ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Слабый внутренний слой в задаче реакция–диффузия–адвекция в случае разрыва реакции

Е. И. Никулин,[1,*] А. В. Карамышев[1]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 04.08.2024; после доработки 11.08.2024; подписана в печать 14.08.2024)

Настоящая работа посвящена исследованию одномерного уравнения типа «реакция–адвекция–диффузия» со слабой гладкой адвекцией и разрывной по пространственной координате реакцией. В работе проведено построение асимптотики, доказательство существования и исследование устойчивости стационарных решений с построенной асимптотикой, обладающих слабым внутренним слоем, который образуется вблизи точки разрыва. Для построения асимптотики был использован метод А.Б. Васильевой, для обоснования существования решения — асимптотический метод дифференциальных неравенств, для исследования устойчивости — метод сжимающих барьеров. Показано, что такое решение, как решение соответствующей начально-краевой задачи, является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Указана область устойчивости конечной (не асимптотически малой) ширины для такого решения и установлено, что решение стационарной задачи единственно в этой области.

PACS: 02.30.Jr., 72.20.-i. УДК: 517.9
Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, уравнения реакция–диффузия–адвекция, внутренний слой, асимптотические методы, метод дифференциальных неравенств, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, дрейфо-диффузионная модель полупроводника.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.79.2450103

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что во многих системах, описываемых сингулярно возмущенными уравнениями типа «реакция–адвекция–диффузия», неоднородности коэффициентов уравнения определяют положение внутренних слоев. Широко изучены переходные слои, в которых решение испытывает резкий скачок от одного устойчивого положения равновесия к другому. Величина скачка решения между этими положениями конечна и не зависит от малого параметра, квадрат которого стоит при старшей производной. Причиной существования таких слоев в окрестности некоторой точки может быть выполнение в этой точке условия баланса реакции (см., например, [1, 2]), адвекции [3], реакции и адвекции [4], разрыв коэффициентов по пространственной координате (как конечный [5], [6], так и слабый [7]) или другие условия, накладываемые на неоднородные коэффициенты (например, [8]). Однако также возможен случай, когда возникает слабый внутренний слой, т. е. слой, имеющий величину порядка малого параметра. Для такой ситуации достаточно наличия только одного положения равновесия. В литературе хорошо известен слабый пограничный слой (возникающий, например, в краевой задаче Неймана), однако этого нельзя сказать о слабом внутреннем слое. Причиной его образования может служить слабый (т. е. порядка малого параметра) скачок неоднородности в правой части уравнения (т. е. в реактивном члене). Такому случаю и будет посвящена настоящая работа.

Актуальность указанных выше уравнений вызвана большим количеством приложений (см., например, работы [6, 7, 9] и приведенные в них ссылки). В частности, задача, которая будет поставлена ниже, находит свое прямое применение в одномерной дрейфо-диффузионной модели полупроводника, обладающего нелинейной зависимостью скорости дрейфа от напряженности электрического поля (см. [10], подраздел 3.2). Система уравнений, связывающая напряженность электрического поля и концентрацию электронов, сводится к уравнению указанного выше типа. Из результатов асимптотического исследования следует, что при условии заданного внешнего тока во внутренней точке полупроводника возникает слабый внутренний слой для функции, задающей напряженность электрического поля, если в этой точке равновесная концентрация электронов является негладкой функцией пространственной координаты (см. раздел 5). Известно, что примеси, как правило, распределяются в образце неравномерно, а потому важно учесть влияние неоднородностей указанного типа в модели полупроводника.

Настоящая работа продолжает цикл работ, в которых исследуются уравнения с разрывными коэффициентами [5–7, 9, 11–13], и посвящена исследованию одномерного уравнения типа «реакция–адвекция–диффузия» со слабой гладкой адвекцией и раз-

[*] E-mail: nikulin@physics.msu.ru

рывной по пространственной координате реакцией. Целью работы является построение асимптотики, доказательство существования и исследование устойчивости стационарных решений с построенной асимптотикой, обладающих слабым внутренним слоем, который образуется вблизи точки разрыва. Для построения асимптотики будет использован метод А. Б. Васильевой [14], для обоснования существования решения — асимптотический метод дифференциальных неравенств [15], для исследования устойчивости — метод сжимающих барьеров [16]. Показано, что такое решение, как решение соответствующей начально-краевой задачи, является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Указана область устойчивости для такого решения и установлено, что решение стационарной задачи единственно в этой области. Отметим, что в данной задаче удается найти область устойчивости не асимптотически малой, как, например, в работах [6, 7, 9, 12, 13, 16], а конечной ширины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$\begin{cases} N_\varepsilon u := \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon a(u,x)\dfrac{\partial u}{\partial x} - \\ \qquad -f(u,x) - \varepsilon f_1(u,x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ f_1(u,x) := \begin{cases} f_1^{(+)}(u,x), & u \in I_u, \quad x_p < x \le 1, \\ f_1^{(-)}(u,x), & u \in I_u, \quad -1 \le x < x_p, \end{cases} \\ f(u,x) := \begin{cases} f^{(+)}(u,x), & u \in I_u, \quad x_p < x \le 1, \\ f^{(-)}(u,x), & u \in I_u, \quad -1 \le x < x_p, \end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(-1,\varepsilon) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$, $x_p \in (-1;1)$, I_u — отрезок изменения функции $u(x,\varepsilon)$.

Будем рассматривать задачу (1) при следующих условиях.

Условие 1. Пусть функции a, $f^{(\pm)}$ и $f_1^{(\pm)}$ являются достаточно гладкими и пусть

$$\lim_{x\to x_p+0} f^{(+)}(u,x) = \lim_{x\to x_p-0} f^{(-)}(u,x),$$

$$\lim_{x\to x_p+0} \frac{\partial f^{(+)}(u,x)}{\partial x} \ne \lim_{x\to x_p-0} \frac{\partial f^{(-)}(u,x)}{\partial x},$$

$$\lim_{x\to x_p+0} f_1^{(+)}(u,x) \ne \lim_{x\to x_p-0} f_1^{(-)}(u,x), \ \forall u \in I_u.$$

Это условие означает, что при каждом фиксированном $u \in I_u$ функция $f_1(u,x)$ претерпевает разрыв первого рода по переменной x в точке x_p, функция $f(u,x)$ непрерывна по переменной x, а ее первая производная претерпевает разрыв первого рода по переменной x в точке x_p.

