

Оптическая диагностика фрактальных биоструктур

Ю. В. Рыжикова,^{1,*} С. Б. Рыжиков¹¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 13.06.2024; подписана в печать 03.07.2024)

Рассмотрены общие подходы к решению фундаментальной научной задачи, направленной на установление закономерностей, определяющих количественную связь между особенностями структуры биоморфов и их спектральными характеристиками. На основе теоретического анализа определены особенности скейлинга фрактальных биоморфов. Проводится выявление особенностей формы фурье спектров и их связи с элементами самоподобия освещаемых биосистем. Выполненный расчет дифракции света на биообъектах указывает на возможность использования паттерного и скейлингового анализа для их идентификации. Полученные результаты моделирования позволяют усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики анализируемых биоморфов.

PACS: 42.30.Kq; 89.75.Da; 07.05.Tr УДК: 535.015

Ключевые слова: биоморф, фрактал, скейлинг, паттерный анализ, оптическая диагностика, фурье-анализ.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.79.2450401](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.79.2450401)

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно ведётся изучение структурных и оптических свойств фрактальных биообъектов — биоморфов разной геометрии [1–3]. Обусловлено это тем, что элементы с фрактальной структурой широко используются в различных междисциплинарных приложениях [4–8]. Биоморфы внешне похожи на клетки живых микроорганизмов, но при определенных условиях могут представлять собой целые макроорганизмы. Основными биоморфами среди высших растений являются дендритоподобные объекты — деревья, кустарники, папоротники и другие растения [9]. Свойства биоморфов дендритной формы нашли применение при изучении проблемы возникновения жизни на Земле, в биомедицине, компьютерной графике, создании новых быстрых алгоритмов, в процессах электроосаждения и электрохимической миграции и др. [10–13]. Фундаментальные аспекты исследований фрактальных биоструктур связаны с решением основной проблемы фрактальной оптики. Она состоит в установлении закономерностей, определяющих устойчивую связь между особенностями структуры изучаемых биосистем и их спектральными и скейлинговыми характеристиками. Решение такой проблемы позволит усовершенствовать фрактальные методы оптической диагностики рассматриваемых биообъектов.

Несмотря на большое количество работ [10, 14–16] выполненных в указанном направлении, недостаточно изученными оказались скейлинговые и спектральные особенности биоморфов.

Цель данной работы состоит в анализе скейлинга структур и оптических спектров биоморфов разной геометрии с выделением в них самоподобных элементов — паттернов. Проведенный анализ опирается на поиск инвариантов (скейлинговых коэффициентов) для биоморфов и их фурье-образов, что позволяет выработать критерии идентификации фрактальных систем. Выполненные расчеты дополняют разработанную ранее нами классификацию фракталов по поведению их коэффициентов скейлинга [10].

1. ПОСТРОЕНИЕ БИОМОРФОВ И ИХ СКЕЙЛИНГОВЫЕ СВОЙСТВА

Построение биоморфов осуществлялось простым алгоритмом многократного возведения в степень комплексного числа. Наибольший интерес представляет ситуация, когда комплексные числа начинают группироваться вокруг области, внешне похожей на микроорганизм. Каждый биоморф строится путем многочисленных итераций заданной функции. Нас интересовало получение фрактальных биоморфов с выраженными скейлинговыми свойствами как в структуре, так и в их спектральных характеристиках. Были проанализированы семейства биоморфов, полученные по итерационным формулам: $Z_{n+1} = Z_n^m$, $Z_{n+1} = Z_n^m \pm i$ и $Z_{n+1} = Z_n^m + C$, где $m \geq 2$, $i = \sqrt{-1}$ и C — комплексная константа. Здесь $Z_1 = (I - x_c) \cdot \Delta s - 1 + i \cdot (J - y_c) \cdot \Delta s$ — исходное значение комплексной переменной. Расчетная область задавалась $1 \leq I$, $J \leq 6000$, $\Delta s = 0.001$ — масштабный коэффициент, $x_c = y_c = 3000$ — координаты ее центра. Затем те же арифметические действия применяются к сумме

