

## О сборке матрицы в методе моментов и ее реализации для идеально проводящих тел

А. А. Викуловская<sup>1,2,\*</sup>, Д. А. Коняев<sup>1,2,†</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук. Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, д. 13

(Поступила в редакцию 21.03.2024; подписана в печать 07.06.2024)

Рассмотрен один из методов решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах и экранах — метод моментов. Приведены основные принципы этого метода, включая сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению электрического типа и использование функций Рао–Вилтона–Глиссона в качестве базисных функций, сделан акцент на аппроксимации интегралов по треугольникам сетки на поверхности проводника. На основе рассмотренного метода приближения интегралов по треугольникам произведено улучшение разработанного ранее программного комплекса, позволяющего решать задачи дифракции на идеально проводящих телах сложной формы в векторном случае. Продемонстрировано, что изменения уменьшили ошибку приближенного решения. Результаты, полученные с помощью разработанного комплекса, хорошо согласуются с аналогичными расчетами на программном комплексе FEKO.

PACS: 41.20.Jb. УДК: 537.876.45

Ключевые слова: задача дифракции, метод моментов, функции Рао–Вильтона–Глиссона, формулы Гаусса.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2450102

### ВВЕДЕНИЕ

Для решения задач радиолокации необходимо изучить рассеяние плоской электромагнитной волны на различных объектах. Для этого на практике часто применяются измерительные комплексы — компактные полигоны [1]. Одним из его элементов, помимо помещения безэховой камеры, излучающих и принимающих антенн, измерительной схемы и других компонент, является зеркальный металлический коллиматор, который формирует в определенной области, называемой рабочей зоной, поле, приближенное к полю плоской волны. Для уменьшения дифракционных эффектов кромку зеркала делают зазубренной или скругленной. Оно является сложным объектом, поэтому необходимо проводить эксперименты по измерению его свойств. Разумно сочетать экспериментальные данные с результатами математического моделирования, так как такой подход дает возможность предусмотреть возникающие трудности экспериментальной реализации. Поэтому математическое моделирование задачи дифракции волн на различных объектах является актуальной задачей.

Эффективным подходом в случае решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле является сведение краевой задачи к интегро-дифференциальному уравнению —

метод моментов [2]. Например, этот метод используется в универсальном программном комплексе FEKO, разработанном для решения задач дифракции на различных объектах [3]. Одной из проблем при использовании этого программного комплекса является то, что все проводимые расчеты скрыты от пользователя, что ставит ограничения на адаптацию и подстройку программы к конкретной задаче. В настоящей работе подробно реализовано применение квадратурных формул для приближения интегралов, возникающих при решении методом моментов задач дифракции на идеально проводящих телах и экранах.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача поиска стационарного распределения поля в  $\mathbb{R}^3 \setminus G$ , где  $G$  — рассеиватель, при использовании временной зависимости  $e^{i\omega t}$  имеет следующий вид [4]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s) = i\omega\varepsilon(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s) = -i\omega\mu(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s), & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \\ [(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s), \mathbf{n}] = 0, & \mathbf{r} \in G, \\ [\mathbf{e}_r, \mathbf{E}^s] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{e}_r, \mathbf{H}^s] + o\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E^i, H^i$  — напряженности падающего электрического и магнитного полей, а  $E^s, H^s$  — рассе-

\* E-mail: vikulovskaia.aa19@physics.msu.ru

† E-mail: konyaev@physics.msu.ru

янного,  $\omega$  — круговая частота падающей волны,  $\varepsilon, \mu$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды вне проводника,  $\mathbf{e}_r$  — орт сферической системы координат. Из гранично-

го условия  $[(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s), \mathbf{n}] = 0$ , можно получить интегро-дифференциальное уравнение относительно поверхностной плотности тока  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  [5]:

$$\frac{i}{4\pi} \left[ \omega\mu \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma' + \frac{1}{\omega\varepsilon} \int_S (\nabla'_s, \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma', \mathbf{n} \right] = [\mathbf{E}^i, \mathbf{n}], \quad (2)$$

где  $\nabla_s$  — оператор дивергенции [6] на поверхности  $S$ , [7]:

$$(\nabla_s, \mathbf{a}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_l (\mathbf{a}, \mathbf{n}_s) dl, \quad (3)$$

здесь  $\mathbf{n}_s$  — нормаль к границе  $l$  области  $\Delta S$ , лежащая в касательной плоскости к поверхности проводника  $S$ .

