ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Использование гамма-распределения для получения статистики Максвелла–Реньи и других обобщённых распределений

Д. В. Накашидзе,[1,*] А. М. Савченко,[1] Т. Н. Бакиев[2]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики Россия, 119048, Москва, ул. Усачёва, д. 6*

(Поступила в редакцию 02.05.2024; после доработки 20.05.2024; подписана в печать 21.05.2024)

В работе предложен универсальный способ проведения вычислений в рамках обобщенной статистики, порождаемой параметрическими энтропиями Тсаллиса, Реньи и Шарма–Миттала. Суть метода заключается в использовании вспомогательного гамма-распределения, параметры которого соответствуют тому или иному варианту статистики. Выведены соотношения, позволяющие выразить обобщенную статистическую сумму и среднюю энергию через канонические величины. На примере статистики Реньи продемонстрирована эффективность предложенного метода. Получено распределение Максвелла–Реньи и рассчитаны его характеристики, на основе которых были выдвинуты предположения о возможной природе обобщающего параметра.

PACS: 05.20.-y, 05.40.-a, 05.70.-a, 05.90.+m. УДК: 536.75.

Ключевые слова: гамма-распределение, энтропия Тсаллиса, энтропия Реньи, энтропия Шарма–Миттала, обобщённое распределение, распределение Максвелла, обобщённая статистическая механика.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2440103

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные распределения, возникающие в результате применения принципа Джейнса к энтропиям Реньи, Тсаллиса и Шарма–Миттала, позволяют выйти за рамки привычной экспоненциальной зависимости и получить, к примеру, степенную форму кривой распределения вероятностей. Однако подобного рода обобщениям экспоненциального распределения сопутствует усложнение вычислений всевозможных средних характеристик описываемых случайных величин, которое возникает ввиду отсутствия у обобщенных функций распределения удобных свойств факторизации и дифференцируемости экспоненты. Тем самым естественным образом появляется потребность в упрощении проведения расчетов в задачах, рассматриваемых в рамках обобщённой статистики, а также в получении нового, удобного метода вычислений обобщённых статистических сумм.

В настоящей работе предлагается универсальный способ проведения вычислений, предполагающих усреднение по распределениям Реньи, Тсаллиса и Шарма–Миттала, который заключается в использовании вспомогательного гамма-распределения, параметры которого выбираются в соответствии с видом того или иного варианта обобщённого распределения. В работе продемонстрированы преимущества предлагаемого метода перед прямым вычислением различного рода средних величин, а именно возможность сведения поставленной задачи к уже решенной, а также простота получения и наглядность условий сходимости рассчитываемых интегралов. В качестве примера применения предлагаемого метода проведения вычислений будут получены характеристики идеального газа, рассматриваемого в контексте обобщенных статистик, которые позволят записать обобщённое распределение Максвелла по скоростям.

1. ОБОБЩЁННАЯ СТАТИСТИКА

Согласно энтропийному подходу к выводу статистических распределений, также известному как принцип максимума энтропии [1, 2], форма распределения вероятностей или плотности вероятности напрямую зависит от вида порождающего его функционала энтропии, а также от дополнительных условий, накладываемых на распределение. Так, например, если мерой неопределенности распределения вероятностей $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ служит энтропия Шеннона [3]

$$S^{(S)}(P) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i, \tag{1}$$

а статистическая система имеет известное значение среднего $\langle \xi \rangle$ некоторой случайной величины ξ, принимающей в каждом из n состояний системы определенное значение ξ_i, что накладывает на распре-

* E-mail: nakashidze.dv16@physics.msu.ru

деление P условия

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i = \langle \xi \rangle, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{2}$$

то распределением, которое характеризует описанную систему и не несет в себе никакой дополнительной информации о ней, кроме уже учтённой, является экспоненциальное распределение вида

$$p_i = \frac{e^{-\beta \xi_i}}{Z_c}, \qquad Z_c(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta \xi_i}, \tag{3}$$

где β – множитель Лагранжа из задачи максимизации функционала (1) с условиями (2). Значение данного параметра определяется решением уравнения

$$\langle \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{e^{-\beta \xi_i}}{Z_c}. \tag{4}$$

При рассмотрении задач равновесной статистической физики данные соотношения принимают вид канонического распределения Гиббса:

$$p_i^{(G)} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z_c}, \qquad Z_c(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i}, \tag{5}$$

где параметр β определяется решением уравнения

$$U = \sum_{i=1}^{n} E_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z_c}. \tag{6}$$

Важно отметить, что, подставив записанное экспоненциальное распределение в выражение (1) и трактуя полученную величину как термодинамическую энтропию, нетрудно убедиться, что между множителем Лагранжа β и термодинамической температурой $\theta \equiv k_B T$ имеет место простая связь

$$\beta = \frac{1}{\theta}. \tag{7}$$

Таким образом, в рассматриваемом подходе принцип Джейнса делает энтропию центральным объектом статистической теории, предоставляет возможность альтернативного вывода распределения Гиббса, а также дает массу возможностей для получения качественно новых статистических распределений.

Логично ожидать, что измененное выражение для энтропии будет обеспечивать измененную форму распределения. Однако важно помнить, что все возможные альтернативные выражения для энтропии обязаны соответствовать главному требованию: энтропия должна представлять собой меру неопределенности информации о системе.

Такими альтернативными вариантами меры неопределенности являются энтропия Реньи [4]

$$S^{(R)}(P) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{n} p_i^q, \qquad q \in \mathbb{R}_{>0}, \quad q \neq 1; \tag{8}$$

энтропия Тсаллиса [5]

$$S^{(T)}(P) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q - 1 \right) \quad \text{при условии} \quad q \in \mathbb{R}_{>0}, \quad q \neq 1 \tag{9}$$

и энтропия Шарма–Миттала [6, 7]

$$S^{(SM)}(P) = \frac{1}{1-r} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^q \right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1 \right], \quad q, r \in \mathbb{R}_{>0}, \quad q \neq 1 \neq r, \quad q \neq r, \tag{10}$$

которые обобщают привычную энтропию Шеннона

$$\lim_{r \to 1} S^{(SM)} = S^{(R)}, \quad \lim_{r \to q} S^{(SM)} = S^{(T)}, \quad \lim_{q \to 1} S^{(R,T)} = S^{(S)} \tag{11}$$

и широко используются в различных областях науки [8–16].

