

Орбитальная и спиновая составляющие плотности потока углового момента монохроматического излучения в непоглощающих средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом

П. С. Рыжиков,^{1,*} В. А. Макаров¹

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 11.05.2024; после доработки 21.05.2024; подписана в печать 29.05.2024)

Используя закон сохранения углового момента электромагнитного поля в виде балансного уравнения, связывающего в непоглощающей среде плотность углового момента, плотность потока углового момента и вызванную анизотропией среды плотность вращательного момента, получены формулы для плотностей орбитальной и спиновой составляющих углового момента и плотностей потоков этих величин в случае взаимодействия монохроматических волн в обладающей пространственной дисперсией непоглощающей среде, демонстрирующей нелинейный оптический отклик n -го порядка на внешнее световое поле. В средах, не обладающих пространственной и частотной дисперсией, полученные выражения совпадают с каноническими выражениями для плотностей орбитальной и спиновой составляющих углового момента, а также плотностей их потоков. Связанные с нелинейностью вещества добавки к наибольшим из компонент спиновых составляющих плотностей углового момента и его потока могут достигать при самофокусировке эллиптически поляризованного лазерного пучка гауссовой формы в изотропной гиротропной среде вблизи области его коллапса десяти процентов от соответствующих линейных частей.

PACS: 42.65.-k, 42.50.Tx. УДК: УДК: 537.8.

Ключевые слова: нелинейная оптика, пространственная дисперсия, оптический угловой момент.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2440403

ВВЕДЕНИЕ

Закон сохранения углового момента (момента импульса), обусловленный наличием симметрии рассматриваемого объекта относительно поворота вокруг некоторой оси, является одним из фундаментальных законов сохранения в физике [1]. В электродинамике он сводится к балансному уравнению, связывающему плотность углового момента, плотность потока углового момента и вызванную анизотропией среды плотность вращательного момента, действующего на свет со стороны среды где распространяется электромагнитное излучение [2, 3]. Большой интерес к угловому моменту электромагнитного поля связан с возможностями его применения в задачах оптического контроля [4–6], передачи информации [7–9], диагностики вещества [10], а также в некоторых других приложениях [11–13].

Непосредственное определение плотности и плотности потока углового момента на основе плотности импульса и плотности потока импульса приводят к выражениям, явно зависящим от выбора начала координат [14–17]. Векторный характер электромагнитного поля позволяет представить его угловой момент в виде двух слагаемых: спиновой составляющей (независящей от выбора начала ко-

ординат) и орбитальной составляющей (зависящей от выбора начала координат) [18]. Довольно часто эти составляющие удается связать, соответственно, с поляризацией электрического поля и его поперечным пространственным распределением [19]. Среди подходов, применяемых к разделению углового момента, выделяется обоснованный в теоретической физике [1] метод, приводящий к каноническим выражениям для спиновой и орбитальной составляющих углового момента [18, 20] на основе плотности функции Лагранжа электромагнитного поля [18, 20]. Однако получающиеся при этом составляющие углового момента не всегда являются калибровочно инвариантными [18, 20, 21].

Разделение углового момента на две составляющие, однозначное для параксиальных монохроматических пучков, сталкивается с определенными трудностями (см., например, [20]) в случае волновых полей, не позволяющих использовать параксиальное приближение для их описания. В этом случае формулы для плотностей орбитальной и спиновой составляющих углового момента и плотностей их потоков могут быть получены непосредственно из уравнений Максвелла, причём в некоторых случаях финальный результат совпадает с каноническими выражениями для этих величин [22–25]. Преимуществом таких подходов является возможность получения с их помощью выражений для орбитальной и спиновой составляющих углового момента в сре-

* E-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru

дах, для которых на данном этапе неизвестно выражение для плотности функции Лагранжа электромагнитного поля. Одной из них является среда, демонстрирующая нелинейный нелокальный оптический отклик на внешнее световое поле. В настоящий момент известна только плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в среде, демонстрирующей исключительно локальный характер нелинейного оптического отклика [26, 27].

В [28] была найдена плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в линейной среде с пространственной дисперсией оптического отклика. Для ее записи требовались материальные уравнения, связывающие индукции электрического и магнитного полей с их напряженностями. В нелинейной оптике сред с пространственной дисперсией обычно применяют материальные уравнения в форме Ландау–Лифшица, в которых индукция электрического поля интегрально связывается с напряженностями электрических полей распространяющихся волн, а напряжённость магнитного поля считается тождественно равной его индукции [29]. В рамках такого подхода было показано [16, 17], что выражение для плотности потока углового момента электромагнитного поля в таких средах содержит независящее от выбора начала координат слагаемое, появление которого обусловлено нелокальностью нелинейного оптического отклика. Открытым остается вопрос, чему равны орбитальная и спиновая составляющие найденной полной плотности потока углового момента света в среде с нелокальностью нелинейного оптического отклика и насколько весомыми являются связанные с нелинейностью среды добавки к спиновым составляющим плотностей углового момента и его потока при самовоздействии эллиптически поляризованных лазерных пучков гауссовой формы. Ответы на них будут даны ниже.

1. ПЛОТНОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА И ЕГО ПОТОКА

В электродинамике закон сохранения углового момента (момента количества движения) связывает балансным уравнением [2, 25]

$$\frac{1}{c} \partial_t J_i + \partial_k M_{ik} = \tau_i \quad (1)$$

плотности углового момента \mathbf{J} , потока углового момента \hat{M} и вращательного момента τ , явный вид которых определяется формой записи материальных уравнений. В (1) индексы i и k принимают значения x , y и z . Будем считать напряжённость магнитного поля \mathbf{H} равной его индукции \mathbf{B} , а индукцию электрического поля \mathbf{D} представим в виде:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(n)}, \quad (2)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, а $\mathbf{P}^{(n)}$ — поляризация среды, связанная с нели-

нейным оптическим откликом n -го порядка. Пусть в непоглощающей однородной среде, демонстрирующей нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле, распространяются взаимодействующие в различных нелинейных процессах волны, частоты ω которых образуют конечное множество Ω . В этом случае векторы, характеризующие создаваемое ими в среде электромагнитное поле, удобно представить в виде:

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{E}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{D}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{D}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{B}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{B}}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}^{(n)} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^{(n)}(\omega) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (6)$$

Будем считать, что потерями на всех частотах распространяющихся волн можно пренебречь, а спектры комплексных амплитуд $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\omega)$ достаточно узки, чтобы можно было пренебречь частотной дисперсией среды. Ограничимся описанием нелинейного взаимодействия этих волн в рамках первого приближения по параметру пространственной дисперсии μ , равного отношению характерного масштаба проявления нелокальности оптического отклика к минимальной из длин распространяющихся волн. В этом случае используемое в рамках подхода Ландау–Лифшица интегральное соотношение между поляризацией среды и напряженностями полей взаимодействующих $n+1$ волн [30, 31] сводится к материальному уравнению для $\tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega)$, правая часть которого содержит не более $n+1$ слагаемых. Первое из них (нулевое приближение по μ) является сверткой локальной нелинейной восприимчивости n -го порядка (тензор $n+1$ ранга) с n векторами $\tilde{\mathbf{E}}(\omega')$, сумма частотных аргументов которых ω' , принадлежащих Ω , с учетом знака равна ω . Каждое из оставшихся слагаемых в выражении для $\tilde{\mathbf{P}}^{(n)}(\omega)$ является сверткой нелокальной нелинейной восприимчивости n -го порядка (тензор $n+2$ ранга) с $n-1$ векторами $\tilde{\mathbf{E}}(\omega')$, сумма частотных аргументов которых ω' с учетом знака равна $\omega - \omega''$, и $\nabla \tilde{\mathbf{E}}(\omega'')$. Подчеркнем, что для таких материальных уравнений неизвестно выражение для плотности функции Лагранжа электромагнитного поля, но они могут использоваться при решении задач преобразования углового момента света в средах, проявляющих нелокальность оптического отклика.

В первом приближении по μ входящие в левую часть (1) плотности углового момента и потока углового момента имеют вид [17]:

$$J_i = e_{ijk}x_j e_{klm} \sum_{\omega \in \Omega} D_l^*(\omega) B_m(\omega) + \text{c.c.}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_{ik} = \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp}x_j \left[\delta_{pk} \left(\frac{1}{2} |E_l(\omega)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) P_l^{(n)}(\omega) \right) - E_p(\omega) D_k^*(\omega) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) \left(\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m(\omega')]} \partial_p E_m(\omega') + \frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m^*(\omega')]} \partial_p E_m^*(\omega') \right) \right] + \\ + \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp}x_j \left[\frac{1}{2} \delta_{pk} |B_l(\omega)|^2 - B_p^*(\omega) B_k(\omega) \right] + \\ + \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} E_p^*(\omega) \left(\frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l(\omega')]} E_l(\omega') + \frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l^*(\omega')]} E_l^*(\omega') \right) + \text{c.c.}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $j, l, m, p = x, y, z$. Подчеркнем, что последнее слагаемое в (8) явно не зависит от x, y и z . Впервые полученная в [16, 17] формула для входящего в (1) вращательного момента τ_i , учитывающая нелокальность оптического отклика среды, довольно громоздка и здесь не приводится.

2. СПИНОВАЯ И ОРБИТАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПЛОТНОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА И ЕГО ПОТОКА

Ниже будет показано, что и плотность углового момента (7), и плотность потока углового момента (8) могут быть представлены в виде сумм трёх слагаемых:

$$J_i = L_i + S_i + F_i, \quad (9)$$

$$M_{ik} = L_{ik} + S_{ik} + F_{ik}, \quad (10)$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{1}{c} \partial_t F_i + \partial_k F_{ik} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{c} \partial_t (L_i + S_i) + \partial_k (L_{ik} + S_{ik}) = \tau_i. \quad (12)$$

Здесь S_i и S_{ik} — соответственно плотности спиновой составляющей углового момента и потока спиновой составляющей углового момента, не зависящие явным образом от пространственных координат, а L_i и L_{ik} — соответственно плотности орбитальной составляющей углового момента и потока орбитальной составляющей углового момента, явно зависящие от выбора начала координат. Все четыре упомянутые величины переходят в канонические выражения для плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента в случае отсутствия пространственной и временной дисперсии. Отличные от нуля F_i и F_{ik} свидетельствуют о том, что плотности углового момента и потока углового момента имеют не

только орбитальную и спиновую составляющие. Однако связанные с дополнительными слагаемыми F_i и F_{ik} вклады в выражения для полного углового момента и полного потока углового момента, получающиеся в результате их интегрирования по всему пространству, оказываются нулевыми.