Условие 2. Пусть вырожденное уравнение

$$f(u,x) = 0$$

имеет в области $[-1,1] \times I_u$ ровно один корень $\varphi(x)$, лежащий в области $[-1;1] \times I_u$ и удовлетворяющий неравенству

$$f_u(\varphi(x),x) > 0, \quad x \in [-1;1].$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

2.1. Асимптотика решения

Будем считать, что $p(\varepsilon)$ — функция, задающая уровень внутреннего слоя:

$$p(\varepsilon) = u(x_p,\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1^*(\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$p_1^*(\varepsilon) = p_1 + \varepsilon p_2 + \varepsilon^2 p_3 + \ldots. \tag{3}$$

Для построения асимптотики воспользуемся методом А. Б. Васильевой [14]. Построим асимптотику решения задачи (1) в виде ряда по степеням ε:

$$U^{(\pm)}(x,\varepsilon) = \bar u^{(\pm)}(x,\varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) + \Pi^{(\pm)}(\tau,\varepsilon), \tag{4}$$

где регулярная часть

$$\bar u^{(\pm)}(x,\varepsilon) = \bar u_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar u_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^n \bar u_n^{(\pm)}(x) + \ldots,$$

пограничная часть в окрестности $x = \pm 1$

$$\Pi^{(\pm)}(\tau,\varepsilon) = \Pi_0^{(\pm)}(\tau) + \varepsilon \Pi_1^{(\pm)}(\tau) + \ldots + \varepsilon^n \Pi_n^{(\pm)}(\tau) + \ldots,$$

где

$$\tau = \begin{cases} (x+1)/\varepsilon, & x \le x_p, \\ (x-1)/\varepsilon, & x > x_p, \end{cases}$$

и часть внутреннего слоя в окрестности x_p

$$Q^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi,p_0) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_1^*(\varepsilon)) + \ldots \\ \ldots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi,p_1^*(\varepsilon)) + \ldots,$$

где $\xi = (x - x_p)/\varepsilon$. Отметим, что уравнения, из которых эти члены находятся, содержат функции, зависящие от p_0 и $p_1^*(\varepsilon)$, что и объясняет наличие у членов Q_i таких аргументов. На этапе построения асимптотики для решения не будем пользоваться разложением (3), это технически упростит процесс нахождения асимптотики.

Индекс $(\pm)$ означает, что асимптотика справа и слева от точки x_p описывается функциями с индексами $(+)$ и $(-)$ соответственно (в дальнейшем в зависимости от контекста будем опускать индекс $(\pm)$, подразумевая его).

В частности, для нулевого и первого порядков регулярной части имеем:

$$\bar{u}_0(x) = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi^{(+)}(x), & u \in I_u, \quad x_p < x \le 1, \\ \varphi^{(-)}(x), & u \in I_u, \quad -1 \le x \le x_p, \end{cases}$$
$$\bar{u}_1(x) = -\frac{f_1(\varphi(x), x) + a(\varphi(x), x)\varphi'(x)}{f_u(\varphi(x), x)}. \tag{5}$$

Функция $\varphi(x)$ в силу поведения функции $f(u, x)$ (см. **Условие 1**) является негладкой: ее первая производная (а следовательно, и функция $\bar{u}_1(x)$) претерпевает разрыв первого рода в точке x_p.

Функции внутреннего слоя нулевого порядка определяются из задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 {Q_0}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - a(\bar{u}_0(x_p) + Q_0, x_p)\dfrac{\partial {Q_0}^{(\pm)}}{\partial \xi} - \\ \qquad - f^{(\pm)}(\bar{u}_0(x_p) + {Q_0}^{(\pm)}, x_p) = 0, \\ {Q_0}^{(\pm)}(0, p_0) = p_0 - {\bar{u}_0}^{(\pm)}(x_p), \\ {Q_0}^{(\pm)}(\pm\infty, p_0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку нас интересует слабый внутренний слой, то задача (6) должна иметь решение $Q_0 \equiv 0$. Это возможно только в случае $p_0 = \varphi(x_p)$.

Функции внутреннего слоя первого порядка определяются из линейных задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 {Q_1}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - a(\bar{u}_0(x_p), x_p)\dfrac{\partial {Q_1}^{(\pm)}}{\partial \xi} - \\ \qquad - f_u^{(\pm)}(\bar{u}_0(x_p), x_p) Q_1^{(\pm)} = 0, \\ {Q_1}^{(\pm)}(0, p_1^*(\varepsilon)) = p_1^*(\varepsilon) - {\bar{u}_1}^{(\pm)}(x_p), \\ {Q_1}^{(\pm)}(\pm\infty, p_1^*(\varepsilon)) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

решения которых имеют вид

$$Q_1^{(\pm)}(\xi, p_1^*(\varepsilon)) = \left(p_1^*(\varepsilon) - u_1^{(\pm)}(x_p)\right) e^{\lambda^{(\pm)}\xi}, \tag{8}$$

где $\lambda^{(\pm)} = \dfrac{a(\bar{u}_0(x_p), x_p)}{2} \mp \mp \dfrac{\sqrt{a^2(\bar{u}_0(x_p), x_p) + 4 f_u(\bar{u}_0(x_p), x_p)}}{2}$.