Ключевой особенностью обобщенных энтропий является их математическая структура, дающая возможность получения степенных распределений, характерных для многих сложных статистических систем [17–21]. Чтобы записать соответствующие распределения, применим принцип максимума энтропии, потребовав от искомых распределений обеспечение заданного среднего значения энергии и единичную нормировку:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E_i = U, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{12}$$

Тогда, решив задачу на условный экстремум функционалов (8), (9), (10), получим соответствующие распределения вероятностей, которые могут быть записаны в унифицированном виде:

$$p_i^{(\mathcal{E})} = \frac{1}{Z^{(\mathcal{E})}} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta^{(\mathcal{E})} (E_i - U) \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad Z^{(\mathcal{E})} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{q-1}{q} \beta^{(\mathcal{E})} (E_i - U) \right)^{\frac{1}{q-1}},$$
$$\beta^{(\mathcal{E})} = \begin{cases} \beta^{(SM)}(r,q) = \beta \cdot \left(Z^{(SM)}\right)^{r-1} & \text{при} \quad \mathcal{E} = SM \quad \text{(Шарма–Миттал)}, \\ \beta^{(T)}(q) = \beta \cdot \left(Z^{(T)}\right)^{q-1} & \text{при} \quad \mathcal{E} = T \quad \text{(Тсаллис)}, \\ \beta^{(R)} = \beta & \text{при} \quad \mathcal{E} = R \quad \text{(Реньи)} \end{cases}, \tag{13}$$

где для каждого из вариантов энтропий множитель β определяется решением уравнения

$$U = \sum_{i=1}^{n} E_i \, p_i^{(\mathcal{E})}(\beta). \tag{14}$$

Стоит отметить, что форма получаемого распределения зависит не только от выражения для энтропии; важную роль также имеет вид наложенных условий. Так, например, распространенным вариантом усреднения, принятым в так называемой q-статистике, служит усреднение по сопровождающему распределению, которое в случае среднего по энергии имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \frac{p_i^q}{\sum_{j=1}^{n} p_j^q} = U. \tag{15}$$

В случае такой формы выражения для среднего значения энергии и единичной нормировки распределения процедура максимизации функционалов энтропии (8), (9), (10) приводит к распределениям вида:

$$\tilde{p}_i^{(\mathcal{E})} = \frac{1}{\tilde{Z}^{(\mathcal{E})}} \left(1-(1-q)\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}\left(E_i-U\right)\right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad \tilde{Z}^{(\mathcal{E})} = \sum_{i=1}^{n} \left(1-(1-q)\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}\left(E_i-U\right)\right)^{\frac{1}{1-q}},$$
$$\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})} = \begin{cases} \tilde{\beta}^{(SM)}(r,q) = \tilde{\beta}\cdot\left(\tilde{Z}^{(SM)}\right)^{r-1} & \text{при} \quad \mathcal{E} = SM \quad \text{(Шарма–Миттал)}, \\ \tilde{\beta}^{(T)}(q) = \tilde{\beta}\cdot\left(\tilde{Z}^{(T)}\right)^{q-1} & \text{при} \quad \mathcal{E} = T \quad \text{(Тсаллис)}, \\ \tilde{\beta}^{(R)} = \tilde{\beta} & \text{при} \quad \mathcal{E} = R \quad \text{(Реньи)}, \end{cases} \tag{16}$$

где параметр $\tilde{\beta}$ определяется уравнением, возникающим в результате подстановки распределения (16) в условие (15).

Нетрудно убедиться, что представленные распределения (13) и (16) в самом деле обобщают распределение Гиббса:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 1} p_i^{(SM)} = p_i^{(R)}, \quad \lim_{r\to q} p_i^{(SM)} = p_i^{(T)}, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \lim_{q\to 1} p_i^{(R,T)} = p_i^{(G)}, \\ &\lim_{r\to 1} \tilde{p}_i^{(SM)} = \tilde{p}_i^{(R)}, \quad \lim_{r\to q} \tilde{p}_i^{(SM)} = \tilde{p}_i^{(T)}, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \lim_{q\to 1} \tilde{p}_i^{(R,T)} = p_i^{(G)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Данный факт является следствием того, что все рассматриваемые семейства обобщенных энтропий включают в себя энтропию Шеннона, которая достигает своего максимума на экспоненциальном распределении.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Распределения $\tilde{p}_i{}^{(\mathcal{E})}$ могут быть получены и иным путем. Например, в работе [22] выражение для распределения Тсаллиса $\tilde{p}_i{}^{(T)}$ возникает в результате усреднения экспоненциального распределения по гамма-распределению:

$$f(x;\gamma,\delta) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\,\delta^\gamma\, x^{\gamma-1} e^{-x\delta}, \qquad x>0, \quad \gamma,\delta>0, \tag{18}$$

для случайной величины x, которая фигурирует в исходном экспоненциальном распределении. Другим примером служит статья [23], в которой авторы выводят распределение Реньи $\tilde{p}_i{}^{(R)}$, рассматривая задачу о системе, испытывающей флуктуации температуры. В этой задаче гамма-распределение, по которому в дальнейшем усредняется экспоненциальное распределение Гиббса, возникает естественным образом как решение кинетического уравнения Фоккера–Планка и представляет собой плотность распределения значений обратной температуры

$$f\left(x;\gamma,\frac{\gamma}{b}\right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\gamma}{b}\right)^\gamma x^{\gamma-1} e^{-x\frac{\gamma}{b}}, \tag{19}$$

где параметр b является обратной величиной к средней температуре системы.