Для обоснования сделанных утверждений выразим напряжённость электрического и индукцию магнитного полей с помощью векторного и скалярного потенциалов $\mathbf{A}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$:

$$\mathbf{E}(\omega) = -\nabla \varphi(\omega) - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}(\omega), \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \nabla \times \mathbf{A}(\omega). \quad (14)$$

Далее выразим в равенствах (7) и (8) явно входящие напряжённость электрического и индукцию магнитного полей, используя формулы (13) и (14). Возникшую после этого в (7) свёртку тензоров Леви-Чивиты преобразуем с помощью соотношения:

$$e_{klm} e_{mjp} = \delta_{kj} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lj}, \quad (15)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. В результате плотность углового момента будет представлена в виде двух слагаемых. Первое из них

$$L_i = \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk}x_j D_l^*(\omega) \partial_k A_l(\omega) + \text{c.c.} \quad (16)$$

часто встречается в качестве подынтегрального выражения при определении орбитальной составляющей углового момента [22, 23, 25]. В отсутствие частотной и пространственной дисперсии (16) превращается в каноническое выражение для плотности орбитальной составляющей углового момента света в линейных средах [18, 20] (также может быть получено и для нелинейных сред без дисперсии на основе плотности функции Лагранжа [26, 27]). Это, а также явная зависимость L_i от выбора начала координат, дает основание считать (16) плотностью

орбитального момента света и в нелинейных средах, проявляющих нелокальность оптического отклика.

Второе из получившихся слагаемых преобразуем, используя правила дифференцирования и уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} & -e_{ijk} \sum_{\omega \in \Omega} x_j D_l^*(\omega) \partial_l A_k(\omega) + \text{c.c.} = \\ & = -e_{ijk} \sum_{\omega \in \Omega} \{ \partial_l [x_j D_l^*(\omega) A_k(\omega)] - D_j^*(\omega) A_k(\omega) \} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (17)$$

Не имеющее явной зависимости от пространственных координат последнее слагаемое в правой части (17)

$$S_i = \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk} D_j^*(\omega) A_k(\omega) + \text{c.c.} \quad (18)$$

часто встречается в качестве подынтегрального выражения при определении спиновой составляющей углового момента электромагнитного поля [22, 23, 25], а также как каноническое выражение для плотности спиновой составляющей углового момента в вакууме и линейных средах [18, 20]. Основываясь на этих соображениях, естественно также считать (18) плотностью спиновой составляющей углового момента электромагнитного поля в средах с нелокальным нелинейным оптическим откликом.

Вид оставшегося в (17) слагаемого

$$F_i = -\partial_l \left(\sum_{\omega \in \Omega} e_{ijk} x_j D_l^*(\omega) A_k(\omega) \right) + \text{c.c.} \quad (19)$$

говорит о его исключительной важности при записи локальной формы закона сохранения углового момента. Однако интеграл от него по всему объему равен нулю и оно не дает вклад в полный угловой момент электромагнитного поля. В связи с этим авторы работ по разделению углового момента на орбитальную и спиновую составляющие отбрасывают его на начальном этапе [22, 23, 25]. Чтобы сумма $L_i + S_i$ корректно описывала плотность углового момента J_i , нужно выделить из (8) плотность потока F_{ik} , удовлетворяющую, с учетом явного вида (19), уравнению (11). При этом оставшаяся после этого часть (8) с учетом явного вида L_i и S_i должна удовлетворять равенству (12).

Для осуществления этого в начале заметим, что не зависящее от выбора начала координат последнее слагаемое в (8) отлично от нуля только если взаимодействие распространяющихся волн происходит в среде с нелокальным оптическим откликом. Это, а также его связь с поляризацией излучения [32], позволяют считать данное выражение частью плотности спиновой составляющей потока углового момента. Далее представим слагаемое, содержащее квадратную скобку с индукцией \mathbf{B} , в формуле (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \in \Omega} e_{ijp} x_j \left(\frac{1}{2} \delta_{pk} B_l^*(\omega) B_l(\omega) - B_p^*(\omega) B_k(\omega) \right) + \text{c.c.} = \sum_{\omega \in \Omega} \left(-\frac{1}{2} e_{ijp} x_j \delta_{pk} B_l^*(\omega) B_l(\omega) + \right. \\ & \quad \left. + e_{knl} e_{ijm} x_j B_l^*(\omega) \partial_m A_n(\omega) \right) + \sum_{\omega \in \Omega} [\delta_{ik} B_l^*(\omega) A_l(\omega) - B_i^*(\omega) A_k(\omega)] + \\ & \quad + \sum_{\omega \in \Omega} e_{mkl} e_{ijn} B_l^*(\omega) \partial_m [x_j A_n(\omega)] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (20)$$

В справедливости последнего тождества легко убедиться, преобразовав правую часть (20) в левую. Для этого надо представить $\partial_m [x_j A_n(\omega)]$ в виде двух слагаемых и далее воспользоваться формулами (14) и (15). Первая группа слагаемых в правой части (20) совпадает с частью выражения для плотности потока орбитальной составляющей углового момента [18, 20, 24], вторая — с полным выражением для плотности потока спиновой составляющей

углового момента [18, 20, 24]. Третья группа слагаемых не имеет аналогов, но и не является специфичной для каких-либо сред. Поэтому его целесообразно считать частью F_{ik} .