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

### 2.1. Метод моментов

Для численного решения задачи (2) можно аппроксимировать поверхность тела треугольной сеткой, а затем искать приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N I_k \mathbf{f}_k(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{f}_k(\mathbf{r})$  — базисные функции, сопоставленные каждому  $k$ -му ребру треугольной сетки,  $\mathbf{r}$  — точка,

лежащая на поверхности сетки. В качестве базисных функций  $\mathbf{f}_k$ , как правило, используют функции RWG (Рао–Вильтона–Глиссона) [8]:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_k}{2A_k^+} \boldsymbol{\rho}_k^+, & \mathbf{r} \in T_k^+, \\ \frac{l_k}{2A_k^-} \boldsymbol{\rho}_k^-, & \mathbf{r} \in T_k^-, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \notin T_k^+ \cup T_k^-. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $T_k^+$  и  $T_k^-$  — треугольники с общим  $k$ -м ребром  $\boldsymbol{\rho}_k^+$  — вектор, проведенный из вершины треугольника  $T_k^+$ , лежащей напротив  $k$ -го ребра, в точку  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_k^-$  — вектор, проведенный из точки  $\mathbf{r}$  в вершину треугольника  $T_k^-$ , лежащую напротив  $k$ -го ребра,  $l_k$  — длина общего ребра,  $A_k^+$ ,  $A_k^-$  — площади треугольников  $T_k^+$  и  $T_k^-$ . Применяв метод моментов к уравнению (2) и используя базисные функции (5), получаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $I_k$ , фигурирующих в разложении (4) [9]:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{T_j^+ \cup T_j^-} \int_{T_k^+ \cup T_k^-} (\mathbf{f}_k(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_j(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' - \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{T_j^+ \cup T_j^-} \int_{T_k^+ \cup T_k^-} (\nabla'_s, \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_j(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' \right\} I_k = \int_{T_j^+ \cup T_j^-} (\mathbf{E}_\tau^i, \mathbf{f}_j(\mathbf{r})) d\sigma; \quad (6)$$

здесь  $\mathbf{r}'$  и  $d\sigma'$  — точка и элемент площади, принадлежащие области  $T_k^+ \cup T_k^-$ ;  $\mathbf{E}_\tau^i$  — тангенциальная компонента падающего поля. Элементы  $Z_{jk}$  матрицы системы (6) вычисляются следующим образом:

$$Z_{jk} = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{T_j^+ \cup T_j^-} \int_{T_k^+ \cup T_k^-} (\mathbf{f}_k(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_j(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' - \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{T_j^+ \cup T_j^-} \int_{T_k^+ \cup T_k^-} (\nabla'_s, \mathbf{f}_k(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_j(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma'. \quad (7)$$

### 2.2. Квадратурные формулы

Интегралы в выражении (6) не удается вычислить аналитически. В этом разделе приведен способ приближенного вычисления интегралов по треугольникам.

Внутри каждого отдельного треугольника перейдем в барицентрическую систему координат [10]  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . В соответствии с формулой Гаусса [10, 11] приближенно интеграл от некоторой функции  $f(\alpha, \beta, \gamma)$  можно вычислить следующим образом:

$$\int_T f(\alpha, \beta, \gamma) d\sigma = A \sum_{i=1}^{ng} w_i f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad (8)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — координаты узловых в барицентрической системе координат,  $w_i$  — вес точки,  $ng$  — количество этих точек,  $T$  — поверхность треугольника,  $A$  — его площадь,  $d\sigma$  — элемент его площади. Система уравнений для определения точек и их весов выводится из предположения, что формула выполняется точно для полинома заданного порядка  $p$ . В данной работе используется  $p = 4$ . Способ вычисления коэффициентов и весов представлен в [10]. Для  $p = 4$  коэффициенты имеют вид:

$$w^1 = 0.2233815 : \alpha = 0.108103, \beta = \gamma = 0.445948, \quad (9)$$

$$w^2 = 0.109952 : \alpha = 0.816848, \beta = \gamma = 0.091576, \quad (10)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  здесь записаны для одной точки из группы, в которую входят три симметрично расположенные точки. Координаты двух других точек в группе можно получить циклической перестановкой коэффициентов. Для каждой точки из одной группы вес одинаковый ( $w^1$  или  $w^2$  соответственно). Таким образом, для  $p = 4$ :

$$\int_T f(\alpha, \beta, \gamma) = A \sum_{i=1}^6 w_i f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad (11)$$

$$Z_{mn}^{jk} = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{T_j} \int_{T_k} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' - \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{T_j} \int_{T_k} (\nabla'_s, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma'. \quad (12)$$