Функции $Q_2^{(\pm)}$ находятся из задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 {Q_2}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - a(\bar{u}_0(x_p), x_p)\dfrac{\partial {Q_2}^{(\pm)}}{\partial \xi} - \\ \qquad - f_u^{(\pm)}(\bar{u}_0(x_p), x_p) Q_2^{(\pm)} = r_2^{(\pm)}(\xi), \\ {Q_2}^{(\pm)}(0, p_1^*(\varepsilon)) = -{\bar{u}_2}^{(\pm)}(x_p), \\ {Q_2}^{(\pm)}(\pm\infty, p_1^*(\varepsilon)) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $r_2^{(\pm)}(\xi)$ — известная функция. Решения задач (9) имеют вид

$$Q_2^{(+)}(\xi, p_1^*(\varepsilon)) = Q_1^{(+)}(\xi, p_1^*(\varepsilon)) \left(\frac{-\bar{u}_2^{(+)}(x_p)}{p_1^*(\varepsilon) - \bar{u}_1^{(+)}(x_p)} - \int\limits_0^{\xi} \frac{e^{\bar{a}\eta}}{\left(Q_1^{(+)}(\eta, p_1^*(\varepsilon))\right)^2} \left(\int\limits_{\eta}^{+\infty} r_2^{(+)}(\tilde{\xi}) Q_1^{(+)}(\tilde{\xi}, p_1^*(\varepsilon)) e^{-\bar{a}\tilde{\xi}}\, d\tilde{\xi} \right) d\eta \right),$$
$$Q_2^{(-)}(\xi, p_1^*(\varepsilon)) = Q_1^{(-)}(\xi, p_1^*(\varepsilon)) \left(\frac{-\bar{u}_2^{(-)}(x_p)}{p_1^*(\varepsilon) - \bar{u}_1^{(-)}(x_p)} - \int\limits_{\xi}^{0} \frac{e^{\bar{a}\eta}}{\left(Q_1^{(-)}(\eta, p_1^*(\varepsilon))\right)^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\eta} r_2^{(-)}(\tilde{\xi}) Q_1^{(-)}(\tilde{\xi}, p_1^*(\varepsilon)) e^{-\bar{a}\tilde{\xi}}\, d\tilde{\xi} \right) d\eta \right), \tag{10}$$

где $\bar{a} = a(\bar{u}_0(x_p), x_p)$.

Задачи для определения функций внутреннего слоя следующих порядков аналогичны (9) и их решение выписывается явно.

Асимптотика для функций пограничного слоя строится стандартно и здесь не рассматривается.

Таким образом, асимптотика решения задачи (1) построена.

2.2. Асимптотика для уровня внутреннего слоя

Для определения коэффициентов разложения (3) уровня внутреннего слоя $p(\varepsilon)$ подставим найденное асимптотическое приближение решения задачи (1) в условие C^1-сшивания в точке x_p:

$$\varepsilon \left(\left.\frac{\partial u^{(+)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} - \left.\frac{\partial u^{(-)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} \right) = \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0, p_1^*(\varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(x_p) + \varepsilon \frac{\partial Q_2}{\partial \xi}(0, p_1^*(\varepsilon)) + \ldots \right]_-^+ = 0, \tag{11}$$

где $[A]_-^+ := A^{(+)} - A^{(-)}$.

С учетом разложения (3) из равенства (11) следуют уравнения для неизвестных коэффициентов p_1 и p_2:

$$\left[\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi}(0, p_1) \right]_-^+ = 0, \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(x_p) + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi}(0, p_1) + p_2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial p_1^* \partial \xi}(0, p_1) \right]_-^+ = 0. \tag{13}$$

Зная $\bar{u}_0^{(\pm)}$ и $Q_1^{(\pm)}$ и подставив их в (12), получим выражение для p_1:

$$p_1 = \frac{[\lambda^{(\pm)}\bar{u}_1^{(\pm)}(x_p) - \varphi_x^{(\pm)}(x_p)]_-^+}{[\lambda^{(\pm)}]_-^+}. \quad (14)$$

Остальные коэффициенты $p_i,\ i = 2, 3, ..$ находятся из уравнений

$$p_i \left[\frac{\partial^2 Q_1}{\partial\xi\partial p_1^*}(0, p_1)\right]_-^+ - h_i = 0, \quad (15)$$

где $\left[\dfrac{\partial^2 Q_1(0,p_1)}{\partial\xi\partial p_1^*}\right]_-^+ =$

$$= -\sqrt{a^2(\varphi(x_p), x_p) + 4f_u(\varphi(x_p), x_p)}$$

и h_i — известная функция.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Введем необходимые определения.

Определение 1. Решением задачи (1) назовем функцию класса $u(x,\varepsilon) \in C^1([-1;1]) \cap C^2((-1;x_p)\cup(x_p;1))$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \in (-1;x_p)\cup(x_p;1)$, а также граничным условиям этой задачи.

Для доказательства существования решения построим верхнее и нижнее решения путем модификации полученной асимптотики.

Определение 2. Достаточно гладкие функции $\beta(x,\varepsilon)$ и $\alpha(x,\varepsilon)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (1), если $\beta(x,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} - \varepsilon a(\beta, x)\frac{\partial\beta}{\partial x} - f(\beta, x) - \varepsilon f_1(\beta, x) \le 0,$$
$$-1 < x < 1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,\varepsilon) \le 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial x}(1,\varepsilon) \ge 0, \quad (17)$$

а $\alpha(x,\varepsilon)$ — следующим неравенствам:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - \varepsilon a(\alpha, x)\frac{\partial\alpha}{\partial x} - f(\alpha, x) - \varepsilon f_1(\alpha, x) \ge 0,$$
$$-1 < x < 1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}(-1,\varepsilon) \ge 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(1,\varepsilon) \le 0. \quad (19)$$

В точке x_p допускается скачок производных нужного знака:

$$\left.\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} - \left.\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} \le 0, \quad (20)$$

$$\left.\frac{\partial\alpha^{(+)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} - \left.\frac{\partial\alpha^{(-)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} \ge 0. \quad (21)$$

Пусть $U_n(x,\varepsilon)$ — частичные суммы порядка n асимптотических рядов (4), где положено $p = \hat{p}_n(\varepsilon) := p_0 + \varepsilon p_1 + ... + \varepsilon^n p_n$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если выполнены **Условия 1** и **2**, то при достаточно малом ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), для которого имеет место оценка*

$$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}.$$

Для доказательства воспользуемся утверждением (см., например, [17, 18]).