* E-mail: ryzhikova.ju@physics.msu.ru

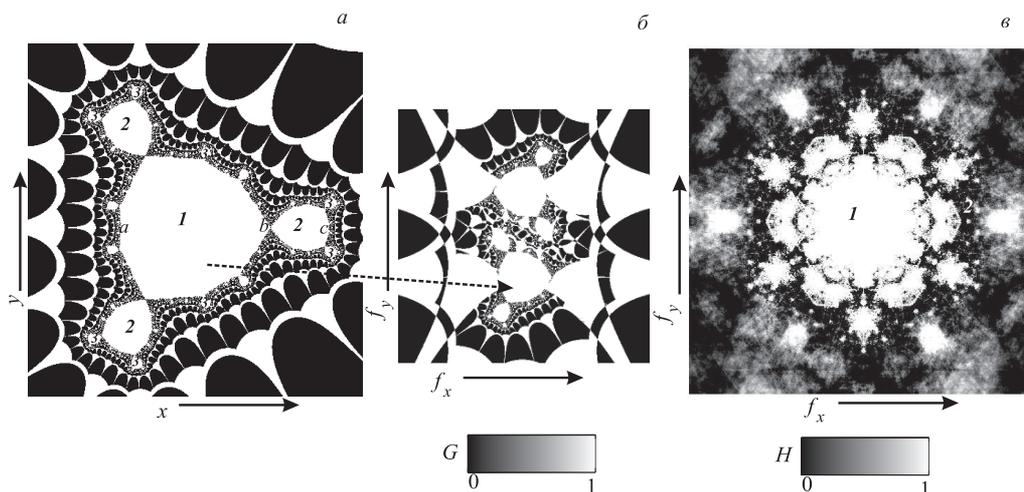


Рис. 1. Пример моделирования биообъектов: *a* — фрагмент биоморфа $Z_{n+1} = Z_n^3 + i$ на комплексной плоскости, *б* — фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $G(f_x, f_y)$ (мнимая часть), *в* — фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $H(f_x, f_y)$ (модуль), f_x, f_y — пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта (*a*) и элементы паттерных образований в спектре $H(f_x, f_y)$ (*в*). Стрелкой показаны идентичные области по форме (пунктир)

Z_2 , получается значение Z_3 и т.д. Полученные комплексные числа строим в системе координат на комплексной плоскости (x, y) , где $x = \text{Re}Z_n$, $y = \text{Im}Z_n$. Таким образом, формируется биоморф.

Для выявления вклада компонентов основной итерационной формулы $Z_{n+1} = Z_n^m + C$ в изображение биоморфа были исследованы ее предельные случаи при параметрах $C = 0$ и $C = \pm i$. Результаты моделирования показали, что биоморф с формулой расчета $Z_{n+1} = Z_n^m$ имеет округлую форму и состоит из круглого ядра и кольцевой периферической области с зубьями, окружающей его. При увеличении степени m происходит трансформация формы границ периферической области. Ее трансформация по форме заключается в изменении числа кольцевых областей с зубьями, увеличении числа зубьев при одновременном уменьшении их амплитуды. Число областей с треугольными зубьями при увеличении m уменьшается от 6 при $m = 2$ до их исчезновения при $m \geq 5000$. Данный биоморф характеризуется лишь относительным самоподобием (кольцевые области с зубьями), которое становится слабым при $m \geq 6$. Скейлинг в структуре такого биоморфа отсутствует.