Вычислим интегралы приближенно с помощью (11), используя определение базисных функций (5):

$$\begin{aligned} \int_{T_j} \int_{T_k} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' &= \int_{T_j} \frac{l_m l_n}{4A_j A_k} A_k \sum_{s=1}^6 w_s (\rho_m^k(\mathbf{r}_k^s), \rho_n^j(\mathbf{r}_j^s)) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k^s|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k^s|} d\sigma = \\ &= \frac{l_m l_n}{4} \sum_{l=1}^6 \sum_{s=1}^6 w_l w_s (\rho_m^k(\mathbf{r}_k^s), \rho_n^j(\mathbf{r}_j^l)) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|}}{|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{T_j} \int_{T_k} (\nabla'_s, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' &= \pm \int_{T_j} \frac{l_m l_n}{A_j A_k} A_k \sum_{s=1}^6 w_s \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k^s|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k^s|} d\sigma = \\ &= \pm \frac{l_m l_n}{4} \sum_{l=1}^6 \sum_{s=1}^6 w_l w_s \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|}}{|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|}. \quad (14) \end{aligned}$$

В выражениях (13), (14) и во всех последующих формулах  $\mathbf{r}_k^s$  и  $\mathbf{r}_j^l$  есть гауссовы точки в треугольниках  $k$  и  $j$  соответственно, где  $s = 1, \dots, 6$  и  $l = 1, \dots, 6$  — локальные номера гауссовых точек внутри одного треугольника. Выбор знака в выра-

жении (14) осуществляется следующим образом:

- если  $k$ -й треугольник является треугольником  $T_m^+$  и  $j$ -й треугольник является треугольником  $T_n^+$ , то выбирается «-»;

$$\mathbf{r}_k^i = \alpha_i \mathbf{P}_1^k + \beta_i \mathbf{P}_2^k + \gamma_i \mathbf{P}_3^k,$$

где  $\mathbf{P}_1^k, \mathbf{P}_2^k, \mathbf{P}_3^k$  — радиус-векторы вершин в треугольнике  $T_k$ . Будем применять формулу (11) во всех последующих приближенных вычислениях интегралов по поверхности треугольников.

### 2.3. Сборка матрицы

Воспользуемся поэлементной сборкой матрицы: рассмотрим отдельно треугольники с номером  $j$  и с номером  $k$  и вычислим вклад в матрицу от двух треугольников. При этом если  $j = k$ , в подынтегральной возникает особенность, поэтому матрицу следует разделить на регулярную ( $j \neq k$ ) и сингулярную ( $j = k$ ) части.

а) Регулярная часть матрицы.

Рассмотрим вклад от пары треугольников с номерами  $j$  и  $k$  в матрицу системы, обозначим его через  $Z_{mn}^{jk}$ , где  $m$  и  $n$  — номера ребер в треугольниках  $T_k$  и  $T_j$  соответственно:

- если  $k$ -й треугольник является треугольником  $T_m^+$  и  $j$ -й треугольник является треугольником  $T_n^-$ , то выбирается «+»;
- если  $k$ -й треугольник является треугольником  $T_m^-$  и  $j$ -й треугольник является треугольником  $T_n^+$ , то выбирается «-»;

ком  $T_n^+$ , то выбирается «+»

- если  $k$ -й треугольник является треугольником  $T_m^-$  и  $j$ -й треугольник является треугольником  $T_n^-$ , то выбирается «-».