Уточним данный подход. Рассмотрим ненормированное экспоненциальное распределение вида

$$d_i = e^{-x(E_i-U)}, \tag{20}$$

в котором величина U не зависит от x. Тогда, усреднив d_i по гамма-распределению (19), мы получим

$$\begin{aligned} \bar{d}_i \equiv \int_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{\gamma}{b}\right) d_i(x)\,dx = \\ = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty y^{\gamma-1} e^{-y\left(1+\frac{b}{\gamma}(E_i-U)\right)}\,dy = \\ = \left(1+\frac{b}{\gamma}(E_i-U)\right)^{-\gamma}. \end{aligned} \tag{21}$$

После нормировки

$$\bar{d}_i \longmapsto \frac{\bar{d}_i}{\sum_{j=1}^{n}\bar{d}_j} = \frac{\left(1+\frac{b}{\gamma}(E_i-U)\right)^{-\gamma}}{\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{b}{\gamma}(E_j-U)\right)^{-\gamma}} \tag{22}$$

становится очевидно, что при соответствующих значениях параметров $\gamma = (q-1)^{-1}$, $b = \tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}$ полученное выражение представляет собой распределение

$\tilde{p}_i{}^{(\mathcal{E})}$, для которого параметр U задается условием (15).

Данный новый подход к записи обобщенных распределений открывает множество возможностей при решении задач на вычисление обобщённой статистической суммы, установления связи между U и β, а также при расчете всевозможных средних значений случайных величин, так как позволяет воспользоваться удобными свойствами исходного экспоненциального распределения (20).

Заметим, что установленный альтернативный способ выражения распределений подходит лишь к одному из вариантов обобщенных статистик и не дает возможности получения распределений (13). Поэтому возникает естественный вопрос: существует ли такое вспомогательное распределение, подобное (19), которое приводит к (13) посредством усреднения ненормированного экспоненциального распределения (20)? Как оказалось, в роли такой функции может выступать все то же гамма-распределение, в котором используются сразу три параметра:

$$f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}x^{\gamma-1}e^{-x\frac{a}{b}}. \tag{23}$$

При этом данные параметры определяют среднее и дисперсию случайной величины x следующим образом:

$$\langle x\rangle_f=b\,\frac{\gamma}{a},\quad \langle x^2\rangle_f-\langle x\rangle_f^2=b^2\,\frac{\gamma}{a^2}. \tag{24}$$

Проводя усреднение (20) по представленному варианту гамма-распределения, имеем

$$\bar{D}_i\equiv\int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)d_i(x)\,dx=\left(1+\frac{b}{a}(E_i-U)\right)^{-\gamma} \tag{25}$$

при условии, что $b(U-E_i)>a$ для всех $i=\overline{1,n}$ (это и другие условия сходимости вычисляемых интегралов будут обсуждаться в последующих разделах настоящей статьи). Также отметим, что данное усреднение можно трактовать как преобразование Лапласа функции $f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)$, приводящее к образу $\bar{D}_i\left(E_i-U;\gamma,\frac{a}{b}\right)$.

Нормируя результат, мы приходим к универсальному выражению для обобщенных распределений:

$$\bar{D}_i\longmapsto P_i(a,b,\gamma)\equiv\frac{\bar{D}_i}{\sum_{j=1}^n\bar{D}_j}=$$
$$=\begin{cases}p_i^{(\mathcal{E})} & \text{при}\quad \gamma=(1-q)^{-1},\quad a=q\gamma,\quad b=\beta^{(\mathcal{E})};\\ \tilde{p}_i^{(\mathcal{E})} & \text{при}\quad \gamma=(q-1)^{-1}=a,\quad b=\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}.\end{cases} \tag{26}$$

При этом из определения гамма-распределения (19) следуют ограничения на параметры результирующего распределения:

$$\begin{aligned}&q<1,\quad \beta^{(\mathcal{E})}>0\quad \text{для случая}\quad p_i^{(\mathcal{E})};\\ &q>1,\quad \tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}>0\quad \text{для случая}\quad \tilde{p}_i^{(\mathcal{E})}.\end{aligned} \tag{27}$$

Отметим, что рассматриваемый случай усреднения экспоненциального распределения по выбранному вспомогательному гамма-распределению является одним из вариантов так называемой суперстатистики, в рамках которой зачастую рассматривается распределение Тсаллиса [24, 25].

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА ОБОБЩЁННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Заметим, что выражения для статистических сумм $Z^{(\mathcal{E})}$ и $\tilde{Z}^{(\mathcal{E})}$ так же могут быть объединены посредством параметрической записи. Для этого введем обозначение

$$\mathcal{Z}(a,b,\gamma)\equiv\sum_{i=1}^n\bar{D}_i=$$
$$=\begin{cases}Z^{(\mathcal{E})} & \text{при}\quad \gamma=(1-q)^{-1},\quad a=q\gamma,\quad b=\beta^{(\mathcal{E})};\\ \tilde{Z}^{(\mathcal{E})} & \text{при}\quad \gamma=(q-1)^{-1}=a,\quad b=\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}.\end{cases} \tag{28}$$

Такой вид записи обобщенной статистической суммы позволяет свести задачу её вычисления к интегрированию канонической статистической суммы Гиббса. Действительно, в тех случаях, когда возможно изменение порядка интегрирования (суммирования), соотношение для обобщенной статистической суммы может быть записано в виде:

$$\mathcal{Z}(a,b,\gamma)=\sum_{i=1}^n\int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)e^{-x(E_i-U)}\,dx=$$
$$=\int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)e^{xU}\left[\sum_{i=1}^n e^{-xE_i}\right]dx=$$
$$=\int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right)e^{xU}Z_c(x)\,dx. \tag{29}$$

Принимая во внимание тот факт, что каноническая статистическая сумма известна для широкого круга физических систем, записанное соотношение частично упрощает процесс вычисления $\mathcal{Z}(a,b,\gamma)$. Также важно отметить, что полученное равенство является окончательным выражением только для случая статистики Реньи. Если же рассматриваются варианты статистики Тсаллиса или Шарма–Миттала, то необходимо учесть, что параметр b зависит от $Z^{(T,SM)}$ или $\tilde{Z}^{(T,SM)}$, поэтому записанное соотношение представляет собой уравнение на соответствующую статистическую сумму. В дальнейшем мы рассмотрим конкретную статистическую систему, на примере которой будет продемонстрировано удобство использования полученного выражения (29).