Утверждение. *Пусть существуют верхнее $\beta(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha(x,\varepsilon)$ решения задачи (1), причем $\beta(x,\varepsilon) \ge \alpha(x,\varepsilon),\ x \in [-1,1]$. Тогда при достаточной гладкости функций $f(u,x),\ f_1^{(\pm)}(u,x)$ существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющее неравенствам $\alpha(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \beta(x,\varepsilon)$.*

Верхнее решение выберем в следующем виде:

$$\beta_n(x,p_\delta,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}^{(\pm)}(x) + \gamma\right) +$$
$$+ Q_0^{(\pm)}(\xi,p_\delta) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_\delta) + \ldots + \varepsilon^{n+1}Q_{n+1}^{(\pm)}(\xi,p_\delta) + \Pi_\beta^{(\pm)}(\tau,\varepsilon), \quad (22)$$

$$\alpha_n(x,p_{-\delta},\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}^{(\pm)}(x) - \gamma\right) +$$
$$+ Q_0^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta}) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta}) + \ldots + \varepsilon^{n+1}Q_{n+1}^{(\pm)}(\xi,p_{-\delta}) + \Pi_\alpha^{(\pm)}(\tau,\varepsilon), \quad (23)$$

где $p_\delta(\varepsilon) = p_1 + \varepsilon p_2 + \cdots + \varepsilon^n(p_{n+1} + \delta)$, $\delta > 0$ — постоянная, необходимая для нужного скачка производных (20) и (21), $\gamma > 0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение требуемых по определению неравенств (16) и (18). Функции $\Pi_\alpha^{(\pm)},\ \Pi_\beta^{(\pm)}$ обеспечивают требуемые неравенства на границе (17), (19) и определяются стандартно.

Проверим необходимые неравенства.

При достаточно малом ε имеем:

$$N_\varepsilon\beta_n = -\varepsilon^{n+1}f_u(\varphi(x),x)\gamma + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \quad (24)$$

$$N_\varepsilon\alpha_n = \varepsilon^{n+1}f_u(\varphi(x),x)\gamma + O(\varepsilon^{n+2}) > 0, \quad (25)$$

т.е. выполнены неравенства (16), (18).

Неравенство (20) тоже выполнено при достаточно малом ε:

$$\left.\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} - \left.\frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\right|_{x=x_p} = -\varepsilon^n\delta\sqrt{a^2(\varphi(x_p),x_p)+4f_u(\varphi(x_p),x_p)}+O(\varepsilon^{n+1})<0. \quad (26)$$

Аналогично показывается выполнение неравенства (21) для нижнего решения.

Поскольку при достаточно малых ε $\beta_n(x,p_\delta,\varepsilon)-\alpha_n(x,p_{-\delta},\varepsilon)=2\varepsilon^{n+1}\gamma+O(\varepsilon^{n+2})>0$, то выполнено условие упорядоченности.

Таким образом, установлено, что α_n,β_n — действительно упорядоченные нижнее и верхнее решение задачи (1) соответственно. Отсюда следует утверждение теоремы.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим нестационарную начально-краевую задачу, соответствующую задаче (1):

$$\begin{cases} N_tv:=-\dfrac{\partial v}{\partial t}+\varepsilon^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\varepsilon a(v,x)\dfrac{\partial v}{\partial x}-f(v,x)- \\ \qquad -\varepsilon f_1(v,x)=0, \quad -1<x<1, \quad 0<t<\infty, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0, \quad 0<t<\infty, \\ v(x,0,\varepsilon)=v^0(x,\varepsilon), \quad x\in[-1,1]. \end{cases} \quad (27)$$

Пусть $v^0(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$, где $u(x,\varepsilon)$ — решение задачи (1), существование которого утверждает **Теорема 1**. При таком начальном условии задача (27) будет иметь решение $v(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$. Исследуем устойчивость этого решения.

Пусть $\bar\beta(x)$ — достаточно гладкая при $x\in[-1,1]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\bar\beta(x)>\varphi(x), \ x\in[-1,1], \quad (28)$$

$$f(u,x)>0, \ u\in(\varphi(x),\bar\beta(x)], \ x\in[-1,1]. \quad (29)$$

Аналогично пусть $\bar\alpha(x)$ — достаточно гладкая при $x\in[-1,1]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\bar\alpha(x)<\varphi(x), \ x\in[-1,1], \quad (30)$$

$$f(u,x)<0, \ u\in[\bar\alpha(x),\varphi(x)), \ x\in[-1,1]. \quad (31)$$

Очевидно, определения функций $\bar\alpha(x)$, $\bar\beta(x)$ корректны в силу **Условия 2**.

Теорема 2. *Если выполнены **Условия 1** и **2**, то при достаточно малом ε решение $v=u(x,\varepsilon)$ задачи (27) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\bar\alpha;\bar\beta]$, и следовательно, $u(x,\varepsilon)$ — единственное решение задачи (1) в указанной области.*

Сразу отметим, что мы не претендуем здесь на указание глобальной области влияния, т.е. множества всех функций v^0, входящих в область влияния решения $u(x,\varepsilon)$, а указываем лишь некоторое его подмножество.

Для доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $u(x,\varepsilon)$ как решения задачи (27) используем метод сжимающих барьеров.