Итого, вклад от пары треугольников  $j$  и  $k$  в матрицу  $Z$  равен:

$$Z_{mn}^{jk} = l_m l_n \sum_{s,l=1}^6 w_s w_l \left\{ \frac{i\omega\mu}{4\pi} (\rho_m^k(\mathbf{r}_k^s), \rho_n^j(\mathbf{r}_j^l)) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|}}{|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|} \pm \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_k^s|} \right\}. \quad (15)$$

Индексы  $m$  и  $n$  внутри одного треугольника могут принимать три разных значения  $m = m_1, m_2, m_3$ ;  $n = n_1, n_2, n_3$ , где  $m_i$  и  $n_i$  — номер ребра в треугольниках  $k$  и  $j$  соответственно. Поэтому вычисленные значения  $Z_{mn}^{jk}$  дают вклад в 9 элементов матрицы.

б) Сингулярная часть матрицы.

В этом случае в паре треугольников  $j = k$ . В выражении для вклада в матрицу от двух треугольников

$$Z_{mn}^{jk} = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{T_j} \int_{T_k} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' - \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{T_j} \int_{T_k} (\nabla'_s, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' \quad (16)$$

присутствуют два слагаемых, в которых производится интегрирование по треугольникам. Введем следующие обозначения:

$$\Phi_S = \int_{T_j} \int_{T_k} (\nabla'_s, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma',$$

$$A_S = \int_{T_j} \int_{T_k} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma'. \quad (17)$$

Для величины  $\Phi_S$  применим формулу (11) для интеграла по треугольнику  $T_j$ :

$$\Phi_S = \int_{T_j} \int_{T_k} (\nabla'_s, \mathbf{f}_m(\mathbf{r}')) (\nabla_s, \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma' d\sigma = \pm \frac{l_m l_n}{A_k} \sum_{l=1}^6 w_l \int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma'. \quad (18)$$

Рассмотрим отдельно интеграл вида  $\Phi' = \int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma'$  для одной из трех гауссовых точек с номером  $l$ :  $\mathbf{r}_j^l$  (остальные два интеграла будут вычисляться аналогично). Внутри одного треугольника ( $j = k$ ) для вычисления  $\Phi'$  нельзя использовать квадратурную формулу (11), так как в знаменателе возникает особенность. Представим

этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma' = \int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma' + \int_{T_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma'. \quad (19)$$

Обозначим  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|$ . Так как

$$\frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} = \frac{e^{-ikR} - 1}{R} = \frac{\cos(kR) - 1}{R} - i \frac{\sin(kR)}{R}, \quad (20)$$

$$\frac{\cos(kR) - 1}{R} \rightarrow 0, \quad \frac{\sin(kR)}{kR} \rightarrow 1, \quad \text{при } R \rightarrow 0, \quad (21)$$

то первое слагаемое в (19) можно оценить с помощью квадратурной формулы:

$$\int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} d\sigma' \cong A_k \sum_{s=1}^6 w_s h(\mathbf{r}_k^s), \quad (22)$$

где функция  $h(\mathbf{r})$  равна:

$$h(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|}, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j^l, \\ -ik, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_j^l. \end{cases} \quad (23)$$

Второе слагаемое в правой части (19) можно вычислить аналитически, воспользовавшись методом, представленным в [12]:

$$\int_{T_k} \frac{d\sigma'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3, \quad (24)$$

где  $R_1, R_2, R_3$  — длины перпендикуляров из точки  $\mathbf{r}_j^l$  к каждому ребру треугольника, а  $I_1, I_2, I_3$  вычисляются следующим образом ( $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  — радиус-векторы вершин  $k$ -го треугольника,  $l_1, l_2, l_3$  — длины ребер, расположенных напротив соответствующих вершин; верхний индекс  $k = j$  здесь опущен):

$$I_1 = \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + l_1 |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + l_1 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l|} \right|,$$

$$I_2 = \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3) + l_2 |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3) + l_2 |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l|} \right|, \quad (25)$$

$$I_3 = \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + l_3 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2) + l_3 |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l|} \right|.$$

Далее для вычисления  $A_S$  также используем формулу (11) для интеграла по треугольнику  $T_j$ :

$$A_S = \int_{T_j} \int_{T_k} (\mathbf{f}_m(\mathbf{r}'), \mathbf{f}_n(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\sigma d\sigma' = \frac{l_m l_n}{4A_k} \sum_{s=1}^6 w_s \int_{T_k} (\rho_m^k(\mathbf{r}_j^l), \rho_n^j(\mathbf{r})) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma'.$$