Ядро биоморфа с рекуррентной формулой расчета $Z_{n+1} = Z_n^m \pm i$ трансформируется от дендритной $m = 2$ до округлой формы $m \geq 6$. Особенности построения структуры дендрита и его оптические характеристики рассмотрены в [16, 17]. При $m \geq 3$ форма ядра биоморфа является m -угольником. Периферическая область с зубьями окружает ядро биоморфа (рис. 1, *a*). Наиболее сильные изменения структуры биоморфа происходят циклически с периодом 4 при $m = 3, 7, 11, 15, 19, \dots$. Каждый период увеличивается зубчатость округлой периферической области биоморфа с одновременным уменьшением амплитуды ее зубцов. При изменении

C с i на $-i$ происходит переориентация самоподобных областей биоморфа. Наиболее четко скейлинг проявляется у биоморфа $Z_{n+1} = Z_n^m \pm i$ для степени $m = 3$ (рис. 1, *a*). При его построении использовалось рекуррентное соотношение: $Z_{n+1} = Z_n^3 + C$, где $C = i$. Коэффициенты скейлинга биоморфа ζ определяются как отношение большей длины паттерна к меньшей: $\zeta_{12} = l_1/l_2 = ab/bc \approx 2.6$ и $\zeta_{23} = l_2/l_3 \approx 3.86$.

В случае произвольных комплексных C возможно получение различных биоморфов. Так, если $C = 0.5555 \cdot i - 0.5883$, то формирование биоморфа с фрактальным заполнением возможно для степеней: $2 \leq m \leq 7$ и $m = 9, 14$. В остальных случаях ядро биоморфа представляет собой «цветок» с неровными границами и числом лепестков, равным m . С увеличением степени m амплитуда лепестков уменьшается до полного их исчезновения $m \approx 5000$. В этом случае ядро имеет вид круга. Для $m = 2$ ядро биоморфа представляет собой множество Жюлиа. Периферическая область биоморфа такая же, что и для рассмотренных выше предельных случаев. При $m = 5000$ периферическая зубчатая область вырождается. В качестве примера на рис. 2, *a* приведен биоморф, полученный с помощью итерационных вычислений по формуле: $Z_{n+1} = Z_n^7 + C$.

Сформированный биоморф «цветок» фрактален, его наиболее крупные самоподобные элементы — паттерны — обозначены цифрами. Коэффициенты скейлинга биоморфа «цветок» ζ определяются как отношение большего радиуса паттерна к меньшему: $\zeta_{12} = r_1/r_2 \approx 5.45$ и $\zeta_{23} = r_2/r_3 = 2.2$. Здесь индексы 1, 2 и 3 соответствуют выделенным самоподобным паттернам.

Еще одним примером рассматриваемой группы фракталов является множество Мандельброта [17–

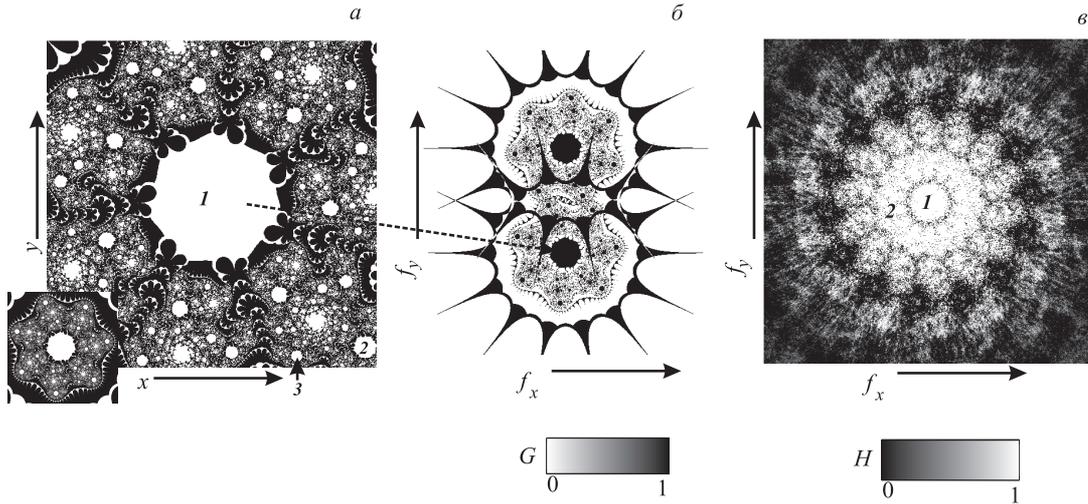


Рис. 2. Пример моделирования биоструктур: *a* — биоморф «цветок» на комплексной плоскости и его увеличенный фрагмент, *б* — фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $G(f_x, f_y)$ (мнимая часть), *в* — фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $H(f_x, f_y)$ (модуль), f_x, f_y — пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта (*a*) и элементы паттерных образований в спектре $H(f_x, f_y)$ (*в*). Стрелкой показаны идентичные области по форме (пунктир)