4. УСЛОВИЯ НА СРЕДНЮЮ ЭНЕРГИЮ

Как уже отмечалось, для полного решения задачи на условный экстремум необходимо найти множители Лагранжа β и $\tilde{\beta}$, которые определяются решениями уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i\, p_i^{(\mathcal{E})}(\beta) = U \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} E_i \frac{\left(\tilde{p}_i^{(\mathcal{E})}(\tilde{\beta})\right)^q}{\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{p}_j^{(\mathcal{E})}(\tilde{\beta})\right)^q} = U \tag{30}$$

соответственно. Рассмотрим первое из них, переписав его в параметрическом виде:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i\, P_i(a,b,\gamma) = U. \tag{31}$$

Как и в предыдущих расчетах, предполагается возможность изменения порядка проведения интегрирования, тогда из записанного выше соотношения получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} U\cdot\mathcal{Z}(a,b,\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} E_i \int_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{-x(E_i-U)}\,dx = \\ &= \int_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{xU}\left[\sum_{i=1}^{n} E_i e^{-yE_i}\right]_{y=x} dx = \\ &= \int_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{xU}\left[-\frac{\partial Z_c(y)}{\partial y}\right]_{y=x} dx. \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, после подстановки статистической суммы, а также соответствующих значений параметров a, b и γ, из данного уравнения может быть получено значение множителя Лагранжа β.

В случае же второго типа условий на среднюю энергию (30) нетрудно заметить, что в параметрическом виде соответствующее равенство примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i \frac{P_i^q(a,b,\gamma)}{\sum_{j=1}^{n} P_j^q(a,b,\gamma)} = \sum_{i=1}^{n} E_i P_i(a,b,q\gamma) = U, \tag{33}$$

откуда, по аналогии с предыдущим случаем, следует уравнение

$$U\cdot\mathcal{Z}(a,b,q\gamma) = \int_0^\infty f\left(x;q\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{xU}\left[-\frac{\partial Z_c(y)}{\partial y}\right]_{y=x} dx, \tag{34}$$

которое, после подстановки статистической суммы и соответствующих выражений для параметров a, b и γ, может быть использовано для определения множителя Лагранжа $\tilde{\beta}$.

Полученные выражения значительно упрощают задачу установления связи между множителем Лагранжа и изначально заданной внутренней энергией системы, так как процедура интегрирования по всему спектру состояний системы (по фазовому пространству) сводится к подстановке статистической суммы Гиббса и ее последующему интегрированию лишь по одному параметру x. В свою очередь, в силу экспоненциального вида слагаемых, задача вычисления статистической суммы Гиббса является более простой, чем расчет той же величины в случае обобщенных распределений.

5. ОБОБЩЁННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Применим вспомогательное гамма-распределение при проведении расчетов в рамках обобщенной статистики на примере классического идеального одноатомного газа, который состоит из N невзаимодействующих идентичных частиц без внутренней структуры. Гамильтониан такой системы имеет форму

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}, \tag{35}$$

где $\mathbf{p}_i = (p_{i_x}, p_{i_y}, p_{i_z})$ — импульс i-й частицы, а m — её масса. Для того, чтобы записать обобщенное распределение по импульсам для такой системы, нам необходимо вычислить статистический интеграл, а также внутреннюю энергию, которая фигурирует в выражении для функции плотности вероятности.

Для начала проведем вычисление статистической суммы, пользуясь выведенным соотношением (29). Статистическая сумма для идеального газа в случае канонического ансамбля является известной и имеет вид

$$Z_c(x) = \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^{3N}}\cdot\frac{V^N}{N!}\cdot x^{-3N/2}, \tag{36}$$

где x — обратная к температуре величина, а V — пространственный объем, занимаемый газом. Тогда, в соответствии с (29), соотношение для статистической суммы уже обобщенного распределения запишется в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(a,b,\gamma) &= \int_0^\infty f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{xU} Z_c(x)\,dx = \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{(2\pi\hbar)^{3N}}\frac{V^N}{N!}\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty x^{\left(\gamma-\frac{3N}{2}-1\right)} e^{-x\left(\frac{a}{b}-U\right)}\,dx = \\ &= \frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}N!}\frac{\Gamma\left(\gamma-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{2\pi m a}{b}\right)^{\frac{3N}{2}}\left(1-\frac{b}{a}U\right)^{\frac{3N}{2}-\gamma} \end{aligned} \tag{37}$$

с условиями сходимости

$$\begin{cases} \gamma - 3N/2 > 0, \\ a/b - U > 0, \end{cases} \tag{38}$$

которые напрямую следуют из полученного представления статистической суммы. Отметим, что при прямом расчете статистической суммы в обобщенном формализме необходимо произвести поочередное интегрирование по всем проекциям импульса каждой частицы, что приводит к довольно громоздким выкладкам, в процессе которых приходится отслеживать условия сходимости, меняющиеся с каждым последующим взятием интеграла.

Вычислим среднюю энергию U, которую мы определим как привычное среднее (31). Из (36) очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial Z_c(x)}{\partial x} = -\frac{3N}{2}\frac{Z_c(x)}{x}. \tag{39}$$

Теперь воспользуемся выражением (32)

$$U \cdot \mathcal{Z}(a,b,\gamma) = \frac{3N}{2}\int\limits_0^\infty x^{-1} f\left(x;\gamma,\frac{a}{b}\right) e^{xU} Z_c(x)dx = \\ = \frac{3N}{2}\,\frac{a}{b}\,\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)}\,\mathcal{Z}(a,b,\gamma-1), \tag{40}$$

откуда после подстановки результата (37) выразим среднюю энергию:

$$U = \frac{3N}{2b}\frac{a}{\gamma-1}. \tag{41}$$

Если подставить значения параметров (26), соответствующих распределению $p^{(\mathcal{E})}$, то получим выражение для средней энергии идеального газа в обобщенном формализме

$$U = \frac{3N}{2\beta^{(\mathcal{E})}}. \tag{42}$$

При этом можно записать условия на параметр q, которые напрямую следуют из записанных ранее условий сходимости и определения гамма-распределения:

$$p^{(\mathcal{E})}: \qquad q_{\min} < q < 1, \quad \text{где} \quad q_{\min} \equiv \frac{1}{1+\frac{2}{3N}}. \tag{43}$$

Аналогичным образом можно получить выражение для средней энергии, определенной через сопровождающее распределение (33). Технически результат будет совпадать с ранее полученным с точностью до замены обобщенного параметра $\gamma \mapsto q\gamma$. То есть средняя энергия, фигурирующая в распределении $\tilde{p}^{(\mathcal{E})}$, при подстановке соответствующих значений параметров будет иметь вид

$$U = \frac{3N}{2b}\frac{a}{q\gamma-1} = \frac{3N}{2\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}}, \tag{44}$$