Рассмотрим отдельно интеграл вида  $\int_{T_k} \rho_n^j(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma'$ :

$$\begin{aligned} \int_{T_k} \rho_n^j(\mathbf{r}) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma' &= \pm \int_{T_k} (\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_n + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l)) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma' = \\ &= \pm (\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_n) \int_{T_k} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma' \pm \int_{T_k} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma' = \pm (\mathbf{r}_j^l - \mathbf{r}_n) \Phi' \pm \mathbf{I}_A. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для  $\Phi'$  было найдено ранее,  $\mathbf{I}_A$  также представим в виде двух интегралов:

$$\mathbf{I}_A = \int_{T_k} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} d\sigma' = \int_{T_k} \frac{\mathbf{R}}{R} e^{-ikR} d\sigma' = \int_{T_k} \frac{\mathbf{R}}{R} (e^{-ikR} - 1) d\sigma' + \int_{T_k} \frac{\mathbf{R}}{R} d\sigma', \quad (27)$$

где введено обозначение  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l$ .

Первое слагаемое в (27) можно также приблизить квадратурной формулой, так как  $\frac{\mathbf{R}}{R} (e^{-ikR} - 1) \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow 0$ :

$$\int_{T_k} \frac{\mathbf{R}}{R} (e^{-ikR} - 1) d\sigma' \approx A_k \sum_{s=1}^6 w_s \mathbf{g}(\mathbf{r}_k^s), \quad (28)$$

где функция  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  равна

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^l|} (e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j^l|} - 1), & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j^l, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_j^l. \end{cases} \quad (29)$$

Второе слагаемое в (27) рассчитывается следующим образом [12]:

$$\int_{T_k} \frac{\mathbf{R}}{R} d\sigma' = \mathbf{u}_1 I_{A_1} + \mathbf{u}_2 I_{A_2} + \mathbf{u}_3 I_{A_3}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  — нормали, проведённые из точки  $\mathbf{r}_j^l$  к каждой стороне треугольника, а  $I_{A_1}, I_{A_2}, I_{A_3}$  рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{A_1} &= \frac{1}{2l_1} \left( (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l| + (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l| \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l|^2 + \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)^2}{l_1} \right) \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + l_1 |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + l_1 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l|} \right|, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_{A_2} &= \frac{1}{2l_2} \left( (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l| + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l| \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l|^2 + \frac{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3)^2}{l_1} \right) \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + l_2 |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + l_2 |\mathbf{P}_3 - \mathbf{r}_j^l|} \right|, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} I_{A_3} &= \frac{1}{2l_3} \left( (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l| + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l) |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l| \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l|^2 + \frac{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)^2}{l_3} \right) \ln \left| \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + l_3 |\mathbf{P}_2 - \mathbf{r}_j^l|}{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + l_3 |\mathbf{P}_1 - \mathbf{r}_j^l|} \right|. \end{aligned} \quad (33)$$

## 2.4. Вычисление поля по значению плотности тока

По аналогии с расчетами регулярной части интеграла для элементов матрицы, можно получить выражение для напряженности электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^6 w_s I_k l_k \left\{ -\frac{i\omega\mu}{8\pi} \left( \rho_k^+(\mathbf{r}_k^{s+}) \frac{e^{-ikR_k^{s+}}}{R_k^{s+}} + \rho_k^-(\mathbf{r}_k^{s-}) \frac{e^{-ikR_k^{s-}}}{R_k^{s-}} \right) + \right. \\ \left. - \frac{i}{4\pi\epsilon} \left( \frac{\mathbf{R}_k^{s+}}{R_k^{s+3}} e^{-ikR_k^{s+}} (-ikR_k^{s+} - 1) + \frac{\mathbf{R}_k^{s-}}{R_k^{s-3}} e^{-ikR_k^{s-}} (-ikR_k^{s-} - 1) \right) \right\}, \quad (34)$$

где введено обозначение:

$$\mathbf{R}_k^{s\pm} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{s\pm}, \quad R_k^{s\pm} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{s\pm}|. \quad (35)$$

## 3. ТЕСТИРОВАНИЕ

## 3.1. Дифракция на идеально проводящей сфере

Для тестирования программы был проведен расчет поля, рассеянного идеально проводящей сферой радиуса  $R = 2.5$  см при облучении плоской волной с частотой 3 ГГц (длина волны  $\lambda \approx 10$  см, что сравнимо с размером сферы, то есть рассматривается резонансный случай (рис. 1)).