1) Вначале рассмотрим промежуток $[0,t^*]$, где $t^*=-\ln(\varepsilon c_0)/\varepsilon$, $c_0>0$ — постоянная, выбор которой будет указан ниже. Пусть $\delta_1(x)=\bar\beta(x)-\varphi(x)>0$. Тогда при достаточно малом ε на промежутке $[0,t^*]$ функция

$$\tilde\beta(x,t,\varepsilon):=u(x,\varepsilon)+e^{-\varepsilon t}\delta_1(x)$$

является верхним решением задачи (27). Покажем это.

Прежде всего, выбирая константу c_0 достаточно большой, получаем нужное дифференциальное неравенство при $t=t^*$, $x\in[-1,1]$:

$$\begin{aligned} &N_t\tilde\beta(x,t^*,\varepsilon)= \\ &\quad=-f(\varphi(x)+e^{-\varepsilon t^*}\delta_1(x),x)+\psi(x,t^*,\varepsilon)\varepsilon= \\ &\quad=-\varepsilon\bar f_uc_0\delta_1(x)+O(\varepsilon^2)+\psi(x,t^*,\varepsilon)\varepsilon<0, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\bar f_u=f_u(\varphi(x))$, $\psi(x,t,\varepsilon)$ — известная функция, $|\psi(x,t,\varepsilon)|<c_1$. Конкретнее нужно выбрать

$$c_0>\frac{c_1}{\bar f_u\delta_1(x)}, \ x\in[-1,1].$$

Далее, отметим, что в силу **Условия 2** и неравенства (29) при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$\begin{gathered} f(\varphi(x)+\delta_1(x)c_0\varepsilon,x)\le f(u,x), \\ u\in[\varphi(x)+\delta_1(x)c_0\varepsilon,\varphi(x)+\delta_1(x)], \ x\in[-1,1]. \end{gathered} \quad (33)$$

Обоснуем неравенство (33). В силу постоянства знака непрерывной функции для каждого фиксированного x существует такое значение $u^*(x)$, что $f_u(u,x)>0$, $u\in[\varphi(x),u^*(x)]$. Пусть $f_m(x)$ — минимум функции $f(u,x)$ на отрезке $[u^*(x),\varphi(x)+\delta_1(x)]$. Отметим, что величины $u^*(x)$, $f_m(x)$ не зависят от ε. Поскольку $f(u,x)\to 0$ при $u\to\varphi(x)$, то мы можем выбрать ε настолько малым, чтобы для всех $x\in[-1,1]$ выполнялось неравенство $f(\varphi(x)+e^{-\varepsilon t^*}\delta_1(x),x)=f(\varphi(x)+\delta_1(x)c_0\varepsilon,x)<$ $<f_m(x)$. Из последнего неравенства и монотонного возрастания функции $f(u,x)$ относительно u на промежутке $[\varphi(x)+e^{-\varepsilon t^*}\delta_1(x),u^*(x)]$ следует неравенство (33).

Требуемое дифференциальное неравенство на всем промежутке $(0,t^*]$ при $x\in[-1,1]$ следует из неравенств (32) и (33):

$$\begin{aligned} N_t\tilde\beta(x,t,\varepsilon)&=-f(\varphi(x)+e^{-\varepsilon t}\delta_1(x),x)+\psi(x,t,\varepsilon)\varepsilon< \\ &<-f(\varphi(x)+e^{-\varepsilon t^*}\delta_1(x),x)+c_1\varepsilon<0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что функция $\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ является нижним решением задачи (27) при $t \in [0,t^*]$.

Таким образом, согласно известным результатам о дифференциальных неравенствах [18], если начальное условие $v^0(x,\varepsilon)$ лежит в области, заключенной между функциями $\bar{\alpha}(x)$ и $\bar{\beta}(x)$, то решение задачи (27) существует при $t \in [0,t^*]$ и лежит между функциями $\tilde{\alpha}(x,t,\varepsilon)$ и $\tilde{\beta}(x,t,\varepsilon)$. Обозначим таким образом определенное при $t \in [0,t^*]$ решение через $v_1(x,t,\varepsilon)$. В частности, при $t = t^*$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) - \delta_2(x)c_0\varepsilon < v_1(x,t,\varepsilon) <\\ < u(x,\varepsilon) + \delta_1(x)c_0\varepsilon,\ x \in [-1,1], \end{aligned} \quad (34)$$

где $\delta_2(x) := \varphi(x) - \bar{\alpha}(x) > 0$.

2) Теперь рассмотрим промежуток $[t^*,\infty)$. Покажем, что при $n = 0$ функции

$$\alpha^*(x,t,\varepsilon) = (\alpha_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon))e^{-\lambda t} + u(x,\varepsilon), \quad (35)$$

$$\beta^*(x,t,\varepsilon) = (\beta_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon))e^{-\lambda t} + u(x,\varepsilon), \quad (36)$$

где $\lambda > 0$ — постоянная, являются соответственно нижним и верхним решениями задачи

$$\begin{cases} N_t v := -\dfrac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon a(v,x)\dfrac{\partial v}{\partial x} - f(v,x) - \\ \qquad -\varepsilon f_1(v,x) = 0, \quad -1 < x < 1, \quad t^* < t < \infty, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(-1,t,\varepsilon) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0, \quad t^* < t < \infty, \\ v(x,t^*,\varepsilon) = v^0(x,\varepsilon), \quad x \in [-1,1]. \end{cases} \quad (37)$$

Требуется показать, что $N_t\beta^* < 0$ и $N_t\alpha^* > 0$. Стандартные преобразования приводят к представлению

$$\begin{aligned} N_t\beta^* = e^{-\lambda t}[\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta_n}{\partial x^2} - f(\beta_n,x) - \varepsilon f_1(\beta_n,x) - \varepsilon a(\beta_n,x)\frac{\partial\beta_n}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u,x) + \varepsilon f_1(u,x) + \\ + \varepsilon a(u,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\beta_n - u) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(a(\beta_n,x) - a(u,x) - a_u^*(\beta_n - u)) - \varepsilon a_u^*(e^{-\lambda t} - 1)(\beta_n - u)\frac{\partial}{\partial x}(\beta_n - u) + \\ + f(\beta_n,x) + \varepsilon f_1(\beta_n,x) - f(u,x) - \varepsilon f_1(u,x) - (f_u^* + \varepsilon f_1^*)(\beta_n - u)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Символ (*) означает, что значение функции берется при аргументе $u(x,\varepsilon) + \theta e^{-\lambda t}(\beta_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon))$, $0 < \theta < 1$.