Из слагаемых первой квадратной скобки в правой части формулы (8) осталось преобразовать только слагаемое, содержащее $D_k^*(\omega)$, выразив напряжённость электрического поля через скалярный и векторный потенциалы (13):

$$-e_{ijp} x_j \sum_{\omega \in \Omega} E_p(\omega) D_k^*(\omega) + \text{c.c.} = e_{ijp} x_j \sum_{\omega \in \Omega} D_k^*(\omega) \left(\partial_p \varphi(\omega) + \frac{1}{c} \partial_t A_p(\omega) \right) + \text{c.c.} \quad (21)$$

Первое слагаемое в правой части (21) является частью канонического выражения для плотности потока орбитальной составляющей углового момента [18, 20, 24]. Второе слагаемое в правой части (21)

естественно включить в F_{ik} .

После сделанных преобразований отдельных слагаемых в (8) M_{ik} может быть записано в виде (10), где

$$\begin{aligned}
 L_{ik} = e_{ijp}x_j \sum_{\omega \in \Omega} \left[\delta_{pk} \left(\frac{1}{2} E_l^*(\omega) E_l(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) P_l^{(n)}(\omega) - \frac{1}{2} B_l^*(\omega) B_l(\omega) \right) - \right. \\
 \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} \frac{1}{n+1} E_l^*(\omega) \left(\frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m(\omega')]} \partial_p E_m(\omega') + \frac{\partial P_l^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_m^*(\omega')]} \partial_p E_m^*(\omega') \right) \right] + \\
 + e_{knl} B_l^*(\omega) \partial_p A_n(\omega) + D_k^*(\omega) \partial_p \varphi(\omega) + \text{c.c.}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{ik} = \sum_{\omega \in \Omega} \left(\delta_{ik} B_l^*(\omega) A_l(\omega) - B_i^*(\omega) A_k(\omega) + e_{ijp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{\omega' \in \Omega \\ \omega' \neq \omega}} E_p^*(\omega) \left(\frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l(\omega')]} E_l(\omega') + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial P_j^{(n)}(\omega)}{\partial [\partial_k E_l^*(\omega')]} E_l^*(\omega') \right) \right) + \text{c.c.}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$F_{ik} = \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \partial_m [e_{ijn} e_{mkl} B_l^*(\omega) x_j A_n(\omega)] + \frac{1}{c} \partial_t [e_{ijn} x_j D_k^*(\omega) A_n(\omega)] \right\} + \text{c.c.} \quad (24)$$

Выражение (24), как и (19), является комбинацией полных производных, причём компонента F_{ik} не содержит пространственной производной по переменной x_k , так же, как компонента F_i не содержит производной по времени. Нетрудно убедиться, что подстановка этих выражений в (11) обращает его левую часть в нуль. Поэтому выражения $L_i + S_i$ и $L_{ik} + S_{ik}$, описываемые (16), (18), (22) и (23), подчиняются тому же закону сохранения углового момента (1), что и исходные плотности углового момента и потока углового момента J_i и M_{ik} , определяемые формулами (7) и (8). При этом S_i и S_{ik} не зависят от выбора начала координат, а L_i и L_{ik} демонстрируют явную зависимость от x_k . В случае локальных линейных и нелинейных сред эти выражения переходят в канонические формулы [18, 20, 24] для компонент плотностей и плотностей потоков орбитальной и спиновой составляющих углового момента. В связи с этим можно считать, что полученные выражения (16), (18), (22) и (23) обобщают канонические выражения для этих величин на случай линейных и нелинейных сред, проявляющих нелокальность оптического отклика на внешнее световое поле.

Описанная выше процедура также может быть применена и к средам с более сложным оптическим откликом. Отметим также, что пропорциональная δ_{pk} часть L_{ik} в случае не обладающих пространственной дисперсией линейных и нелинейных сред совпадает с плотностью функции Лагранжа электромагнитного поля [26, 27], если в $P_l^{(n)}(\omega)$ опущены пространственные производные.

3. ВЫЗВАННЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СРЕДЫ ДОБАВКИ К КОМПОНЕНТАМ СПИНОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЛОТНОСТЕЙ УГЛОВОГО МОМЕНТА И ЕГО ПОТОКА ПРИ САМОВОЗДЕЙСТВИИ СВЕТА