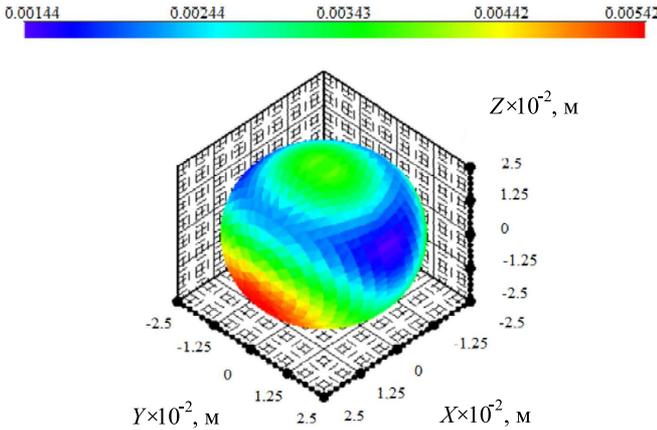


Рис. 1. Распределение поверхностной плотности тока на сфере радиуса  $R = 2.5$  см, источник — плоская волна, частота 3 ГГц

Так как аналитическое решение для задачи дифракции плоской электромагнитной волны на сфере известно [13], можно найти относительную ошибку вычисления плотности тока на поверхности сферы в сеточной норме  $C$ :

$$e = \frac{\|I - J\|}{\|J\|}, \quad (36)$$

где  $J, I$  — соответственно точное и полученное с помощью метода моментов значение коэффициентов поверхностной плотности тока в представлении (4),

а норма определяется следующим образом:

$$\|J\| = \max_{1 \leq i \leq N_{ribes}} |J_i|, \quad (37)$$

где  $i$  — номер сетки, а  $N_{ribes}$  — количество ребер сетки. В таблице представлена ошибка вычисления токов в зависимости от количества треугольников сетки.

Таблица. Относительная ошибка в норме  $C$  в определении плотности тока на сфере, облучаемой плоской волной.  $e_1, e_2$  — относительная ошибка в модифицированном и немодифицированном программном комплексе соответственно,  $N$  — количество треугольников в приближении поверхности треугольной сеткой

$N$	$e_1, \%$	$e_2, \%$
300	3.48	6.75
588	2.71	5.08
1200	1.65	4.02
2700	1.18	3.55
5808	0.91	3.38

Для сравнения приведены также ошибки вычисления плотности тока для предыдущей версии программы, использовавшей в процессе сборки матрицы и вычисления поля формулы с меньшим порядком точности (формулы для интегралов по треугольнику использовали только одну гауссову точку — центр треугольника). Как видно из таблицы, с применением формул большего порядка точности ошибка в вычислении поверхностных токов на сфере убывает быстрее.

Стоит отметить, что здесь не удастся применить метод Ричардсона для определения порядка точности, так как с увеличением количества треугольников сетки все узлы сдвигаются в пространстве.

## 3.2. Вычисление поля антенны SH800

Было рассчитано поле в ближней зоне и в дальней зоне антенны. На рис. 3 представлена величина

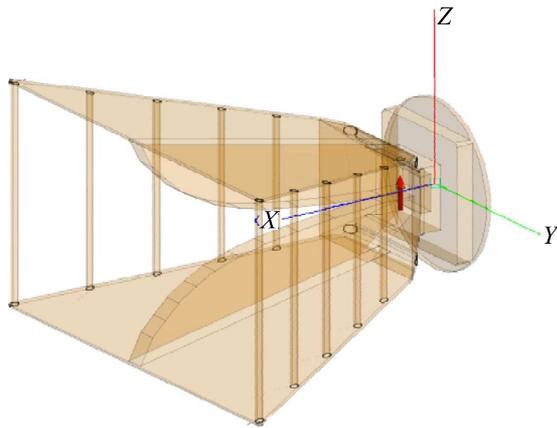


Рис. 2. Модель антенны SH800

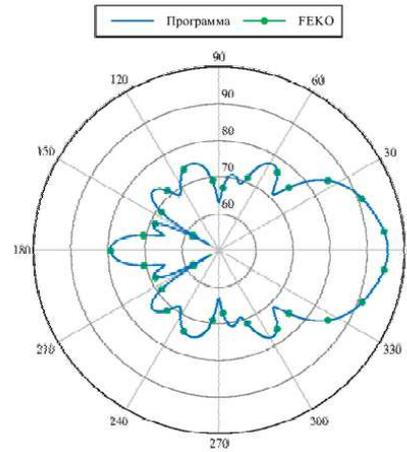


Рис. 3. Величина поля  $|\mathbf{E}|$  в дальней зоне в дБВ, частота излучения диполя 4 ГГц