Можно показать аналогично [19], что выполнена оценка

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta_n - u) = O(\varepsilon^n). \quad (39)$$

Используя (39) и известные оценки для β_n, имеем

$$\begin{aligned} N_t\beta^* = e^{-\lambda t}(-\gamma f_u(\varphi(x),x)\varepsilon^{n+1} + \lambda(\beta_n - u) + \\ + O(\varepsilon^{n+2}) + O(\varepsilon^{2n+2})). \end{aligned} \quad (40)$$

Выбирая λ достаточно малой, получаем $N_t\beta_t < 0$ при $n \geq 0$. Аналогично получим $N_t\alpha^* > 0$.

Пусть $v^0(x,\varepsilon) = v_1(x,t^*,\varepsilon)$, тогда $v^0(x,\varepsilon)$ из задачи (37) будет лежать между нижним и верхним решениями $\alpha^*(x,t^*,\varepsilon)$ и $\beta^*(x,t^*,\varepsilon)$. Действительно, за счет выбора достаточно большого γ, участвующего в построении α_0 и β_0, справедливы неравенства

$$\alpha^*(x,t^*,\varepsilon) < \tilde{\alpha}(x,t^*,\varepsilon) < \tilde{\beta}(x,t^*,\varepsilon) < \beta^*(x,t^*,\varepsilon). \quad (41)$$

На основании известных результатов из [18] заключаем, что при $t \in [t^*,\infty)$ существует решение задачи (37), заключенное между α^* и β^* при $t \in [t^*,\infty)$, которое мы обозначим через $v_2(x,t,\varepsilon)$.

3) Наконец, заключаем, что задача (27) имеет гладкое по t решение

$$v(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} v_1(x,t,\varepsilon),\ t \in [0,t^*], \\ v_2(x,t,\varepsilon),\ t \in [t^*,\infty). \end{cases} \quad (42)$$

Отсюда сразу же следует утверждение теоремы.

5. ДРЕЙФО-ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ ПОЛУПРОВОДНИКА

Уравнения типа (27) находят применение в дрейфо-диффузионной модели полупроводника. В одномерном случае система уравнений, связывающая напряженность электрического поля $E(x)$ и концентрацию электронов $n(x)$, выглядит следующим образом (см. [10]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}[nV(E) + D\frac{\partial n}{\partial x}] = 0, \\ &\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{4\pi q}{\epsilon}(n - n_0). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь D — коэффициент диффузии, который предполагается независящим от напряженности E, $V(E)$ — скорость дрейфа электронов, $n_0(x)$ — равновесная концентрация электронов, q — абсолютная величина заряда электрона, ϵ — диэлектрическая проницаемость полупроводника.

Исключая в системе (43) $n(x)$ и интегрируя по координате x, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} D\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \epsilon\frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon V(E)\frac{\partial E}{\partial x} = \\ = 4\pi(-j + Dq\frac{\partial n_0}{\partial x} + qV(E)n_0), \end{aligned} \quad (44)$$

где j — полный ток через образец.

Зависимость $v(E)$ для GaAs может быть выбрана в виде [20]

$$\begin{gathered} V(E) = E(\mu_{e\Gamma} F(E) + \mu_{eL}[1 - F(E)]), \\ F(E) = \left[1 + (E/E_c)^a\right]^{-b}, \end{gathered} \tag{45}$$

где $\mu_{e\Gamma} = 5000$ см^2/Вс, $\mu_{eL} = 300$ см^2/Вс, $E_c = 3$ кВ/см, $a = 5.6$, $b = 0.25$.

Приведем уравнение к виду (27). Для этого введем безразмерные функции: $\tilde{x} = x/L$, $\tilde{E} = E/E_c$, $\tilde{V} = V/V_0$, $\tilde{j} = 4\pi jL/qn_{00}D$, $\tilde{n}_0 = n_0/n_{00}$, где L — длина образца, n_{00}, V_0 — характерные величины соответственно для $n(x)$ и $V(E)$. Параметр $\tilde{j}$ можно менять, подключая образец к источнику постоянного тока. В стационарном случае в безразмерных переменных уравнение (44) принимает вид

$$\varepsilon\lambda \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon \tilde{V}(\tilde{E}) \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{j} + 4\pi\lambda \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial \tilde{x}} + 4\pi \tilde{n}_0 \tilde{V}(\tilde{E}), \tag{46}$$

где $\varepsilon = \epsilon E_c/Lqn_{00}$, $\lambda = D/LV_0$ — безразмерный параметр. Для дальнейшего расчета примем $\epsilon = 13$, $q = 4.8 \cdot 10^{-10}$ Фр, $L = 10^{-3}$ см, $n_{00} = 2.7 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$, $V_0 = 10^7$ см/с, $D = 100$ см^2/с. Эти значения могут быть реализованы в эксперименте. При этих параметрах $\varepsilon = 0.01$, $\lambda = 0.01$, причем λ при этих условиях становится порядка ε и мы можем записать уравнение в виде:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon \tilde{V}(\tilde{E}) \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{j} + 4\pi\varepsilon \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial \tilde{x}} + 4\pi \tilde{n}_0 \tilde{V}(\tilde{E}). \tag{47}$$

Наконец, уравнение (47) принимает вид уравнения из задачи (1), если положить $u = \tilde{E}$, $a(u) = -\tilde{V}(u)$, $f(u,x) := -\tilde{j} - 4\pi\tilde{n}_0 a(u)$, $f_1(u,x) = 4\pi\tilde{n}_0'$ (здесь и далее опустим $\sim$ над x). Оставим на концах полупроводника условия Неймана, так как они не оказывают влияния на внутренний слой, являющийся главным объектом исследования данной работы.