а условия на параметр q будут следующими:

$$\tilde{p}^{(\mathcal{E})}: \quad 1 < q < \tilde{q}_{\max}, \quad \text{где} \quad \tilde{q}_{\max} \equiv 1 + \frac{2}{3N}. \tag{45}$$

Запишем распределение по импульсам $\rho_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N}$, получаемое путем тривиального интегрирования обобщенного распределения $P(a,b,\gamma)$ по координатной части фазового пространства,

$$\rho_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N} = K\left(1+\frac{b}{a}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - U\right)\right)^{-\gamma}, \tag{46}$$

где нормировочный множитель определяется как

$$K^{-1} = \frac{\Gamma\left(\gamma-\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{2\pi m a}{b}\right)^{\frac{3N}{2}}\left(1-\frac{b}{a}U\right)^{\frac{3N}{2}-\gamma}. \tag{47}$$

Для последующих вычислений удобно воспользоваться свойством вспомогательного гамма-распределения и выразить обобщенное распределение по импульсам через привычное распределение Максвелла:

$$\rho^{(M)}_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N}(x) = \left(\frac{x}{2\pi m}\right)^{3N/2}\exp\left(x\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}\right), \tag{48}$$

в котором x представляет собой обратную температуру системы. Для этого представим (46) в виде усреднения экспоненты по гамма-распределению и выделим в подынтегральном выражении распределение Максвелла (48). Тем самым мы получаем удобную для проведения расчетов запись обобщенного распределения по импульсам:

$$\rho_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N} = \int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma-\frac{3N}{2},\frac{a}{b}-U\right)\rho^{(M)}_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N}(x)\,dx. \tag{49}$$

Одночастичное распределение будет иметь аналогичное выражение

$$\rho_{\mathbf{p}} = \int\limits_0^\infty f\left(x;\gamma-\frac{3N}{2},\frac{a}{b}-U\right)\rho^{(M)}_{\mathbf{p}}(x)\,dx \tag{50}$$

или же в явном виде

$$\rho_{\mathbf{p}} = \left(\frac{b}{2\pi m a}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(\gamma-\frac{3(N-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\gamma-\frac{3N}{2}\right)}\times \\ \times\frac{\left(1+\frac{b}{a}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-U\right)\right)^{\frac{3(N-1)}{2}-\gamma}}{\left(1-\frac{b}{a}U\right)^{\frac{3N}{2}-\gamma}}. \tag{51}$$

Так как полученная функция не зависит от направления вектора импульса, имеет смысл перейти распределению по абсолютным значениям данной величины $\rho_p = 4\pi p^2\rho_{\mathbf{p}}$ или к распределению по модулю скорости $v = p/m$:

$$\rho_v = 4\pi v^2 \left(\frac{mb}{2\pi a}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\gamma - \frac{3(N-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\gamma - \frac{3N}{2}\right)} \times \\ \times \frac{\left(1 + \frac{b}{a}\left(\frac{mv^2}{2} - U\right)\right)^{\frac{3(N-1)}{2} - \gamma}}{\left(1 - \frac{b}{a}U\right)^{\frac{3N}{2} - \gamma}}, \quad (52)$$

которое представляет собой обобщение экспоненциального распределения Максвелла по скоростям.

6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА–РЕНЬИ

Заметим, что распределение (52) в общем случае содержит параметр b, который в зависимости от выбранного варианта статистики равен либо $\beta^{(\mathcal{E})}$, либо $\tilde{\beta}^{(\mathcal{E})}$, которые, в свою очередь, зависят от соответствующей статистической суммы. Другими словами, мы имеем дело с рекуррентным соотношением. Однако достаточно легко можно получить конечное выражение, что было сделано в работе [26] в случае статистики Тсаллиса.

В дальнейших вычислениях выберем вариант статистики Реньи $p^{(R)}$, в которой параметр $\beta^{(R)} = \beta$ представляет собой обратную термодинамическую температуру $\beta = 1/\theta$ [27], а значение средней энергии идеального газа совпадает с привычной максвелловской величиной $U = (3N/2)\theta$. Подставляя соответствующие значения обобщенных параметров в (52), получим распределение Максвелла–Реньи по скоростям, которое имеет вид

$$\rho_v^{(MR)} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi\theta}\,\frac{1-q}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3(N-1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)} \times \\ \times \frac{\left(1 + \frac{1-q}{q}\left(\frac{mv^2}{2\theta} - \frac{3N}{2}\right)\right)^{\frac{3(N-1)}{2} - \frac{1}{1-q}}}{\left(1 - \frac{1-q}{q} \cdot \frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2} - \frac{1}{1-q}}}. \quad (53)$$

В работе [28] соответствующее распределение по импульсам было получено посредством решения громоздкой задачи прямого вычисления интеграла статистической суммы. Предложенный же в настоящей работе подход позволяет представить распределение Максвелла–Реньи в виде свёртки привычного экспоненциального распределения Максвелла со вспомогательным гамма-распределением

$$\rho_v^{(MR)} = \int_0^\infty f\left(x;\, \frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2},\, \theta\left[\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}\right]\right) \times \\ \times \rho_v^{(M)}(x)\, dx. \quad (54)$$

Такая запись распределения Максвелла–Реньи дает возможность проанализировать предельный переход $q \to 1$ наиболее наглядным образом. Действительно, в силу свойства гамма-распределения:

$$\lim_{\gamma\to\infty} f\left(x;\, \gamma,\, \theta(\gamma-1)\right) = \delta\left(x - \frac{1}{\theta}\right), \quad (55)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, мы имеем

$$\lim_{q\to1} \rho_v^{(MR)} = \rho_v^{(M)} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}. \quad (56)$$

Для большей наглядности графики распределения Максвелла–Реньи представлены на рис. 1 и 2, откуда видно, что при $q \to 1$ обобщенное распределение принимает форму классического распределения Максвелла.