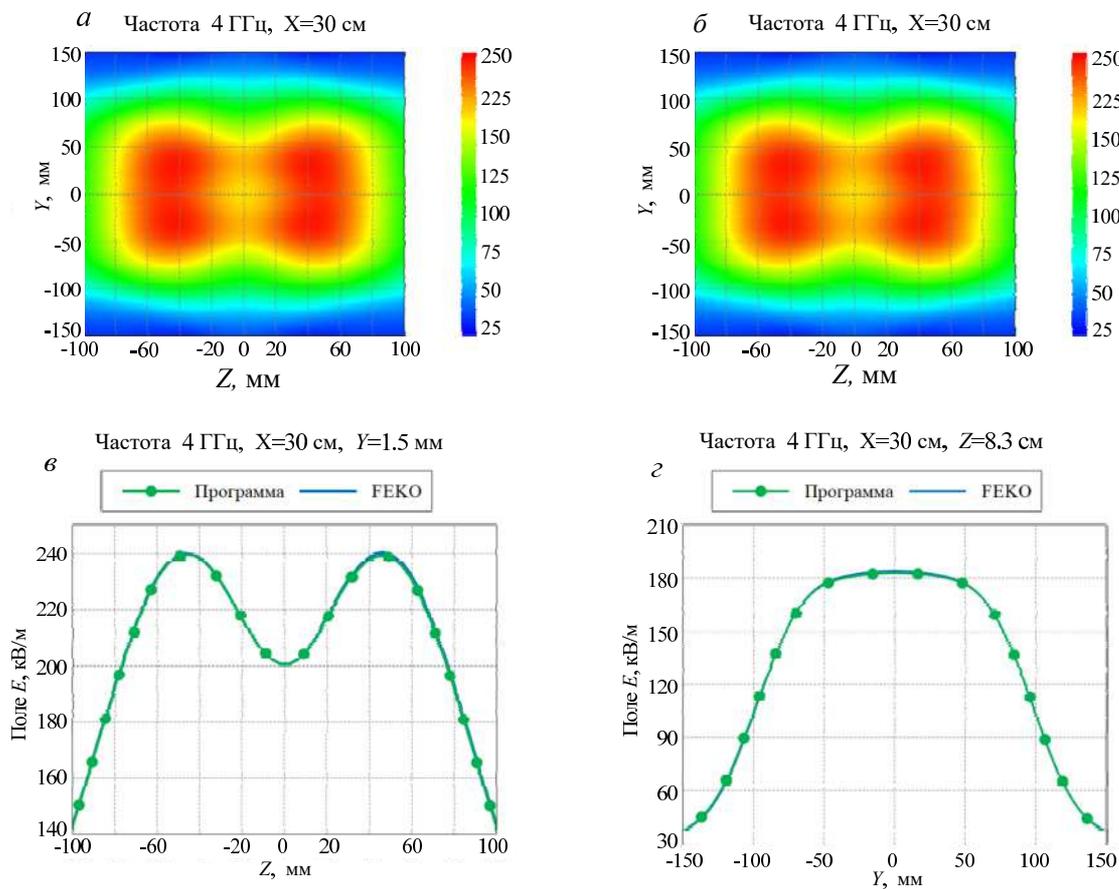


Рис. 4. Распределение поля  $|\mathbf{E}|$  на расстоянии  $X = 30$  см от начала координат: *a* — поле  $|\mathbf{E}|$  в плоскости перед антенной (рассчитано в FEKO); *б* — поле  $|\mathbf{E}|$  в плоскости перед антенной (рассчитано в программе); *в* — поле  $|\mathbf{E}|$  от  $Z$  при  $Y = 1.5$  мм; *г* — поле  $|\mathbf{E}|$  от  $Y$  при  $Z = 83$  мм

рассеянного поля в дальней зоне, а на рис. 4 — графики зависимости поля в плоскости перед антенной на расстоянии 30 см от начала координат.