Выберем профиль легирования $\tilde{n}_0(x)$ таким образом, чтобы функция $\tilde{n}_0'(x)$ была разрывной в точке $x = x_p$, например

$$\tilde{n}_0(x) = \begin{cases} 1 + 0.05x, & x < x_p, \\ 1 - 0.05x, & x \ge x_p. \end{cases}$$

Отметим, что пространственная неоднородность реактивного слагаемого определяется только неоднородностью функции $n_0(x)$ равновесной концентрации электронов, которую называют также профилем легирования полупроводника. Хорошо известно, что неоднородности профиля легирования могут существенно влиять на распределение поля в образце (см., например, [10, 21]). Также известно, что с помощью неравномерного добавления доноров в полупроводник можно добиться практически любой зависимости $n_0(x)$ [22]. Кроме того, примеси, как правило, распределяются в образце неравномерно, а потому важно учесть влияние неоднородностей указанного типа в модели полупроводника.

Поставим задачу на отрезке $[-0.1, 0.1]$:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' - \varepsilon a(u)u' - f(u,x) - \varepsilon f_1(u,x) = 0, \\ \qquad\qquad x \in (-0.1, 0.1), \\ u'(\pm 0.1, \varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{48}$$

где

$$f(u,x) = \begin{cases} -\tilde{j} - 4\pi(1 + 0.05x)a(u), & u \in I_u, \\ & x \in [-0.1, 0], \\ -\tilde{j} - 4\pi(1 - 0.05x)a(u), & u \in I_u, \\ & x \in [0, 0.1], \end{cases}$$

$$f_1(u,x) = \begin{cases} 0.05 \cdot 4\pi, & u \in I_u, \quad x \in [-0.1, 0], \\ -0.05 \cdot 4\pi, & u \in I_u, \quad x \in [0, 0.1]. \end{cases}$$

Итак, **Условия 1, 2** выполнены. Ясно, что областью устойчивости является область $0 < u < \varphi^{(0)}(x)$, $x \in [-0.1, 0.1]$, где $\varphi^{(0)}(x)$ — промежуточный корень вырожденного уравнения (см. рис. 1).

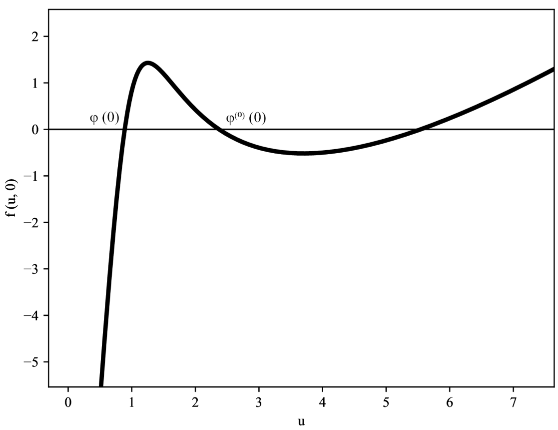

Рис. 1. Зависимость реактивного слагаемого f от u при $x = 0$

На рис. 2, *а*–*г* показано решение начально-краевой задачи (27), соответствующей задаче (48), при разных начальных условиях $v^0(x)$, найденное численно с помощью метода прямых и одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1. Поведение решения полностью согласуется с утверждением **Теоремы 2** и иллюстрирует указанную область устойчивости. На рис. 2, *а* показан внутренний слой в крупном масштабе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено построение асимптотики, доказательство существования и исследование устойчивости стационарного решения уравнения типа «реакция–адвекция–диффузия»,

