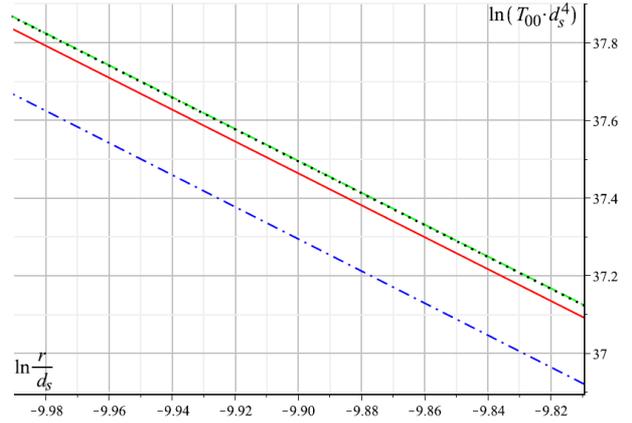


Рис. 2. Плотность вакуумной энергии на малых расстояниях в двойном логарифмическом масштабе: для безмассового поля (зеленая штриховая), для $l_c/d_s = 10$ (черная пунктирная), $l_c/d_s = 1$ (красная сплошная) и $l_c/d_s = 0.1$ (синяя штрихпунктирная).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о поляризации вакуума массивного скалярного поля в поле точечного источника. Задача формально сводится к рассмотрению трехмерного стационарного уравнения Шредингера с δ -образным потенциалом. Однако возникает вопрос, каким образом следует понимать формально на эвристическом уровне введенный δ^3 -потенциал. Можно понимать такого рода потенциал как предел соответствующим образом подобранной δ -образной последовательности и работать методами теории возмущений. Однако в этом случае возникает необходимость бесконечной перенормировки параметра, определяющего интенсивность взаимодействия, и он становится неопределенным. В работе используется альтернативный подход, основанный на построении самосопряженных расширений оператора $-\Delta$. Это позволяет получить точное выражение для перенормированного вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса, которое однозначно определяется параметром самосопряженного расширения, т.е. характеризующей данный потенциал длиной рассеяния.

Показано, что на расстояниях, существенно меньших комптоновской длины, вакуумная плотность энергии массивного поля становится сравнимой с массой безмассового. В другом же предельном случае вакуумная плотность энергии массивного поля падает экспоненциально, в то время как для безмассового она убывает степенным образом.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 «Физика частиц и космология».

- [1] *Kronig R.L., Penney W.G.* // Proc. Roy. Soc. A (London) **130**, 499 (1931).
- [2] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* // Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Изд. Лен. ун-та, 1975. (*Demkov Y.N., Ostrovskii V.N.* // The Usage of Zero-Range Potentials in Atomic Physics (in russian). Moscow: Nauka, 1975).
- [3] *Мамаев С.Г., Трунов Н.Н.* // Изв. вузов (Физика) **7**, 9 (1980). (*Matvaev S.G., Trunov N.N.* // Russ. Phys. J. **23**, 551 (1980)).
- [4] *Bordag M., Hennig D., Robaschik D.* // J. Phys. A **25**, 4483 (1992).
- [5] *Muños-Castañeda J. M., Mateos Guilarte J., Moreno Mosquera A.* // Phys. Rev. D **87**, 105020 (2013).
- [6] *Грац Ю.В.* // ЯФ **81** (2), 242 (2018) (*Grats Yu.V.* // Phys. Atom. Nucl. **81** (2), 253 (2018)).
- [7] *Grats Y.V., Spirin P.* // Eur. Phys. J. C. **77**, 101 (2017).
- [8] *Грац Ю.В.* // ЯФ **82** (2), 157 (2019) (*Grats Yu.V.* // Phys. Atom. Nucl. **82** (2), 153 (2019)).
- [9] *Grats Y.V., Spirin P.* // Universe. **7**, 127 (2021).
- [10] *Grats Y.V., Spirin P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **77** (2), 448 (2022).
- [11] *Reed M., Simon B.* // Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis. Self-Adjointness. Academic-Press: New-York-London, 1975.
- [12] *Albeverio S., Gesztesy R., Hoegh-Krohn R., Holden H.* // Solvable Models in Quantum Mechanics. World Scientific: Singapore, 1995.
- [13] *Gitman D.M., Tyutin I.V., Voronov B.L.* // Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. Springer: New York, 2012.
- [14] *Jackiw R.W.* // Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics. World Scientific: Singapore, 1995.
- [15] *Грац Ю.В., Спири́н П.* // ЖЭТФ **165** (1), 43 (2024). (*Grats Y. V., Spirin P.* // Journal of Experimental and Theoretical Physics **138** (1) (2024)).
- [16] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* // Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. (*Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* // Table of Integrals, Series and Products, Academic Press: New York, USA, 2007).
- [17] *Грац Ю.В., Спири́н П.А.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **78** (5), 2350101 (2023). (*Grats Y. V., Spirin P.* // Moscow Univ. Phys. Bull. **78** (5), 585 (2023)).
- [18] *Grats Y. V., Spirin P.* // Phys. Rev. D **108** (4), 045001 (2023).
- [19] *Grats Y. V., Spirin P.* // MDPI Physics, **5**, 1163 (2023).

Vacuum Polarization in the Point Impurity Background

Y.V. Grats^a, P. Spirin^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^agrats@phys.msu.ru, ^bsalotop@list.ru

The vacuum polarization effect of a massive scalar field $\phi(x)$ near the point δ -like source is considered. The corresponding interaction is introduced within a technique of self-adjoint extension of the Laplace operator. This method has been widely discussed within the framework of quantum mechanics. We propose to use it to investigate vacuum field effects. This approach allows computing the renormalized Hadamard function and the renormalized vacuum energy density $\langle T_{00}(x) \rangle_{ren}$ for massive real scalar field with minimal curvature coupling. The dependence of the vacuum polarization effect upon the fields's mass is analyzed.

PACS: 11.27.+d.

Keywords: point impurities, self-adjoint extension, vacuum polarization.

Received 12 April 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 4. Pp. 426–431.

Сведения об авторах

1. Грац Юрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.
2. Спири́н Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.