Показано поле  $|\mathbf{E}|$  в плоскости перед антенной, рассчитанное в разработанной программе и в FEKO, а для количественного сравнения построены срезы поля  $|\mathbf{E}|$  по координате  $Z$  при

$Y = 1.5$  мм, а также срез по координате  $Y$  при  $Z = 83$  мм. Полученные в программе результаты хорошо согласуются с результатами, полученными при помощи FEKO, как качественно, так и количественно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано применение квадратурных формул для построения численного решения задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле сложной формы. Реализовано их применение в программном комплексе для численного решения задачи дифракции на идеально проводящих телах и экранах сложной формы в векторном случае. Описаны формулы для сборки матрицы системы линейных уравнений, возникающей при численном решении задачи. В настоящей работе применены шеститочечные формулы Гаусса [10]. Проведено тестирование новой версии программы:

сравнение численных результатов с аналитическим решением для задачи дифракции на сфере и численным решением, получаемым предыдущей версией программного комплекса, а также с другим программным комплексом — FEKO. Все сравнения показали хорошее качественное и количественное согласие. Сравнение показало, что в модифицированном программном комплексе точность получаемых численных решений повысилась.

Автор выражает благодарность доценту кафедры математики физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова Наталье Евгеньевне Шапкиной за активное участие в обсуждении материалов работы.

- [1] Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
- [2] Medgyesi-Mitschang L.N., Eftimiou C. // *Appl. Phys.* **19**, N 3. 275 (1979).
- [3] Банков С.Е., Курушин А.А. Практикум проектирования СВЧ структур с помощью FEKO. М.: ЗАО «НПП «РОДНИК», 2009.
- [4] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики: Учебное пособие. Высш. шк., 1991.
- [5] Хлебников Ф.Б., Боголюбов А.Н., Коняев Д.А., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне компактного полигона.
- [6] Arnoldus H.F. // *Optics communications.* **265**, N 1. 52 (2006).
- [7] McAllister I.W. // *IEEE Transactions on Electrical Insulation.* **26**, N 3. 416 (1991).
- [8] Rao S., Wilton D., Glisson A. // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* **30**, N 3. 409 (1982).
- [9] Zhang Y., Sarkar T. K. Parallel solution of integral equation-based EM problems in the frequency domain. John Wiley and Sons, 2009.
- [10] Dunavant D. A. // *International journal for numerical methods in engineering.* **21**, N 6. 1129 (1985).
- [11] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. Численный анализ. М.: Академия, 2013.
- [12] Wilton D., Rao S., Glisson A., Schaubert D. et al. // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* **32**, N 3. 276 (1984).
- [13] Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. 1948.

On the Assembly of the Matrix in the Method of Moments and its Implementation for Perfectly Conducting Bodies

A. A. Vikulovskaia<sup>1,2,a</sup>, D. A. Konyayev<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

<sup>2</sup>Institute of Theoretical and Applied Electrodynamics of the Russian Academy of Sciences. Moscow, 125412, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>vikulovskaia.aa19@physics.msu.ru, <sup>b</sup>konyayev@physics.msu.ru

One of the methods for solving the problem of electromagnetic wave diffraction on perfectly conducting bodies and screens — the method of moments — is considered. The basic principles of this method are presented, including reducing the problem to an electric-type integro-differential equation and using Rao–Wilton–Glisson functions as basis functions, with an emphasis on the approximation of integrals over the triangles of the mesh on the conductor’s surface. Based on the considered method of approximating integrals over triangles, an improvement has been made to the previously developed software package, which allows solving diffraction problems on perfectly conducting bodies of complex shapes in the vector case. It is demonstrated that the changes reduced the error of the approximate solution. The results obtained using the developed package are in good agreement with similar calculations using the FEKO software package.

PACS: 41.20.Jb.

Keywords: diffraction problem, method of moments, Rao-Wilton-Glisson functions, Gaussian formulas.

Received 21 March 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2024. **79**, No. 5. Pp. .

Сведения об авторах

- Виколовская Арина Александровна — студент, инженер лаборатории №3 ИТПЭ РАН; e-mail: vikulovskaia.aa19@phys.msu.ru.
- Коняев Денис Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч., вед. инженер; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: konyayev@physics.msu.ru.