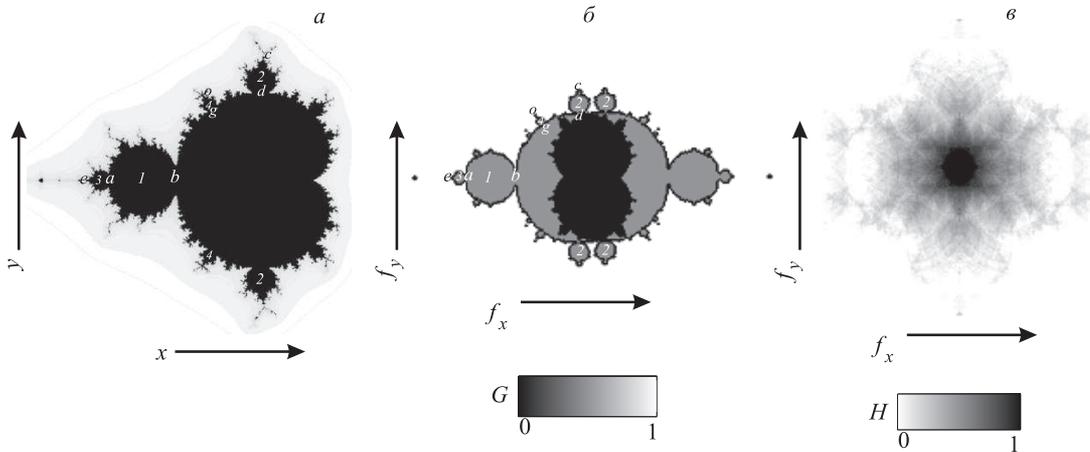


Рис. 3. *a* — Фрактал Мандельброта на комплексной плоскости, *б* — его спектр двукратного фурье-преобразования $G(f_x, f_y)$ (мнимая часть), *в* — фрагмент спектра двукратного фурье-преобразования $H(f_x, f_y)$ (модуль), f_x, f_y — пространственные частоты. Цифрами показаны наиболее крупные самоподобные структурные элементы объекта (*a*) и его спектра $G(f_x, f_y)$ (*б*)

19] таких точек C на комплексной плоскости (x, y) , где $x = \text{Re}C$, $y = \text{Im}C$. Для заданных C рекуррентное соотношение $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $z_0 = 0$ задает ограниченную последовательность (рис. 3, *a*). На рис. 3 цифрами отмечены характерные самоподобные элементы. Коэффициенты скейлинга множества Мандельброта ζ определяются как отношение большей длины выделенного самоподобного элемента к меньшей: $\zeta_{12} = l_1/l_2 = ab/cd \approx 1.88$, $\zeta_{23} = l_2/l_3 = cd/ea = 2$ и $\zeta_{34} = l_3/l_4 = ea/og \approx 1.33$.

Для структуры каждого сформированного биоморфа характерен свой набор идентификаторов — коэффициентов скейлинга. Эти параметры оказались чувствительны к изменению степени m , константы C и выбранному способу их определения.

2. СКЕЙЛИНГ В ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ БИОМОРФОВ

Обычно фурье-спектры фрактальных объектов наиболее отчетливо передают их самоподобные свойства, что согласуются с литературными данными [10, 16, 20, 21]. Однако результаты моделирования показали, что рассматриваемые биоморфы относятся к четвертой группе фрактальных объектов ранее разработанной нами классификации по поведению коэффициентов скейлинга [10] и не имеют фрактальных пространственных фурье-спектров.