В качестве примера приведем формулы для L_i , S_i , F_i , L_{ik} , S_{ik} и F_{ik} в случае самовоздействия монохроматического эллиптически поляризованного излучения частоты ω в непоглощающей однородной среде, демонстрирующей нелокальность оптического отклика. В этом случае связывающие \mathbf{E} и \mathbf{P} материальные уравнения принимают вид:

$$P_i^{(1)}(\omega) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega) + \gamma_{ijk}^{(1)}(\omega) \partial_k E_j(\omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 P_i^{(3)}(\omega) = \chi_{ijlm}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^*(\omega) E_l(\omega) E_m(\omega) + \\
 + \gamma_{ijlmk}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E_j^*(\omega) E_l(\omega) \partial_k E_m(\omega). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\chi}^{(1)}$ и $\hat{\gamma}^{(1)}$ соответственно локальные и нелокальные линейные оптические восприимчивости, а $\hat{\chi}^{(3)}$ и $\hat{\gamma}^{(3)}$ — локальные и нелокальные нелинейные восприимчивости среды, демонстрирующей кубический по напряженности электрического поля оптический отклик. Подстановка (25) и (26) в (22) и (23), использование в последних кулоновской калибровки ($\varphi = 0$), позволяющей из (13) получить формулу $\mathbf{A}(\omega) = -(ic/\omega)\mathbf{E}(\omega)$, дающую возможность заменить $\mathbf{A}(\omega)$ на $-(ic/\omega)\mathbf{E}(\omega)$, а также одного из уравнений системы уравнений Максвелла, позволяющего в (22) – (23) записать $\mathbf{V}(\omega)$ как $-(ic/\omega)\nabla \times \mathbf{E}(\omega)$, приводит к следующим формулам для L_i , S_i , F_i , L_{ik} , S_{ik} и F_{ik} :

$$L_i = -\frac{ic}{\omega} e_{ijk} x_j \left(E_l^* + P_l^{(1)*} + P_l^{(3)*} \right) \partial_k E_l + \text{c.c.}, \quad (27)$$

$$S_i = -\frac{ic}{\omega} e_{ijk} \left(E_j^* + P_j^{(1)*} + P_j^{(3)*} \right) E_k + \text{c.c.}, \quad (28)$$

$$F_i = \frac{ic}{\omega} e_{ijk} \partial_l \left[x_j \left(E_l^* + P_l^{(1)*} + P_l^{(3)*} \right) E_k \right] + \text{c.c.}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} L_{ik} = e_{ijp} x_j \left\{ \frac{\delta_{pk}}{2} \left[|E_l|^2 + \chi_{lm}^{(1)} E_l^* E_m + \frac{1}{2} \chi_{lqrm}^{(3)} E_l^* E_q^* E_r E_m + \left(\gamma_{lmn}^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_{lqrmn}^{(3)} E_q^* E_r \right) E_l^* \partial_n E_m - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c^2}{\omega^2} (\partial_m E_n^* \partial_m E_n - \partial_m E_n^* \partial_n E_m) \right] - \frac{1}{2} \left(\gamma_{lmk}^{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_{lqrmk}^{(3)} E_q^* E_r \right) E_l^* \partial_p E_m \right. \\ \left. + \frac{c^2}{\omega^2} (\partial_k E_n^* \partial_p E_n - \partial_n E_k^* \partial_p E_n) \right\} + \text{c.c.}, \quad (30) \end{aligned}$$

$$S_{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} (\delta_{ik} e_{lmn} E_l - e_{imn} E_k) \partial_m E_n^* + \frac{1}{2} e_{ijp} \left(\gamma_{jlk}^{(1)} E_l + \frac{1}{2} \gamma_{jqrlk}^{(3)} E_q^* E_r E_l \right) E_p^* + \text{c.c.}, \quad (31)$$

$$F_{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} \partial_m [e_{ijn} e_{mkl} e_{lrp} x_j \partial_r E_p^*] - \frac{i}{\omega} \partial_t [e_{ijn} x_j \left(E_k^* + P_k^{(1)*} + P_k^{(3)*} \right) E_n(\omega)] + \text{c.c.} \quad (32)$$

Частотные аргументы компонент тензоров $\hat{\chi}^{(1)}$, $\hat{\chi}^{(3)}$, $\hat{\gamma}^{(1)}$, $\hat{\gamma}^{(3)}$, вектора напряженности электрического поля, линейной и нелинейной составляющих поляризации среды от ω здесь и далее для краткости опущены, индексы q , r и n принимают значения x , y и z .

4. ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ИЗОТРОПНОЙ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЫ ДОБАВКИ К КОМПОНЕНТАМ СПИНОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЛОТНОСТЕЙ УГЛОВОГО МОМЕНТА И ЕГО ПОТОКА ПРИ САМОФОКУСИРОВКЕ СВЕТА

Если самофокусировка эллиптически поляризованного пучка, распространяющегося вдоль оси z , происходит в непоглощающей изотропной гиротропной среде (симметрия $\infty\infty$), то с учетом соотношений внутренней симметрии [30, 31, 33–36] $\chi_{ij}^{(1)} = (\varepsilon - 1) \delta_{ij} / 4\pi$, $\gamma_{ijk}^{(1)} = \gamma_1 e_{ijk}$, $\chi_{ijlm}^{(3)} = \chi_1 (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) / 2 + \chi_2 \delta_{ij} \delta_{lm}$, $\gamma_{ijmnl}^{(3)} = \gamma_3 (e_{ilm} \delta_{jn} + e_{iln} \delta_{jm} + e_{jlm} \delta_{in} + e_{jln} \delta_{im}) / 2$, где ε — линейная диэлектрическая проницаемость, а $\chi_{1,2}$ и $\gamma_{1,3}$ — зависящие от ω константы. Если для ее описания используется метод медленно меняющихся амплитуд [37], то $\tilde{E}_{x,y} = \mathcal{E}_{x,y}(\sqrt{\mu}x, \sqrt{\mu}y, \tilde{\mu}z) \exp(ikz)$, где k — модуль волнового вектора, $\tilde{\mu}$ — символический параметр малости и дифференцирование $\mathcal{E}_{x,y}$ по z сводится к умножению $\mathcal{E}_{x,y}$ на ik . Продольной составляющей электрического поля в этом случае из-за её малости можно пренебречь.