Рассмотрим некоторые характеристики статистической системы, описываемой распределением Максвелла–Реньи. Например, положение максимумов представленных кривых определяется наиболее вероятной скоростью, которая может быть выражена из решения задачи на экстремум функции $\rho_v^{(MR)}$:

$$\left.\frac{\partial \rho_v^{(MR)}}{\partial v}\right|_{v_\mathrm{p}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v}\left[v^2\left(1 + \frac{1-q}{q}\left(\frac{mv^2}{2\theta} - \frac{3N}{2}\right)\right)^{\frac{3(N-1)}{2} - \frac{1}{1-q}}\right]_{v_\mathrm{p}} = 0, \quad (57)$$

откуда получаем

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{p}^{(M)} \sqrt{\frac{\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}}{\frac{q}{1-q} - \frac{3(N-1)}{2}}}, \qquad v_\mathrm{p}^{(M)} = \sqrt{\frac{2\theta}{m}}. \quad (58)$$

Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{q\to1} v_\mathrm{p} = v_\mathrm{p}^{(M)}$.

Другой отличной от максвелловской величиной является средний модуль скорости молекул газа. Вычислим её, используя все тот же метод вспомогательного гамма-распределения. Согласно (54)

$$\langle v\rangle_{(MR)} = \int_0^\infty v\rho_v^{(MR)}\, dv = \int_0^\infty f\left(x;\, \frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2},\, \theta\left[\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}\right]\right) \langle v\rangle_{(M)}(x)\, dx, \quad (59)$$

где средний модуль скорости в статистике Максвелла связан с обратной температурой x как

$$\langle v\rangle_{(M)}(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi m x}}. \quad (60)$$

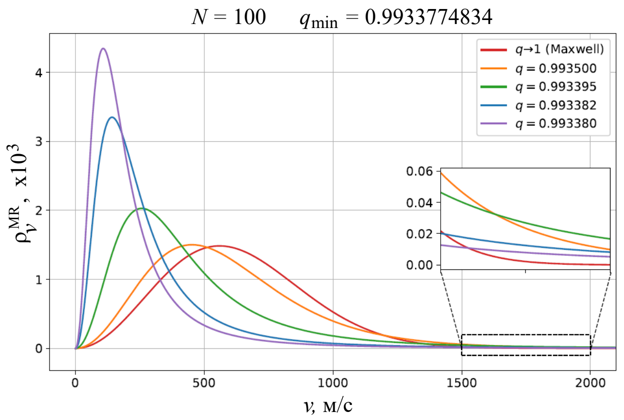

Рис. 1. Распределение Максвелла–Реньи для газа $N = 100$ атомов кислорода при температуре $T = 300$ K и различных q

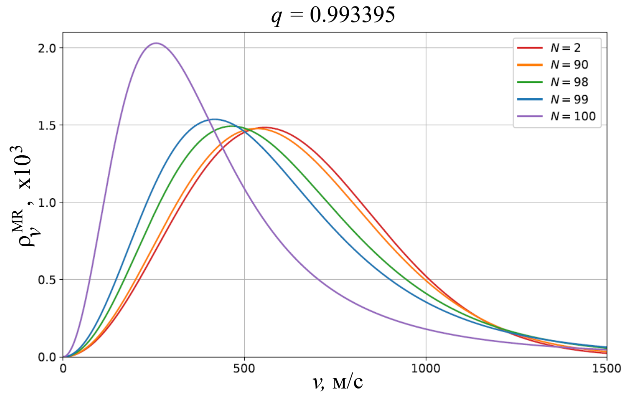

Рис. 2. Распределение Максвелла–Реньи для газа атомов кислорода при температуре $T = 300$ K и различных значениях N

Таким образом,

$$\langle v\rangle_{(MR)} = \langle v\rangle_{(M)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2}\right)} \sqrt{\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}},$$
$$\langle v\rangle_{(M)} = \sqrt{\frac{8\theta}{\pi m}}. \tag{61}$$

Характер отклонения среднего модуля скорости от соответствующей максвелловской величины продемонстрирован на рис. 3, откуда видно, что $\lim\limits_{q\to 1}\langle v\rangle_{(MR)} = \langle v\rangle_{(M)}$, а также $\lim\limits_{q\to q_{\min}}\langle v\rangle_{(MR)} = 0$.

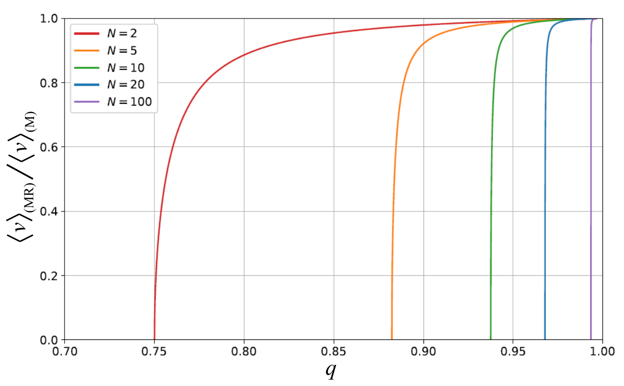

Рис. 3. Зависимость отношения $\langle v\rangle_{(MR)} \,/\, \langle v\rangle_{(M)}$ от q при различных N

Такой вид среднего модуля скорости обеспечивает ненулевое значение ковариации между скоростями частиц. Действительно, по определению ковариация между модулями скоростей частиц с номерами i и j ($i \neq j$) может быть записана как

$$\mathrm{cov}_{(MR)}(v_i, v_j) \equiv \langle v_i, v_j\rangle_{(MR)} - \langle v_i\rangle_{(MR)} \langle v_j\rangle_{(MR)}, \tag{62}$$

где произведение $\langle v_i\rangle_{(MR)} \langle v_j\rangle_{(MR)}$ равно уже известной величине $\langle v\rangle^2_{(MR)}$. Чтобы вычислить первое слагаемое, удобно воспользоваться представлением (54) для двухчастичного распределения. В силу свойства факторизации распределения Максвелла $\rho^{(M)}_{v_i,v_j} = \rho^{(M)}_{v_i}\rho^{(M)}_{v_j}$ запишем

$$\langle v_i, v_j\rangle_{(MR)} = \int\limits_0^\infty v_i v_j \rho^{(MR)}_{v_i,v_j}\, dv_i dv_j =$$
$$= \int\limits_0^\infty f\left(x;\, \frac{1}{1-q} - \frac{3N}{2},\, \theta\left[\frac{q}{1-q} - \frac{3N}{2}\right]\right) \times$$
$$\times \langle v\rangle^2_{(M)}(x)\, dx = \frac{8\theta}{\pi m}. \tag{63}$$