Поле дифракции в дальней зоне для двумерных биоструктур характеризуется амплитудой $A_{q_x, q_y} = F(F(P^o)^T)^T$, где

$F(P^o) = \sum_{j=1}^J P^o(j) \omega_j^{(j-1)(q-1)}$, $\omega_J = e^{-2\pi i s/J}$, q, q_x, q_y — нормированные пространственные частоты, J — число элементов, s — масштабирующий множитель, P^o — бинарная функция пропускания биоморфа, T — неспрягаемое матричное транспонирование.

При проведении над рассматриваемыми структурами двумерного фурье-преобразования: $A = \text{fft2}(Z)$, самоподобные элементы в пространственном спектре неразличимы. Здесь fft2 — двумерное фурье-преобразование, вычисленное с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье [22]. Мнимая и действительная части такого преобразования имеют не фрактальный растровый вид.

Если применить двумерное фурье-преобразование к полученному спектру A еще раз, то самоподобные элементы появляются вновь: $G = \ln \text{fft2}(\text{Im}(A))$ (рис. 1, б, рис. 2, б и рис. 3, б). Аналогичные результаты по форме спектров получаются и для спектра $G = \ln \text{fft2}(\text{Re}(A))$. При этом коэффициенты скейлинга спектров имеют те же значения, что и соответствующие им структуры биоморфов (рис. 1, б и рис. 2, б). Для спектра множества Мандельброта коэффициенты скейлинга ζ определяются как отношение большей длины выделенного самоподобного элемента к меньшей: $\zeta_{12} = l_1/l_2 = ab/cd \approx 2.2$, $\zeta_{23} = l_2/l_3 = cd/ea \approx 1.67$ и $\zeta_{34} = l_3/l_4 = ea/og \approx 1.5$ (рис. 3, б).

Модуль спектра двукратного фурье-преобразования биоморфа $H(f_x, f_y)$ имеет фрактальные при-

знаки, где f_x, f_y — нормированные пространственные частоты. На рис. 1, в и рис. 2, в наиболее крупные самоподобные элементы — паттерны, обозначены цифрами 1 и 2. Коэффициенты скейлинга равны отношению большего радиуса паттерна к меньшему: $\zeta_{12} = R_1/R_2 \approx 1.63$ (рис. 1, в) и $\zeta_{12} = R_1/R_2 \approx 3.18$ (рис. 2, в). Спектр множества Мандельброта (рис. 3, в) обладает зеркальной симметрией и не имеет скейлинга.

Полученные результаты показали, что самоподобные структуры биоморфов и соответствующие им спектры характеризуются разными значениями коэффициентов скейлинга. Таким образом, применение процедуры двукратного фурье-преобразования позволяет выявить новые самоподобные элементы биоморфов, которые могут быть потеряны в оптических характеристиках в классическом приближении (однократное фурье-преобразование).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование подтверждает наличие количественной взаимосвязи между структурными особенностями рассматриваемых фрактальных объектов и их спектральными характеристиками. Это позволяет проводить идентификацию фрактальных объектов на основе определения скейлинговых параметров в фиксируемых самоподобных элементах — паттернах.