Медленно меняющиеся амплитуды $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E}_x \pm i\mathcal{E}_y$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля удовлетворяют следующей системе уравнений [38, 39]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) \mathcal{E}_{\pm} = i \left[\pm \rho_0 + \left(\frac{\sigma_1}{2} \pm \rho_1 \right) \times \right. \\ \left. \times |\mathcal{E}_{\pm}|^2 + \left(\frac{\sigma_1}{2} + \sigma_2 \right) |\mathcal{E}_{\mp}|^2 \right] \mathcal{E}_{\pm}, \quad (33)$$

где $\rho_0 = 2\pi\omega^2\gamma_1/c^2$, $\sigma_{1,2} = 2\pi\omega^2\chi_{1,2}/kc^2$, $\rho_1 = 2\pi\omega^2\gamma_3/c^2$. Ее решение позволяет, в частности, записать компоненты S_z и S_{zz} плотности спиновой составляющей углового момента и плотности потока спиновой составляющей углового момента, намного большие остальных компонент вектора \mathbf{S} и тензора \hat{S} , в следующем виде:

$$S_z = -2 \frac{\varepsilon^{3/2}}{k} I (M + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \quad (34)$$

$$S_{zz} = -2 \frac{\varepsilon}{k} I (M + \beta_1/2 + \beta_3/4). \quad (35)$$

Здесь $\beta_1 = 2\rho_0/k$, $\beta_2 = 2\sigma_1 IM/k$, $\beta_3 = 2\rho_1 I \times (1 + M^2)/k$, $I(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)/2$ — нормированная интенсивность, а $M(x, y, z) = (|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2)/(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2)$ — степень эллиптичности распространяющегося излучения. Параметры $\beta_{1,2,3}$ характеризуют вклады в S_z и S_{zz} , связанные, соответственно, с нелокальным линейным, локальным кубическим и нелокальным кубическим откликами однородной непоглощающей изотропной гиротропной среды на внешнее световое поле. В точках среды, где излучение линейно поляризовано ($M = 0$), отличные от нуля значения плотности спиновой составляющей углового момента и плотности её потока обусловлены только нелокальностью оптического отклика среды.

Будем считать, что на ее поверхность $z = 0$ пада-

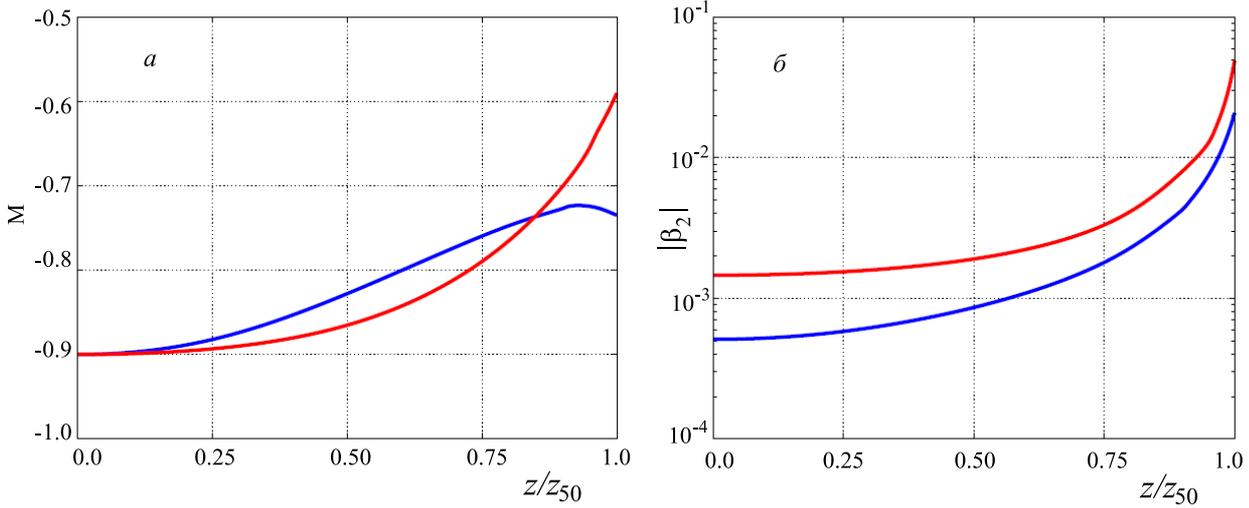


Рисунок. Зависимость M (а) и $|\beta_2|$ (б) на оси пучка от координаты распространения при $w/\lambda = 25$ и $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ при $I_\sigma = 7$ (синяя кривая) и $I_\sigma = 20$ (красная кривая) в случае падения на среду излучения с поляризацией, близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Единица на оси абсцисс соответствует значению z/L_d при котором I в пятьдесят раз превышает I_0

ет эллиптически поляризованный гауссов пучок:

$$\mathcal{E}_\pm(x, y, 0) = \sqrt{I_0(1 \pm M_0)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (36)$$