Таким образом, ковариация имеет вид

$$\mathrm{cov}_{(MR)}(v_i, v_j) = \langle v\rangle^2_{(M)} - \langle v\rangle^2_{(MR)} \tag{64}$$

и стремится к нулю в пределе $q \to 1$. Ненулевое значение ковариации между скоростями частиц свидетельствует о том, что эти физические величины являются взаимосвязанными, при этом данная связь имеет статистическую природу. Одним из возможных объяснений возникновения связей такого типа является предположение о том, что обобщённая статистика применима для описания систем с ограниченным или соразмерным термостатом (по числу частиц), который выступает в качестве посредника в процессе перераспределения скоростей от одной частицы к другой. В таком случае требование конечности или соразмерности термостата необходимо для того, чтобы переданная термостату энергия частицы не поглощалась им полностью, а возвращалась в систему и передавалась другим частицам, то есть чтобы приходящая в термостат информация не пропадала. Такое предположение выглядит правдоподобным с учетом того факта, что вспомогательное гамма-распределение берет свое начало из задачи о флуктуацях температуры, величина которых также может быть связана с размерами термостата.

Также отметим, что ковариация между скоростями может быть записана в виде:

$$\operatorname{cov}_{(MR)}(v_i,v_j)=\int_0^\infty f\left(x;\,\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2},\,\theta\left[\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}\right]\right)\left[\langle v\rangle_{(M)}(x)-\langle v\rangle_{(MR)}\right]^2 dx, \tag{65}$$

который представляет собой дисперсию максвелловской средней скорости в контексте гамма-распределения. Таким образом, если предположить, что гамма-распределение представляет собой распределение температуры в результате ее флуктуации, то дисперсия, характеризующая ширину спектра этих температур, определяет степень установленной статистической взаимосвязи между частицами системы, что служит еще одним доводом в пользу нашей гипотезы о природе ненулевых ковариаций.

Отличной от максвелловской оказывается и дисперсия модуля скорости частиц

$$D_{(MR)}[v]\equiv\left\langle v^2\right\rangle_{(MR)}-\langle v\rangle^2_{(MR)}=$$
$$=\langle v^2\rangle_{(M)}-\langle v\rangle^2_{(MR)}>\langle v^2\rangle_{(M)}-\langle v\rangle^2_{(M)}\equiv D_{(M)}[v], \tag{66}$$

что является следствием неравенства $\langle v\rangle_{(MR)}<\langle v\rangle_{(M)}$, продемонстрированного на рис. 3. Заметим, что из рис. 1 может показаться, что величина $D_{(MR)}[v]$ не должна превышать $D_{(M)}[v]$, так как соответствующие кривые визуально имеют меньшую полуширину, чем максвелловская кривая. Однако это не так в силу наличия свойственного обобщенному распределению «тяжелого хвоста», который можно наблюдать в увеличенной части графика на рис. 1. Именно эта особенность распределения Максвелла–Реньи обеспечивает выполнение полученного неравенства (66).

Усреднение максвелловских величин по вспомогательному гамма-распределению также увеличивает разброс энергии системы, который характеризуется дисперсией энергии:

$$D_{(MR)}[E]\equiv\left\langle E^2\right\rangle_{(MR)}-\langle E\rangle^2_{(MR)}\,. \tag{67}$$

Первое слагаемое

$$\left\langle E^2\right\rangle_{(MR)}=\int_0^\infty f\left(x;\,\frac{1}{1-q}-\frac{3N}{2},\theta\left[\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}\right]\right)\times$$
$$\times\left\langle E^2\right\rangle_{(M)}(x)\,dx, \tag{68}$$

где

$$\left\langle E^2\right\rangle_{(M)}(x)=\frac{3N}{2}\left(\frac{3N}{2}+1\right)x^{-2} \tag{69}$$

— это средняя энергия максвелловского газа из N частиц при температуре $1/x$. Таким образом,

$$\left\langle E^2\right\rangle_{(MR)}=\frac{3N}{2}\left(\frac{3N}{2}+1\right)\theta^2\frac{\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}}{\frac{q}{1-q}-\frac{3N}{2}-1}. \tag{70}$$

Второе слагаемое

$$\langle E\rangle^2_{(MR)}=U^2=\langle E\rangle^2_{(M)}=\left(\frac{3N}{2}\theta\right)^2, \tag{71}$$

откуда окончательно имеем выражение для дисперсии энергии:

$$D_{(MR)}[E]=\frac{3N}{2}\theta^2\left(1-\frac{1-q}{q}\left(\frac{3N}{2}+1\right)\right)^{-1}=$$
$$=D_{(M)}[E]\left(1-\frac{1-q}{q}\left(\frac{3N}{2}+1\right)\right)^{-1}, \tag{72}$$

что дает неравенство

$$D_{(MR)}[E]>D_{(M)}[E]. \tag{73}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен универсальный подход к проведению вычислений характеристик статистических систем в рамках обобщенных статистик Реньи, Тсаллиса и Шарма–Миттала, суть которого заключается в использовании вспомогательного гамма-распределения, параметры которого соответствуют тому или иному варианту обобщенной статистики. По сравнению с прямыми методами проведения расчетов такой способ выражения обобщенных распределений посредством усреднения экспоненты по гамма-распределению обладает целым рядом преимуществ.

Продемонстрировано, что предложенный подход позволяет унифицировать процедуру проведения вычислений сразу для всех упомянутых статистик, что дает возможность перевода результатов, полученных в рамках одной из обобщенных статистик, на языки других вариантов обобщенной статистки. С помощью рассмотренного метода были установлены удобные соотношения для обобщенной статистической суммы и средней энергии системы, которые позволяют использовать уже известные выражения соответствующих гиббсовских величин, что значительно упрощает процесс вычисления обобщенных характеристик.