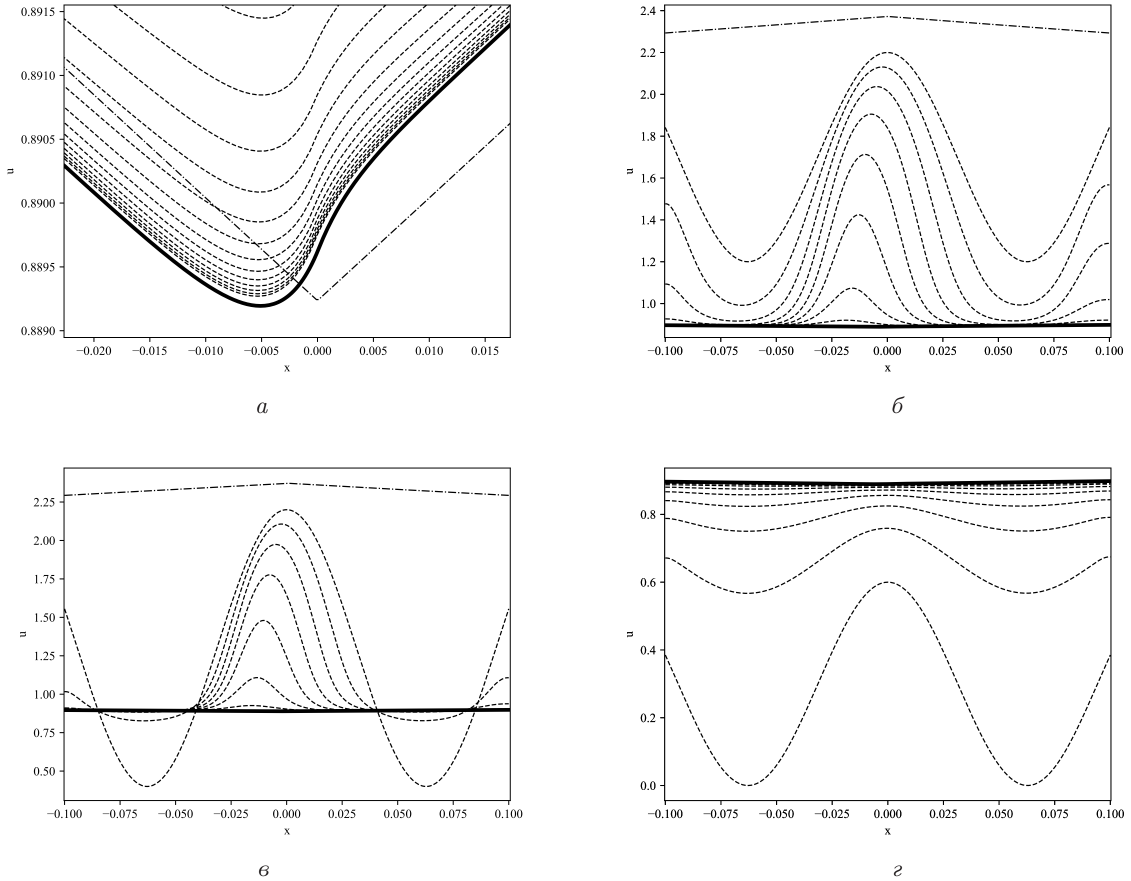

Рис. 2. Зависимость от x численного решения начально-краевой задачи (27), соответствующей задаче (48), при различных начальных условиях $v^0(x) \in (0, \varphi^{(0)}(x))$, $x \in [-0.1, 0.1]$, взятая с постоянным шагом по t (пунктирные линии); асимптотика первого порядка (жирная линия); корни вырожденного уравнения $\varphi(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$(штрих-пунктирные линии). Видно, что во всех случаях *а–г* решения начально-краевой задачи притягиваются к устойчивому решению $u(x, \varepsilon)$ задачи (48)

обладающего слабым внутренним слоем. Показано, что такое решение, как решение соответствующей начально-краевой задачи, является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Для такого решения указана область устойчивости конечной (не асимптотический малой) ширины и установлено, что решение стационарной задачи единственно в этой области. Показано применение данного результата в дрейфо-диффузионной модели полупроводника при фиксированном токе. Дальнейшее развитие результата возможно в системах, содержащих уравнение типа «реакция–адвекция–диффузия» и интегральное условие, обеспечивающее в дрейфо-диффузионной модели постоянство разности потенциалов на концах полупроводника.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00069).

[1] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* // Фундаментальная и прикладная математика. **4**. 799 (1998).

[2] *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* // Russian Journal of Mathematical Physics. **22**. 215 (2015).

[3] *Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R.* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. **405**. 90 (2013).

[4] *Нефедов Н. Н., Никулин Е.И.* // Математические заметки. **106**, № 5. 708 (2019).

[5] *Нефедов Н.Н., Ни М.К.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. **12**. 64 (2015).

[6] *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* // Russian Journal of Mathematical Physics. **29**, № 2. 214 (2022).

[7] *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* // Russian Journal of Mathematical Physics. **29**, № 1. 81 (2022).

[8] *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* // Дифференциальные уравнения. **53**. 524 (2017).

[9] *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* // Differential Equations. **58**, N 6. 757 (2022).

[10] *Левинштейн М.Е., Пожела Ю.К., Шур М.С.* Эф-

фект Ганна. Советское радио, 1975.

[11] *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А. О.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. **57**. 854 (2017).

[12] *Никулин Е.И., Волков В.Т., Карманов Д.А.* // Дифференциальные уравнения. **60**, № 1. 64 (2024).

[13] *Никулин Е.И.* // Теоретическая и математическая физика. **215**, № 3. 360. (2023).

[14] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. Высшая школа Москва, 1990.

[15] *Нефедов Н.Н.* // Дифференциальные уравнения. **31**. 1132 (1995).

[16] *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. **46**. 615 (2006).

[17] *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* // Изв. вузов. Матем. № 11. 69 (1998).

[18] *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* // Дифференц. уравнения. **38**, № 4. 499 (2002). (*V.N. Pavlenko & O.V. Ul'yanova* // Differential Equations **38**. 520 (2002)).

[19] *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L.* // Russian Journal of Mathematical Physics. **26**, № 1. 55 (2019).

[20] *Jablonski B., Weinert-Raczka E.* // Optics & Laser Technology. **134**. 106617 (2021). 2021.

[21] *Farrell P., Peschka D.* // Computers & Mathematics with Applications. **78**, Is. 12. 3731 (2019).

[22] *Зеегер К.* Физика полупроводников. М.: Мир, 1977.

Weak Inner Layer in the Reaction-Diffusion-Advection Problem in the Case of a Reaction Discontinuity

E. I. Nikulin[a], **A. V. Karamyshev**

Department of Mathematics,, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]*nikulin@physics.msu.ru*

The present work is devoted to the study of a one-dimensional "reaction-advection-diffusion" equation with weak smooth advection and a discontinuous reaction in the spatial coordinate. The work includes the construction of the asymptotics, proof of existence, and investigation of the stability of stationary solutions with the constructed asymptotics, which exhibit a weak inner layer that forms near the discontinuity point. For constructing the asymptotics, the method of A.B. Vasilieva was used; for proving the existence of the solution, the asymptotic method of differential inequalities was employed; and for studying the stability, the method of contracting barriers was applied. It is shown that such a solution, as the solution of the corresponding initial-boundary value problem, is asymptotically stable in the sense of Lyapunov. The stability region of finite (not asymptotically small) width for such a solution is specified, and it is established that the stationary problem has a unique solution in this region.

PACS: 02.30.Jr., 72.20.-i.
Keywords: singularly perturbed equations, reaction-diffusion-advection equations,inner layer, asymptotic methods, differential inequality method, Lyapunov asymptotic stability, drift-diffusion model of a semiconductor.
Received 2024.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 5. Pp. .

Сведения об авторах

1. Никулин Егор Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-48-59; e-mail: nikulin@physics.msu.ru.
2. Карамышев Алексей Владимирович — студент; e-mail: karamyshevav@my.msu.ru.