где $M_0 = M(x, y, 0)$, а $I_0 = I(x, y, 0)$. Переходя к безразмерным переменным x/w , y/w , z/L_d и $A_\pm/\sqrt{I_0}$, где $L_d = kw^2$, легко установить, что характер самодействия света определяется следующими параметрами падающего излучения и непоглощающей изотропной гиротропной среды: $I_\sigma = \sigma_1 I_0 L_d / 2$, M_0 , $\rho_0 L_d$, $2\rho_1/\sigma_1$ и $2\sigma_2/\sigma_1$. Значение $I_\sigma \approx 1$ соответствует порогу самофокусировки линейно поляризованного излучения в случае самофокусировки пучка в изотропной негиротропной среде, при ее описании в приосевом приближении [37]. Анализ формул для $\beta_{2,3}$ показывает, что они достигают максимального значения в тех точках среды, где распространяющийся пучок имеет минимальный диаметр и циркулярно поляризован ($M = \pm 1$). Именно в этом случае $|\beta_2| \approx 0.051(\lambda/w)^2 I_\sigma (I/I_0)$ и при $w \approx 25\lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$, значение β_2 может достигать десяти процентов от M .

На рисунке в качестве примера приведены результаты решения системы уравнений (33) при $\rho_0 L_d = 0.1$, $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, $\rho_1/\sigma_1 = 0.05$ для $I_\sigma = 7$ и $I_\sigma = 20$ в случае падения на среду излучения с поляризацией, близкой к круговой ($M_0 = -0.9$). Единица на оси абсцисс z/z_{50} соответствует значению z/L_d , при котором I в пятьдесят раз превышает I_0 . При $I_\sigma = 20$ и $M_0 = -0.9$ степень эллиптичности на оси пучка $M(z = z_{50}) \approx -0.6$ (а) и $\beta_2(z = z_{50}) \approx -0.048$ (б).

Вклад β_3 существенным образом зависит от поляризации пучка. В точках пространства, где поляризация излучения близка к циркулярной $\beta_3/\beta_2 \approx \rho_1/\sigma_1 \approx d/\lambda$, где d — малый параметр, характеризующий масштаб проявления нелокальности оптического отклика. Это отношение в обыч-

ных средах не превышает 0.01, но в отдельных случаях может достигать 0.1 (например, в изотропной фазе холестерического жидкого кристалла вблизи температуры перехода в мезофазу). Но в точках среды, где поляризация излучения близка к линейной, только β_1 и β_3 обеспечивают отличные от нуля значения плотностей спиновой составляющей углового момента S_z и его потока S_{zz} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили формулы для плотностей орбитальной и спиновой составляющей углового момента и плотностей потоков этих величин в случае взаимодействия $n + 1$ монохроматических волн в обладающей пространственной дисперсией непоглощающей среде, демонстрирующей нелинейный оптический отклик n -го порядка на внешнее световое поле. В отсутствие нелокальности оптического отклика найденные формулы в точности совпадают с ранее известными каноническими выражениями для этих величин. Формулы для плотностей орбитальной и спиновой составляющих углового момента и плотностей потоков этих величин удалось получить, используя закон сохранения углового момента в виде балансного уравнения, связывающего в непоглощающей среде плотность углового момента, плотность потока углового момента и вызванную анизотропией среды плотность вращательного момента. Разность между плотностью полного углового момента (полного потока углового момента), найденной в [16, 17], и суммой орбитальной и спиновой составляющих углового момента (орбитальной и спиновой составляющих плотности потока углового момента), полученной в настоящей работе, имеет в различных точках пространства разный знак, и ее вклад в полный угловой

момент, получающийся в результате её интегрирования по всему пространству, оказывается равным нулю. Использованная процедура вывода формул для плотностей орбитальной и спиновой составляющих углового момента и плотностей их потоков может быть применена и в случае сред, материальные уравнения в которых, связывающие индукцию электрического поля с его напряженностью, имеют более сложный вид.

Связанные с нелинейностью вещества добавки к наибольшим из компонент спиновых составляющих плотностей углового момента и его потока мо-

гут достигать при самофокусировке эллиптически поляризованного лазерного пучка гауссовой формы в изотропной гиротропной среде (класс симметрии $\infty\infty$) вблизи области его коллапса десятки процентов от соответствующих линейных частей. Именно нелокальность оптического отклика (линейного и нелинейного) гиротропной среды обеспечивает отличие от нуля наибольших из компонент спиновых составляющих плотностей углового момента и его потока в точках пространства, в которых поляризация распространяющегося пучка оказывается линейной.