Эффективность использования предложенного метода была продемонстрирована на примере системы с гамильтонианом идеального газа, для которого были рассчитаны средняя энергия и статистическая сумма, а также установлены ограничения на параметр q, напрямую вытекающие из условий сходимости вышеупомянутых величин. Обобщенное распределение Максвелла было записано через экспоненциальное распределение Максвелла, проинтегрированное по вспомогательному гамма-распределению, что также позволило выразить обобщенные величины через уже известные максвелловские характеристики.

На примере распределения Максвелла–Реньи продемонстрировано отклонение обобщенной статистики от привычной статистики Максвелла. Рассчитаны такие характеристики, как средний модуль скорости и наиболее вероятная скорость. Показано, что дисперсии скорости частиц и энергии системы в обобщенной статистике превышают значения соответствующих величин в контексте обычного распределения Максвелла. Установлено, что скорости частиц в рассмотренной системе обладают ненулевыми ковариациями, свидетельствующими о наличии статистической «связи» между частицами. Выдвинутая в настоящей работе гипотеза о природе возникновения такого рода взаимосвязей между частицами системы обозначает дальнейшие перспективные направления исследований, среди которых можно выделить изучение статистических систем с конечным или соразмерным термостатом. Возможно, для описания систем именно такого типа требуется использование обобщённой статистики.

Настоящая работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

[1] *Jaynes E.T.* // Phys. Rev. **106**, N 4. 620. (1957).
[2] *Jaynes E.T.* // Phys. Rev. **108**, N 2. 171. (1957)..
[3] *Shannon C.E.* // Bell Syst. Tech. J. **27**, N 3. 379. (1948).
[4] *Rényi A.* // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. **1**. 547. (1961).
[5] *Tsallis C.* // J. Stat. Phys. **52**. 479. (1988).
[6] *Sharma B.D., Mittal D.P.* // J. Math. Sci. **10**, N 75. 28. (1975).
[7] *Masi M.* // Phys. Lett. A. (2005). **338**, N 3-5. 217.
[8] *Hughes M., Marsh J., Arbeit J.* et al. // J. Acoust. Soc. Am. **125**, N 5. 3141. (2009).
[9] *Dong X.* // Nat. Commun. **7**, N 1. 12472. (2016).
[10] *Koltcov S., Ignatenko V., Koltsova O.* // Entropy. **21**, N 7. 660. (2019).
[11] *Rani S., Jawad A., Bamba K., Malik I.U.* // Symmetry. **11**, N 4. 509. (2019).
[12] *De Albuquerque M.P., Esquef I.A., Mello A.G.* // Pattern Recognit. Lett. **25**, N 9. 1059. (2004).
[13] *Weili S., Yu M., Zhanfang C., Hongbiao Z.* // Int. Conf. on Mechatronics and Automation. 1004. (2009).
[14] *Tsallis C.* // Entropy. **13**, N 10. 1765. (2011).
[15] *Gell-Mann M., Tsallis C.* // Nonextensive entropy: interdisciplinary applications. Oxford University Press, 2004.
[16] *Beck C.* // Cont. Phys. **50**, N 4. 495. (2009).
[17] *Bak P.* // How nature works: the science of self-organized criticality. Springer Science & Business Media, 2013.
[18] *Zipf G. K.* // Selected studies of the principle of relative frequency in language. Harvard University Press, 1932.
[19] *Gabaix X.* // Annu. Rev. Econ. **1**, N 1. 255. (2009).
[20] *Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E.* // SIAM review. **51**, N 4. 661. (2009).
[21] *Swordy S.* // Space Science Reviews. **99**, N 1. 85. (2001).
[22] *Wilk G., Wlodarczyk Z.* // Phys. Rev. Lett. **84**, N 13. 2770. (2000).
[23] *Башкиров А.Г., Суханов А.Д.* // ЖЭТФ. **122**, № 3(9). 513. (2002). (*Bashkirov A.G., Sukhanov A.D.* // J. Exp. Theor. Phys. **95**, 440. (2002).
[24] *Beck C., Cohen E.G.* // Physica A. **322**. 267. (2003).
[25] *Abe S., Beck C., Cohen E.G.* // Phys. Rev. E. **76**, N 3. 031102 (2007).
[26] *Бакиев Т.Н., Накашидзе Д.В., Савченко А.М., Семёнов К.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 5. 53. (2022). (*Bakiev T.N., Nakashidze D.V., Savchenko A.M., Semenov K.M.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. **77**, N 5 728. (2022).
[27] *Бакиев Т.Н., Накашидзе Д.В., Савченко А.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 6. 45. (2020). (*Bakiev T.N., Nakashidze D.V., Savchenko A.M.* // Mosc. Univ. Phys. Bull. **75**, N 6. 559. (2020).
[28] *Parvan A., Biro T.* // Phys. Lett. A. **340**, N 5-6. 375. (2005).

Using Gamma Distribution to Obtain Maxwell–Rényi Statistics and Other Generalized Distributions

D. V. Nakashidze[1,a], **A. M. Savchenko**[1], **T. N. Bakiev**[2]

[1] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia*
[2] *Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics Moscow 119048, Russia*
E-mail: [a] *nakashidze.dv16@physics.msu.ru*

A universal method is proposed for performing calculations within the framework of generalized statistics generated by the parametric Tsallis, Rényi, and Sharma–Mittal entropies. The essence of the approach lies in the use of an auxiliary gamma distribution whose parameters correspond to a particular variant of the statistics. Equations are derived that allow the generalised partition function and the mean energy to be expressed in terms of canonical quantities. The effectiveness of the proposed method is demonstrated using the example of Rényi statistics. The Maxwell–Rényi distribution is obtained and its properties are calculated, based on which assumptions about the possible nature of the generalised parameter are formulated.

PACS: 05.20.-y, 05.40.-a, 05.70.-a, 05.90.+m.
Keywords: gamma-distribution, Tsallis entropy, Rényi entropy, Sharma–Mittal entropy, generalized distribution, Maxwell distribution, generalized statistical mechanics.
Received 02 May 2024.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 4. Pp. 439–449.

Сведения об авторах

1. Накашидзе Дмитрий Викторович — аспирант; e-mail: nakashidze.dv16@physics.msu.ru.
2. Савченко Александр Максимович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.
3. Бакиев Тимур Наилевич — аспирант; e-mail: tnbakiev@edu.hse.ru.