- [1] Galan S.F. // J. of Comput. Languages. **76**. 101222 (2023).
- [2] Gdawiec K., Kotarski W, Lisowska A. // J. of Nonlinear Sciences and Applications. **9**, N 5. 2305 (2016).
- [3] O'Brien K., Carmona R., Gram-Hanssen I. et. al. // Ambio. **52**. 1448 (2023).
- [4] Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **66**. № 2. 20 (2011). <http://vmu.phys.msu.ru/abstract/2011/2/11-2-020>. (Bogolyubov A.N., Petukhov A.A., Shapkina N.E. // Moscow Univ. Phys. Bull. **66**, N 2. 122 (2011)).
- [5] Pickover C.A. Computers, Pattern, Chaos, and Beauty: Graphics from an Unseen World. Mineola, N.Y., Dover Publications, 2001. 394 p.
- [6] Ortega A., de la Cruz M., Alfonso M. // Comput. Graph. **26**. N 1. 143 (2002).
- [7] Ружницкая Д.Д., Ружникова Ю.В. // Изв. РАН. Сер. физ. **86**, № 6. 902 (2022). (Ruzhitskaya D.D., Ruzhnikova Yu.V. // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. **86**, N 6. 756 (2022)).
- [8] Leys J. // Comput. Graph. **26**, N 6. 977 (2002).
- [9] Berger D.S. // J. of Theor. Biol. **152**, N 4. 513 (1991).
- [10] Ружникова Ю.В., Ружников С.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **78**, № 4. 2340406 (2023). (Ruzhnikova Yu.V., Ruzhnikov S.B. // Moscow Univ. Phys. Bull. **78**, N 4. 513 (2023)).
- [11] Canabal J.A., Otaduy M. A., Kim B., Echevarria J. // Eurographics. **39**, N 2. 597 (2020).
- [12] Nicolas-Carlock J.R., Carrillo-Estrada J.L., Dossetti V. // Sci. reports. **6**. 19505 (2016).
- [13] Косырев А.В., Ружникова Ю.В., Ружников С.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 5. 58 (2022). (Kosyrev A.V., Ruzhnikova Yu.V., Ruzhnikov S.B. // Moscow Univ. Phys. Bull. **77**, N 5. 723 (2022)).
- [14] Ruzhnikova Yu., Mukhartova Iu., Ruzhnikov S. // J. Phys. Conf. Ser. 012059. (2018).
- [15] Вохник О.М., Короленко П.В., Мохов В.В. // Изв. РАН. Сер. физ. **88**. N 1. 13 (2024). (Vokhnik O.M., Korolenko P.V., Mokhov V.V. // Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. **88**, N 1. 13 (2024)).
- [16] Ковальчук М.В., Короленко П.В., Ружникова Ю.В. // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. № 1. 151401 (2015).
- [17] Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с. (Peitgen H.-O., Richter H. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986. 202 p.)
- [18] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с. (Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. Freeman: N.Y., 1983. 468 p.)
- [19] Rani M., Kumar V. // J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. D Res. Math. Educ. **8**, N 4. 279 (2004). <https://koreascience.kr/article/JAK0200414714218665.pdf>

- [20] *Macia E.* // *Rep. Prog. Phys.* **75**. 036502 (2012). [Russian Academy of Sciences: Physics. 74, N 10. 1370 \(2010\)](#).
- [21] *Арзамасцева Г.В., Евтихов М.Г., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* **74**, № 10. 1432 (2010). (*Arzamastseva G.V., Evtikhov M.G., Lisovskii F.V., Mansvetova E.G.* // [Bull. of the Russian Academy of Sciences: Physics. 74, N 10. 1370 \(2010\)](#)).
- [22] *Кандидов В.П., Чесноков С.С., Шленов С.А.* Дискретное преобразование Фурье. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2019. 88 с.

Optical Diagnostics of Fractal Biostructures

Yu.V. Ryzhikova^a, S.B. Ryzhikov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University

Moscow 119991, Russia

E-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru

General approaches to solving a fundamental scientific problem aimed at establishing the patterns that determine the quantitative relationship between the structural features of biomorphs and their spectral characteristics are considered. Based on theoretical analysis, the scaling features of fractal biomorphs are determined. The shape characteristics of Fourier spectra and their connection with the self-similarity elements in illuminated biosystems are identified. The performed calculation of light diffraction on bio-objects indicates the possibility of using pattern and scaling analysis for their identification. The obtained modelling results allow for the improvement of fractal methods for the optical diagnostics of the analyzed biomorphs.

PACS: 42.30.Kq; 89.75.Da; 07.05.Tp

Keywords: biomorph, fractal, scaling, pattern analysis, optical diagnostics, Fourier analysis.

Received 13 June 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2024. 79, No. 5. Pp. .*

Сведения об авторах

1. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikovaju@physics.msu.ru.
2. Рыжиков Сергей Борисович — доктор пед. наук, доцент кафедры общей физики; тел. (495) 939-29-73, e-mail: sbr@physics.msu.ru.