- [1] Schwichtenberg J. // *Physics from Symmetry*. Springer, 2018.
- [2] Campos-Flores I., Jimenez-Ramirez J.L., Roa-Neri J. // *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*. **09**, N 2. 203. (2017).
- [3] Kirochkin Yu.A., Stepanov K.N. // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. **77**, 901. (1993).
- [4] Polimeno P., Magazzu A., Iati M. et.al. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. **218**. 131. (2018).
- [5] Tian Y., Wang L., Duan G. // *Optics Communications*. **485**. 126712. (2020).
- [6] Padgett M., Bowman R. // *Nature Photonics*. **5**. 343. (2011).
- [7] Willner A., Huang H., Yan Y. et. al. // *Advances in Optics and Photonics*. **7**, 1. 66. (2015).
- [8] Trichili A., Rosales-Guzman C., Dudley A. et.al. // *Scientific Reports*. **6**. 27674. (2016).
- [9] D'Ambrosio V., Nagali E., Walborn S. et.al. // *Nature communications*. **3**. 961. (2012).
- [10] Brullot W., Vanbel M., Swusten T., Verbiest T. // *Science Advances*. **2**. e1501349. (2016).
- [11] Yao A., Padgett M. // *Advances in Optics and Photonics*. **3**. 161. (2011).
- [12] Franke-Arnold S., Allen L., Padgett M. // *Laser and Photonics Review*. **2**. 299. (2008).
- [13] Ritsch-Marte M. // *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*. **375**. 20150437. (2017).
- [14] Barnett S.M. // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. **4**, N 2. S7. (2002).
- [15] Moe G., Happer W. // *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*. **10**, N 7. 1191. (1977).
- [16] Ryzhikov P.S., Makarov V.A. // *Laser Physics Letters*. **19**. 115401. (2022).
- [17] Рыжиков П.С., Макаров В.А. // *ЖЭТФ*. **165**. 152. (2024).
- [18] Belinfante F.J. // *Physica*. **7**, N 5. 449. (1940).
- [19] Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. // *Phys. Rev. A*. **45**. 8185. (1992).
- [20] Bliokh K.Y., Dressel J., Nori F. // *New Journal of Physics*. **16**, N 9. 093037. (2014).
- [21] Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z. // *Journal of Optics*. **13**, N 6. 064014. (2011).
- [22] Barnett S.M., Allen L., Cameron R.P. et.al. // *Journal of Optics*. **18**, N 6. 064004. (2016).
- [23] Arbab A.I. // *Optik*. **184**. 436. (2019).
- [24] Yan S., Li M., Yao B. // *Journal of Optics*. **21**, N 3. 035606. (2019).
- [25] Yamashita O. // *Optics Communications*. **284**, N 10. 2532. (2011).
- [26] Hillery M., Mlodinow L.D. // *Phys. Rev. A*. **30**. 1860. (1984).
- [27] Drummond P.D. // *Phys. Rev. A*. **42**. 6845. (1990).
- [28] Bokut' B.V., Serdyukov A.N. // *Journal of Applied Spectroscopy*. **12**. 117. (1970).
- [29] Agranovich V.M., Ginzburg V.L. // *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.
- [30] Popov S.V., Svirko Yu.P., Zheludev N.I. // *Susceptibility tensor for nonlinear optics*. Optics and optoelectronics series. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1995.
- [31] Ryzhikov P.S., Makarov V.A. // *Laser Physics Letters*. **19**, N 3. 035401. (2022).
- [32] Makarov V.A., Ryzhikov P.S. // *JETP*. **162**. 45. (2022).
- [33] Landau L.D., Pitaevskii L.P., Lifshitz E.M. // *Electrodynamics of continuous media*. Elsevier, 1984.
- [34] Boyd R. // *Nonlinear optics*. Elsevier, 2020.
- [35] Ryzhikov P.S., Makarov V.A. // *Laser Physics Letters*. **20**, N 10. 105401. (2023).
- [36] Sirotnin Yu.I., Shaskolskaya M.P. // *Fundamentals of Crystal Physics*. Mir Publishers, 1983.
- [37] Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. // *Soviet Physics Uspekhi*. **10**, N 5. 609. (1968).
- [38] Golubkov A.A., Makarov V.A., Perezhogin I.A. // *Moscow University Physics Bulletin*. **64**. 54. (2009).
- [39] Golubkov A.A., Makarov V.A. // *Radiophysics and Quantum Electronics*. **31**. 1042. (1988).

Orbital and Spin Parts of Angular Momentum Flux Density of Monochromatic Radiation in Nonabsorbing Media with Nonlocal Nonlinear Optical Respon

P. S. Ryzhikov^a, V. A. Makarov

¹Department of general physics and wave phenomena, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University

Moscow 119991, Russia
E-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru

Using electromagnetic field angular momentum conservation law in a form of balance equation, which relates the angular momentum density, the angular momentum flux density and caused by the anisotropy of the medium torque density in nonabsorbing media, we obtained the formulas for the densities of the orbital and spin parts of the angular momentum and the flux densities of this quantities in case of interaction of monochromatic waves in nonabsorbing medium with spatial dispersion demonstrating n -th order nonlinear optical response to the external light field. In media without spatial and frequency dispersion the obtained expressions coincide with the canonical expressions for the densities and flux densities of the orbital and spin parts of angular momentum. The additional terms to the greatest components among the spin parts of angular momentum and its flux related to nonlinearity of the medium may reach ten percent of their linear parts during self-focusing of the elliptically polarized Gaussian laser beam in isotropic gyrotropic medium near the area of its collapse.

PACS: 42.65.-k, 42.50.Tx.

Keywords: nonlinear optics, spatial dispersion, optical angular momentum.

Received 11 May 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 4. Pp. 485–493.

Сведения об авторах

1. Рыжиков Платон Сергеевич — аспирант; e-mail: ryzhikov.ps14@physics.msu.ru.
2. Макаров Владимир Анатольевич — доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой, профессор; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru.