

## Структуры и сингулярности в оптике: от каустик к субволновым масштабам

М. И. Трибельский<sup>1,\*</sup> Б. С. Лукьянчук<sup>2,†</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра нанофотоники Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 35

(Поступила в редакцию 12.07.2024; после доработки 06.08.2024; подписана в печать 08.08.2024)

Дается краткий обзор современного состояния проблемы сингулярностей электромагнитного поля, возникающих при преломлении и рассеянии света материальными объектами. Обсуждение начинается с каустик, возникающих при трассировке лучей в геометрической оптике, и последовательно движется в сторону увеличения точности рассмотрения и уменьшения масштабов, заканчиваясь описанием сингулярностей при рассеянии света субволновыми частицами. Выявляются общие и отличительные черты различного типа сингулярностей, роль симметрии задачи и закона сохранения энергии. Обсуждаются физические основы и способы преодоления дифракционного предела. Теоретическое описание иллюстрируется экспериментальными примерами. Указываются различные практические применения рассматриваемых эффектов.

PACS: 42.15.Dp; 42.25.-p; 42.25.Nz. УДК: 535.31; 535.36; 535.4

Ключевые слова: каустика, фотонная струя, дифракция, интерференция, сингулярность, вектор Пойнтинга.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.79.2460401](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.79.2460401)

## ВВЕДЕНИЕ

## Несколько общих слов

Академик В. Е. Захаров отмечал, что российская наука представляет собой уникальный культурный феномен, появившийся благодаря реформам Петра I. К моменту смерти Петра, в 1725 г., в России уже была Академия наук, но науки в современном понимании данного слова практически еще не было. К этому времени Западная Европа имела в активе (если считать с Коперника) почти двести лет непрерывного развития по сути современной науки. Российская наука смогла преодолеть этот временной лаг и в начале XX в. была уже вполне на уровне европейской. Лучшим свидетельством этому является то, что одна из первых Нобелевских премий в 1904 г. была присуждена российскому ученому — Ивану Петровичу Павлову. Это была премия в области медицины, но и в физике конца XIX—начала XX века российскими учеными были сделаны открытия мирового уровня.

Перед входом на физический факультет МГУ установлена статуя А. Г. Столетова — первого российского физика, получившего европейское признание. В период с 1862 по 1866 гг. Столетов проходил стажировку за границей, где Густаф Кирхгоф назы-

вал его самым талантливым своим учеником. Столетов организовал первую в России учебно-исследовательскую физическую лабораторию. Он также был инициатором создания Физического института при Императорском Московском университете (так официально именовался МГУ по 1917 г.). Большинство профессоров физики в ИМУ были его учениками. После смерти А. Г. Столетова кафедру физики с 1896 г. возглавлял профессор Николай Алексеевич Умов, который в 1874 г. впервые ввел понятие скорости и направлении движения потока энергии. В 1884 г. Дж. Пойнтинг применил введенное Умовым понятие плотности потока энергии к электромагнитному полю, определив вектор, который иногда называют вектором Умова–Пойнтинга. Перед зданием физического факультета МГУ также стоит памятник Петру Николаевичу Лебедеву — выдающемуся физико-экспериментатору, впервые измерившему давление света.

Войны, революции и последовавшие за ними события нанесли огромный урон развитию науки в России, но не остановили его. В целом «золотой век» советской науки, когда в исторически короткий срок, за несколько десятков лет она преодолела путь, на который Европе понадобилось несколько веков, представляется эффектом, обусловленным положительной обратной связью — явлением типа теплового взрыва. Повторить этот опыт практически невозможно, так же, как и реконструировать уникальную систему образования в Советском Союзе, которая во второй половине XX века, возможно, была лучшей в мире (по крайней мере, в области математики и естественных наук).

\* E-mail: [mitribel@gmail.com](mailto:mitribel@gmail.com)† E-mail: [LukyanchukBS@my.msu.ru](mailto:LukyanchukBS@my.msu.ru)

Авторы настоящего обзора знают это не с чужих слов. Годы нашего формирования как физиков-теоретиков совпали с периодом, когда Москва справедливо считалась одной из мировых столиц теоретической физики, а зарубежные ученые изучали русский язык, чтобы иметь возможность в подлиннике читать статьи советских коллег. В отличие от «негра преклонных годов», который «русский бы выучил только за то, что им разговаривал Ленин», мотивация иностранцев была связана с тем, что они в своих университетах получали русскоязычные версии советских научных журналов существенно раньше их англоязычных переводов. К тому же переводилось далеко не все, да и качество переводов оставляло желать лучшего.

Московский университет сыграл важную роль в формировании многих разделов российской науки, и одним из самых значительных представляется вклад ученых МГУ в создание российской оптической школы, особенно раздела «нелинейная оптика». Даже сам этот термин был введен в науку нашими соотечественниками — С. И. Вавиловым и В. Л. Левшиным. Имена российских ученых — Л. И. Мандельштама, А. А. Андропова, Г. С. Ландсберга, С. М. Рытова, М. А. Леонтовича, а в более близкое нам время — Р. В. Хохлова, Л. В. Келдыша, А. С. Ахманова, А. П. Сухорукова, А. С. Чиркина и многих, многих других говорят сами за себя и характеризуют значительность этого вклада. По этой причине авторам, которые оба являются выпускниками физического факультета МГУ, особенно приятно опубликовать этот обзор в юбилейном выпуске «Вестника Московского университета», посвященном 270-летию нашей альма матер, как дань уважения родному университету и нашим учителям.

### Собственно введение

Данный обзор рассчитан на широкий круг читателей и посвящен обсуждению структур и сингулярностей поля в оптике. Эта тематика принадлежит большой и бурно развивающейся области. Поскольку «нельзя объять необъятное», обзор никоим образом не претендует на полноту. Мы выбрали для обсуждения только несколько простейших случаев, сконцентрировались на выяснении физики рассматриваемых явлений. При этом многие важные как с фундаментальной точки зрения, так и с точки зрения различных приложений вопросы оказались вне рамок обзора. Отчасти это компенсировано значительным списком литературы, отсылающим заинтересованного читателя к соответствующим публикациям.

При обсуждении сингулярностей мы будем двигаться в сторону уменьшения характерных масштабов: от геометрической оптики к волновой и далее к субволновой. Здесь следует определить, что мы понимаем под масштабом сингулярности, поскольку при приближении к последней характерный масштаб соответствующей структуры, как правило, об-

нуляется. Поэтому, говоря о масштабе сингулярности, мы имеем в виду ее *максимальный масштаб*, т.е. характерный размер области, внутри которой структура поля в основном определяется типом сингулярности, в этой области находящейся.

При теоретическом анализе электромагнитного поля используется гауссова система единиц, в которой электрическое ( $E$ ) и магнитное ( $H$ ) поля имеют одинаковую размерность. Временная же зависимость монохроматической волны предполагается вида  $\exp(-i\omega t)$ . Кроме того, все вещества будут считаться немагнитными, т.к. магнитная проницаемость  $\mu$  на оптических частотах равна единице [1], а среда, в которой находятся рассеивающие свет объекты, — недиссипативной. Если не оговорено особо, то это вакуум.

Обзор имеет следующую структуру. В разделе 1 кратко описывается история вопроса. В разделе 2 обсуждаются каустики. Раздел 3 посвящен дифракционным катастрофам и связанным с ними явлениям. В разделе 4 мы переходим к обсуждению фазовых сингулярностей, оптических вихрей, суперосцилляций и фотонных струй. Раздел 5 посвящен сингулярностям поля вектора Пойнтинга. В заключении кратко подводятся итоги.

## 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

История оптики связана с исследованием световых структур различного масштаба и также двигалась в сторону уменьшения последнего. Астрономические и геофизические оптические явления (рассветы, закаты, радуги и т.п.) были известны еще первобытному человеку. Ряд оптических структур меньших масштабов издавна наблюдался при прохождении света сквозь стеклянные изделия (в Египте стекло умели изготавливать уже 5 тысяч лет назад) и прозрачные минералы. Воспитатель Нерона Сенека сообщал об увеличивающем свойстве стеклянных сфер [2]. Кстати, сам император Нерон смотрел бои гладиаторов сквозь специально отбеленный изумруд<sup>1</sup>. Плиний Старший в своей «Естественной истории» описывал зажигательное действие стеклянных шаров [3]. Объяснение этих явлений осуществляется с помощью геометрической оптики (ГО), оперирующей представлением семейства лучей, введенных в науку еще Эвклидом. Хотя даже античные ученые (Архимед, Птолемей и др.) знали эффект преломления света, на установление точного закона понадобилось целое тысячелетие: закон был открыт в Багдаде персидским ученым Абу Саидом аль-Ала Ибн Салемом в 984 г. [4]. Впоследствии этот закон в период с 1602 до 1637 гг. переоткрывался Томасом Харриотом, Иоганном Кеплером, Виллебрордом Снеллиусом

<sup>1</sup> Существует гипотеза, что Нерон страдал дефектом зрения, и изумруд был всего лишь очками, зато, безусловно, одними из первых.

и Рене Декартом. В 1662 г. Пьер де Ферма установил, что этот закон следует из принципа Ферма, согласно которому свет следует по пути, минимизирующему время его прохождения. В 1678 г. Христиан Гюйгенс показал, как можно объяснить закон Снеллиуса, используя волновую природу света и принцип Гюйгенса–Френеля.

Теоретическое описание световых структур осуществляется на разных уровнях: свет можно описывать как лучи, как скалярные волны, как векторные поля и как квантовые поля [5–7]. Применение терминов скалярные и векторные поля в оптике требует пояснения — ведь электромагнитное поле всегда состоит из векторных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Дело, однако, в том, что в некоторых случаях все компоненты этих полей выражаются через единственную скалярную функцию, удовлетворяющую волновому уравнению. Эти электромагнитные поля и называются скалярными. Простейшим примером является монохроматическая плоская волна, распространяющаяся в свободном пространстве. Если же такой функции не существует, то соответствующее электромагнитное поле принято называть векторным.

В обзоре Берри [5] рассмотрены сингулярности, возникающие при различных описаниях электромагнитного поля: если распространение электромагнитного излучения описывать лучами, как это делается в геометрической оптике, то особенности представляют собой каустики; в скалярной волновой оптике это фазовые особенности; в векторных волнах это могут быть особенности, в которых поляризация света чисто линейная или чисто круговая и т.д. Акцент в обзоре [5] делается на типичность, структурную устойчивость и универсальность соответствующих сингулярностей.

В настоящем обзоре мы применяем эти общие принципы для описания световых структур субволнового масштаба. В современных оптических устройствах такие структуры реализуются за счет различных методов преодоления дифракционного предела. Дифракционный предел, открытие которого связывается с именем Эрнста Аббе [8, 9], фактически обусловлен принципом неопределенности Гейзенберга для импульса и координаты фотона:  $\Delta x \Delta p_x \leq \hbar/2$ . Учитывая, что, согласно квантовой механике, для фотона, распространяющегося в среде с коэффициентом преломления  $n$ , справедливо соотношение  $p = n\hbar k$ , где  $k = \omega/c$  и  $c$  — соответственно волновое число и скорость света в вакууме, и полагая, что  $\Delta p \sim p$ , отсюда легко получаем ограничение снизу на точность измерения координаты фотона:  $\Delta x \leq \lambda/(2n)$  [10]. Мы подчеркиваем, что это ограничение именно снизу, т.к. в наших рассуждениях не учитывалось качество системы наблюдения. При недостаточно высоком качестве реальная разрешающая способность будет определяться именно свойствами оптического прибора, а не приведенными выше фундаментальными оценками.

Долгое время дифракционный предел считался непреодолимым ограничением. Однако около ста лет назад была предложена схема ближнепольной

микроскопии, основанная на особенностях прохождения света сквозь малую апертуру. Ее разрешающая способность могла значительно превышать дифракционный предел. Идея этого метода весьма проста: если размер апертуры мал по сравнению с длиной волны, то в ближнем поле именно он будет играть роль характерного масштаба изменения интенсивности светового пучка.

А как же принцип неопределенности? С ним все в порядке. Приведенные выше оценки, основанные на этом принципе, справедливы для фотона, распространяющегося в свободном пространстве. Для фотона, пролетающего сквозь малую апертуру, соотношение  $p = n\hbar k$  не выполняется, т.к. нужно явно учитывать его взаимодействие с формирующей апертуру диафрагмой.

Открытие ближнепольной микроскопии (SNOM) сыграло важную роль в оптике. Впоследствии для преодоления дифракционного предела были предложены и другие физические идеи. Современное состояние этой проблемы отражено в работе [11]. Что же касается оптической микроскопии субволнового разрешения, то это направление сформировалось в самостоятельную область, называемую *наноскопией* [12–17].

Интересно отметить, что наличие дифракционного предела имеет и другое объяснение, и, как это часто бывает в физике (и не только в физике), появление альтернативного объяснения проблемы приводит к альтернативному способу ее решения. Это другое объяснение основывается на том, что информация о малых пространственных неоднородностях поля передается быстро затухающими эванесцентными волнами. Их затухание можно компенсировать за счет суперосцилляций в специальных антеннах, в которых часть излучаемой энергии направляется в малые телесные углы [18]. Удивительно, что теоретические основы теории суперосцилляций были заложены работой [19] более ста лет назад (см. также [20] и др). Экспериментально же поля с суперосцилляциями стали интенсивно исследоваться только в последние годы (см. [18] и цитируемые там работы). Более подробно к обсуждению природы и свойств суперосцилляций мы вернемся в разделе 4.

Завершая этот раздел, остановимся на классификации оптических явлений в зависимости от соотношения между длиной волны излучения  $\lambda$  и характерным масштабом задачи  $R$ . Количественно это соотношение принято характеризовать значением безразмерной величины  $q = kR$ , называемой *параметром размера*. В классических оптических приборах этот параметр очень велик. Например, для видимого света  $k \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ , что при размере апертуры порядка 1 см дает  $q \sim 10^5$ . Это область *геометрической оптики*. Другой предельный случай  $q \ll 1$  соответствует *рэлеевскому*, а также *аномальному* рассеянию (обсуждение последнего см., например, в [21, 22]). Промежуточный случай  $q \sim 1$ , когда при рассеянии света материальными объектами основную роль играют несколько первых резо-

нансов Ми (дипольный, квадрупольный, октупольный), иногда называют областью *Ми-троники* [23]. В последнее время внимание исследователей стало также привлекать изучение рассеяния света объектами с  $q \sim 10$ , для обозначения которого начинают использовать термин *мезотроника* [24].

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА, КАУСТИКИ

Обсуждение сингулярностей начнем с геометрической оптики. Отметим, что термин ГО не вполне однозначен. Изначально ГО возникла как описание оптических явлений с помощью трассировки лучей. Позднее было понято, что ГО соответствует определенному приближению при решении уравнений Максвелла, где важную роль играет фаза волны. Следуя истории вопроса, в этом разделе мы ограничимся трассировкой лучей.

Что происходит при падении параллельного пучка лучей на однородную прозрачную сферу, имеющую коэффициент преломления  $n > 1$ ? Используя трассировку лучей [25] и закон Снеллиуса (метод, известный со времен Кеплера), можно убедиться, что лучи, преломившиеся на границе сферы, образуют каустику, создаваемую семейством пересекающихся лучей и являющуюся их огибающей (см. рис. 1).

Каустика на рис. 1, б описывается системой параметрических уравнений [26]:

$$\begin{aligned} x_c &= \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \varphi} - 2 \cos \varphi}{\sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \varphi} - \cos \varphi} \cos \varphi \right] \cos \psi; \\ y_c &= \sec \psi \sin \varphi - x_c \tan \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\psi = 2 \left[ \varphi - \arcsin \left( \frac{\sin \varphi}{n} \right) \right]$ . Аналогичным образом выглядят каустики, получающиеся при облучении точечным источником [27].

Тип каустики, изображенный на рис. 1, в двумерном случае (цилиндрические линзы) называется каспом (от англ. *cusp* — заострение, пик). В трехмерном случае каустика является поверхностью. Для ситуации, изображенной на рис. 1, эта поверхность получается вращением каспа вокруг оси симметрии, проходящей через центр сферы. Такая поверхность называется каспоидом. В окрестности острия каспа (каспоида) его форма универсальна для всех каустик такого типа и описывается полукубической параболой:

$$y^2 + (ax)^3 = 0; \quad a = \text{const}, \quad (2)$$

где  $x$  и  $y$  отсчитываются от острия каспа. Из формулы (1) это выражение можно получить, разлагая зависимости  $x_c(\varphi)$  и  $y_c(\varphi)$  по малым  $\varphi$  и исключая  $\varphi$  из полученных соотношений.

Предполагая, что интенсивность внутри каустического конуса гомогенизирована, например, за счет локальных несовершенств оптических свойств

фокусирующей излучения сферы и ее поверхности, можно найти коэффициент усиления интенсивности на выходе каустики с поверхности сферы [28, 29]:

$$\frac{S_{\max}}{S_0} \approx \frac{27n^4}{(4 - n^2)^3}. \quad (3)$$

Здесь  $S_0$  — интенсивность (плотность потока энергии) плоской волны, падающей на сферу, а  $S_{\max}$  — интенсивность, усредненная по площади круга, ограниченного линией пересечения каустического конуса с поверхностью сферы.

Формирование каустики объясняет зажигательное действие стеклянных шаров, описанное еще Плинием Старшим [3]. Помимо каспа, существуют и другие типы каустик. Они классифицируются с помощью теории катастроф [5, 25, 26, 31–34]. Каустики возникают во множестве оптических (и не только оптических) явлений, таких как радуги, миражи, искажение изображений в изогнутых зеркалах и др. [5, 25, 33, 34]. Быстро меняющаяся световая «сеть», которую в солнечный день можно наблюдать на дне неглубокого водоема при мелкой волне на его поверхности, — это тоже каустики.

В заключение этого раздела отметим, что хотя ГО относится к самому грубому уровню описания световых структур в оптике [5], она прекрасно работает в широком диапазоне параметров и имеет прозрачный физический смысл, непосредственно показывая направление потоков световой энергии.

## 3. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА, ДИФРАКЦИОННЫЕ КАТАСТРОФЫ, ИНТЕГРАЛ ПИРСИ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ, ФОТОННЫЕ СТРУИ

При всей эффективности ГО для описания оптических явлений, она является не более чем приближенным решением уравнений Максвелла, справедливым при характерных масштабах структуры электромагнитного поля, значительно больших его длины волны (насколько «значительно», зависит от величины коэффициента преломления  $n$  и, вообще говоря, от формы рассеивающей частицы). Для частиц простой формы (сфера, цилиндр) при  $1 < n < 2$  величина параметра размера  $q = kR$ , где  $R$  — радиус сферы (цилиндра), начиная с которого ГО дает разумную точность, может составлять несколько десятков. Тем не менее, как бы велик ни был размер рассеивающей частицы, в окрестностях каустик ГО приводит к возникновению сингулярностей и становится неприменимой, т.к. вблизи сингулярности характерный пространственный масштаб изменения поля перестает быть малым по сравнению с длиной волны излучения. В таких случаях детализация описания световых структур осуществляется в рамках волновой оптики, что требует решения уравнений Максвелла с точностью большей, чем обеспечивает ГО. Поскольку, как уже отмечалось, в ГО каустики описываются теорией ката-



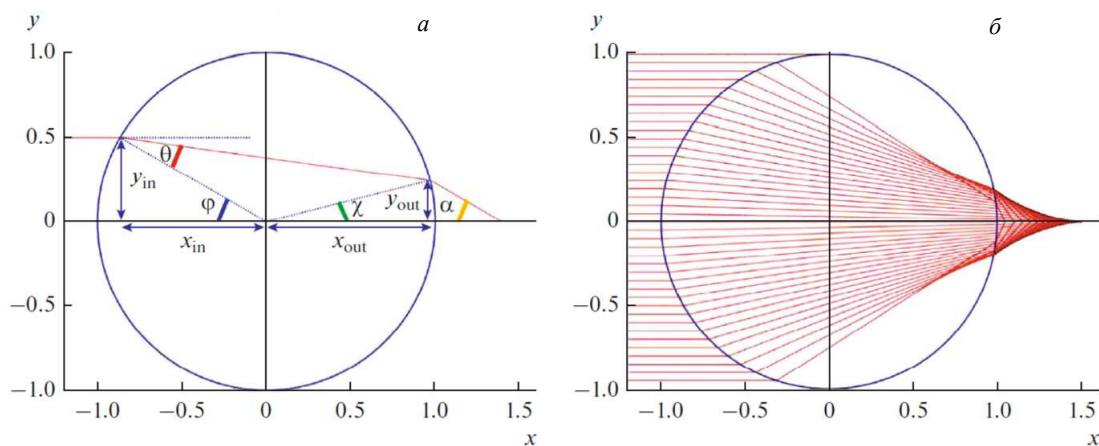


Рис. 1. *a* — Трассировка лучей в экваториальной плоскости сферы радиуса  $R$  при ее облучении параллельным световым пучком в вакууме. Коэффициент преломления сферы  $n = 1.5$ . Координаты  $x$  и  $y$  нормированы на  $R$ . Углы падения ( $\varphi$ ) и преломления ( $\theta$ ) внутри сферы связаны законом Снеллиуса:  $\sin \varphi = n \sin \theta$ . Луч входит в частицу в точке с координатами  $y_{in} = \operatorname{tg} \varphi$  и  $x_{in} = -\cos \varphi$ . Углы  $\chi$  и  $\alpha$  определяются формулами  $\chi = 2\theta - \varphi$  и  $\alpha = 2(\varphi - \theta)$ . Два близких луча,  $y_c$  и  $y_{cc}$  (соответствующие углам  $\varphi$  и  $\varphi + \delta\varphi$ ), на выходе сферы после второго преломления пересекаются в точке каустики, что дает уравнение для каустики (1); *b* — форма каустики (кривой, ограничивающей лучи, выходящие из сферы) показана черной линией [26]

строф, то их описание в рамках волновой оптики называется *дифракционной катастрофой* [33, 35–37].

Проиллюстрируем сказанное примером. Рассмотрим сходящийся к каустике волновой фронт. Выберем на нем произвольную точку и проведем через эту точку две взаимно перпендикулярных плоскости главных нормальных сечений, в которых лежат главные радиусы кривизны волнового фронта. Построим вокруг выбранной точки бесконечно малый элемент площади поверхности волнового фронта в виде криволинейного прямоугольника, стороны которого параллельны линиям пересечения указанных сечений с поверхностью волнового фронта (см. рис. 2).

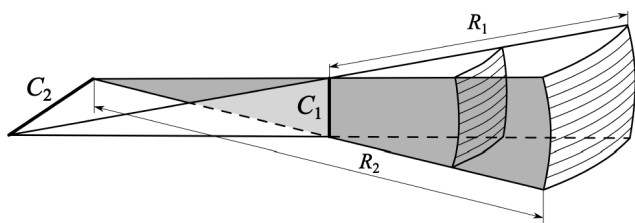


Рис. 2. Возрастание интенсивности излучения и кривизны волнового фронта по мере приближения к каустике (схематически) [38]. Подробности в тексте

Построим лучи, выходящие из каждой точки периметра этого прямоугольника (такое построение называется *лучевой трубкой*). В ГО направление потока энергии совпадает с лучами, которые всегда ортогональны волновому фронту. Поэтому поток энергии через боковые стенки лучевой трубки равен нулю, а поток энергии через любое ее сечение есть константа. Но по мере приближения волнового фронта к каустике площадь соответствующего криволинейного прямоугольника уменьшает-

ся (см. рис. 2). С учетом того, что полный поток должен сохраняться, это означает, что плотность потока энергии по мере приближения к каустике растет. Одновременно уменьшаются радиусы кривизны волнового фронта, т.е. растет его кривизна. В конце концов лучи, лежащие в плоскости, соответствующей меньшему значению радиуса кривизны ( $R_1$  на рис. 2), пересекаются, т.е. образуют элемент каустики, а прямоугольник вырождается в отрезок линии. Эта линия на рис. 2 обозначена как  $C_1$ . В приближении ГО на данной линии интенсивность излучения обращается в бесконечность, а один из радиусов кривизны (в рассматриваемом случае это  $R_1$ ) обнуляется. В обсуждаемом трехмерном случае объединение этих линий образует поверхность каустики (в двумерном случае — это линия).

Однако на этом история не заканчивается. Пройдя через  $C_1$ , волна в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, из сходящейся превращается в расходящуюся. В плоскости же, совпадающей с плоскостью рисунка, волновой фронт продолжает сходить и схлопывается в линию  $C_2$ . Множество таких линий составляет другую ветку каустики. В вырожденном случае, когда  $R_1 = R_2$ , на каустике обнуляются сразу оба радиуса кривизны. Это соответствует идеальной фокусировке локально сферического сходящегося волнового фронта.

Таким образом, в ГО каустики представляют собой сингулярные поверхности (линии), на которых интенсивность излучения расходится, а по крайней мере один из главных радиусов кривизны волнового фронта обнуляется (в двумерном случае такой радиус единственный). Подчеркнем также, что, как отмечалось выше, прохождение лучом каустики сопровождается изменением знака радиуса кривизны волнового фронта — сходящаяся волна превращается в расходящуюся, что приводит к соответствующей

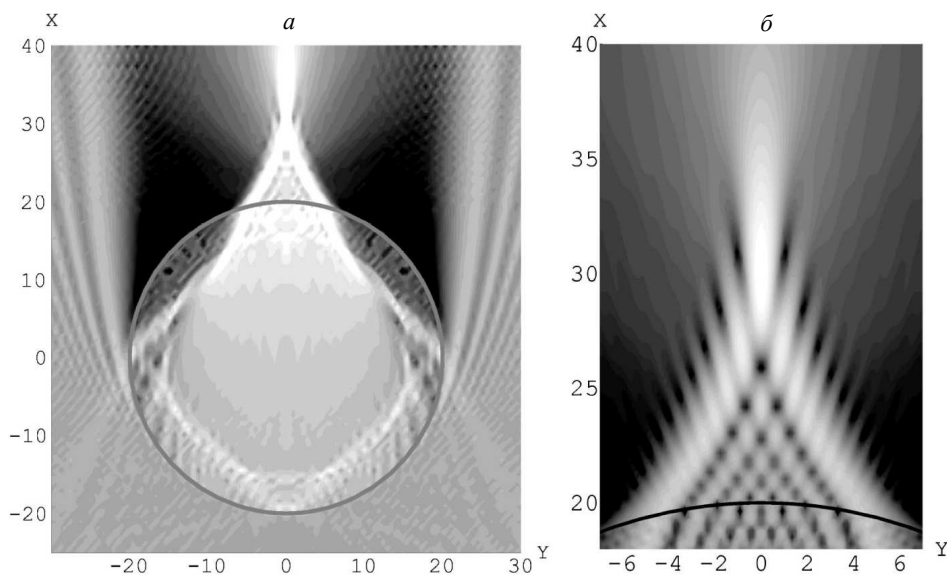


Рис. 3. Распределение интенсивности  $|S|$  электромагнитного излучения внутри каустики, создаваемой при рассеянии плоской линейно поляризованной монохроматической волны, нормально падающей на цилиндр с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 2$  и радиусом  $R = 30\lambda$ . Визуализация точного решения Ми. Поле  $\mathbf{E}$  перпендикулярно плоскости рисунка (ТМ-поляризация), так что ось цилиндра лежит в плоскости поляризации:  $a$  — общая дифракционная картина;  $b$  — увеличенное изображение каустики [27]

щим изменениям фазы световой волны [34, 38]. Волновая же оптика показывает, что, хотя в области каустики и происходит значительное возрастание интенсивности, она остается конечной. При этом каустика «размывается» в область конечной толщины.

В качестве примера на рис. 3 изображено распределение интенсивности при фокусировке плоской электромагнитной волны прозрачным цилиндром. Хорошо видно размытие каустики в область высокой интенсивности, имеющую как конечную ширину, так и определенную внутреннюю структуру, связанную с интерференционной модуляцией интенсивности излучения. При этом в ее окрестности наблюдается типичная картина чередования светлых (конструктивная интерференция) и темных (деструктивная интерференция) областей.

Для сферы и бесконечного кругового цилиндра как однородных, так и имеющих слоистую структуру той же симметрии, задача дифракции допускает точное решение [39]. Обычно такие решения называют решениями Ми. Мы тоже будем придерживаться этой терминологии, хотя, строго говоря, собственно решение Ми относится к рассеянию плоской линейно поляризованной волны однородной сферой [40]. В этих решениях рассеянное излучение представляется в виде бесконечной суммы парциальных волн: дипольной, квадрупольной, октупольной и т.д. (так называемое *мультипольное разложение*). При малом радиусе рассеивающей свет частицы такой ряд быстро сходится. Чем больше радиус, тем медленнее сходимость — тем большее число парциальных волн требуется учитывать для обеспечения заданной точности расчетов. Поэтому для частиц, размер которых велик по сравнению с длиной волны излучения, разработа-

ны методы приближенных расчетов. Помимо того, что на практике они оказываются более удобными, с их помощью удастся прояснить физику явления, скрытую в решении Ми из-за распределения рассеянного поля по большому числу парциальных волн. Так, например, в простейшем случае фокусировки плоской, линейно-поляризованной волны, падающей нормально на цилиндрическую линзу, ось которой параллельна плоскости поляризации, распределение полей в окрестности каустики приближенно описывается так называемым интегралом Пирси [41]:

$$I_P(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(X\xi + Z\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{4}\right)} d\xi. \quad (4)$$

Здесь начало координат совпадает с острием каустики в приближении ГО, волна распространяется вдоль оси  $z$ , а ось цилиндрической линзы располагается вдоль оси  $y$ . Кроме того, в (4) введены новые безразмерные переменные  $X = \text{const} \cdot xk^{3/4}$  и  $Z = \text{const} \cdot z\sqrt{k}$ .

Помимо обсуждаемых нами оптических задач, этот интеграл играет важную роль и в других волновых явлениях (гидродинамические и акустические волны, квантовая механика и т.п. [42]). Поэтому он достаточно детально исследован. В частности, хотя он и не берется в квадратурах, но имеется большое число его аналитических аппроксимаций, справедливых в различной области значений переменных  $X$  и  $Z$  (см., например, работу [43]).

Обобщая этот подход на случай аксиально-симметричных пучков, вместо интеграла Пирси прихо-

дим к интегралам типа Бессоида:

$$I_m(\rho, Z) = \int_0^\infty \xi^{m+1} J_m(\rho\xi) e^{-i(Z\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{4})} d\xi, \quad (5)$$

где  $m$  — целое неотрицательное число,  $J_m(\zeta)$  — соответствующая функция Бесселя, а  $\rho = \text{const} \cdot rk^{3/4}$ . Здесь  $r$  — расстояние от оси пучка до точки наблюдения.

Применение этих интегралов позволяет далеко продвинуться в описании не только параксиальных<sup>2</sup> скалярных пучков, но и сильно непараксиальных аксиально-симметричных пучков, в том числе и векторных [37]. Пример использования такого подхода представлен на рис. 4, где изображена интенсивность поля, возникающего при прохождении плоской линейно поляризованной волны через прозрачную сферу [37].

По-видимому, наиболее важный с практической точки зрения результат этого анализа состоит в вычислении смещения максимума интенсивности поля (дифракционного фокуса) по отношению к положению геометрического фокуса, предсказываемого ГО и располагающегося на острие каустики. Авторами [37] выведена простая приближенная формула, описывающая положение дифракционного фокуса:

$$f_d \approx \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} \left( 1 - \sqrt{\frac{3\pi n(3-n)-1}{4q n(n-1)}} \right). \quad (6)$$

Здесь  $f_d$  — расстояние от центра сферы до точки дифракционного фокуса, а множитель перед скобкой — то же, но для положения фокуса, предсказанного в ГО. Таким образом, второй член в скобках описывает указанное смещение. Видно, что оно всегда отрицательно — дифракционный (т.е. *фактический*) фокус всегда располагается по отношению к поверхности сферы *ближе*, чем в приближении ГО находится острие каустики.

Сравнение этого описания волновых явлений с результатами точного решения Ми показывает, что при  $q \sim 100$  (что в оптическом диапазоне соответствует сфере микронного размера) и  $1.4 < n < 1.6$  формула (6) обеспечивает точность не хуже чем 5% [37]. Что касается самого похода к проблеме, то в области значений  $n$ , соответствующей различным оптическим стеклам, данное приближение хорошо работает при  $q > 100$  и более менее удовлетворительно в интервале  $30 \leq q \leq 100$ . При этом угловая ориентация плоскости сечения результирующего поля слабо влияет на распределение интенсивности в этой плоскости (сравните верхнюю и нижнюю панели на рис. 4). При меньших значениях параметра размера расхождение с решением Ми возрастает. Однако в этой области приме-

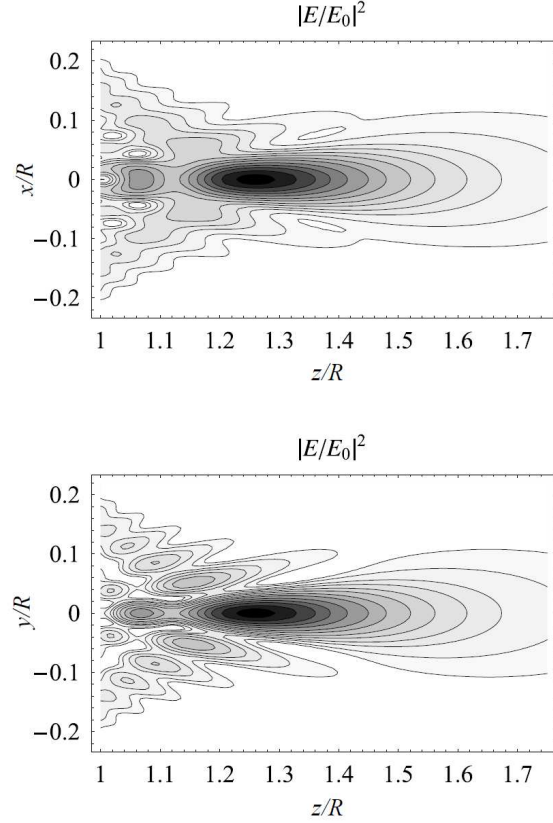


Рис. 4. Профили нормированной на интенсивность поля падающей волны интенсивности поля  $|E/E_0|^2$  в плоскостях  $xz$  и  $yz$  при фокусировке плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны в вакууме сферой с коэффициентом преломления  $n = 1.5$  и радиусом  $R$ . Параметр размера  $q = kR$  равен 100 (в размерных единицах при длине волны излучения  $\lambda = 248$  нм такое значение  $q$  соответствует  $R \approx 4$  мкм). Начало системы координат совпадает с центром сферы. Падающая волна распространяется в положительном направлении оси  $z$ , а ее вектор  $\mathbf{E}$  колеблется вдоль оси  $x$ . В этом случае ГО дает положение геометрического фокуса в точке  $z = 1.5R$ , в то время как из рисунка видно, что в действительности положение максимума интенсивности находится в точке  $z \approx 1.25R$  [37]

няемое в теории Ми мультипольное разложение становится быстро сходящимся и необходимость в альтернативном ему описании процесса рассеяния отпадает. Изменение же параметра размера в сторону его увеличения выводит нас при  $q \gg 100$  в область технической физики (оптика объективов и т.п.), которая лежит вне рамок настоящего обзора.

Возвращаясь к обсуждению эффектов при взаимодействии света видимого диапазона с субволновыми объектами, отметим сложные структуры, возникающие в распределении интенсивности при рассеянии плоской волны сферической частицей, лежащей на плоской подложке (см. рис. 5). Эта важная для ряда приложений (например, в проблеме лазерной очистки поверхностей [28, 29, 44–48]) задача также допускает точное решение [49].

Интересные эффекты наблюдаются при отклонении падающей волны от нормали к поверхности

<sup>2</sup> Напомним, что параксиальными называются пучки, имеющие малые углы отклонения лучей как от оси пучка, так и от нормалей к преломляющим поверхностям.



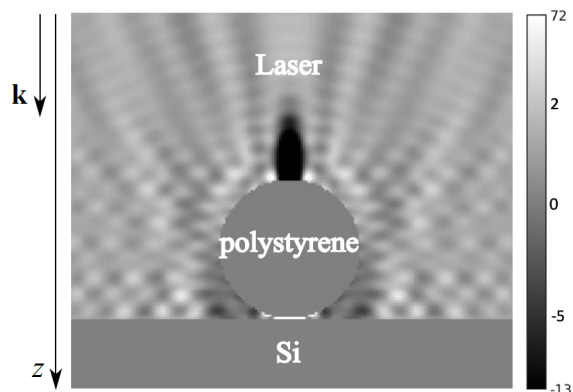


Рис. 5. Визуализация точного решения уравнений Максвелла. Структура  $z$ -компоненты поля вектора Пойнтинга  $S_z$  в плоскости экваториального сечения сферы, лежащей на плоской подложке. Поле внутри сферы и в подложке не показано. Рассеивается монохроматическая плоская линейно поляризованная волна, волновой вектор  $\mathbf{k}$  которой лежит в плоскости рисунка и направлен вертикально вниз. Ось  $z$  параллельна  $\mathbf{k}$ , а плоскость поляризации совпадает с плоскостью рисунка.  $S_z$  нормирована на интенсивность падающей волны. Градации серого выбраны так, что черный цвет соответствует максимальному значению плотности потока энергии, направленному против оси  $z$  ( $S_z < 0$ ), а белый — максимальному значению плотности потока противоположного направления ( $S_z > 0$ ). Длина волны излучения  $\lambda = 248$  нм. Материальные константы соответствуют сферической частице из полистирола ( $n = 1,6$ ) радиусом 0.5 мкм на кремниевой подложке ( $n = 1.57 + 3.56i$ ) [46]

подложки. В этом случае задача теряет зеркальную симметрию, а в приближении ГО возникает область тени. Рассмотрение такой задачи в рамках волновой оптики показывает, что в этой области могут образовываться яркие пятна, соответствующие высокой концентрации электромагнитной энергии, наблюдавшиеся экспериментально [46] (см. рис. 6).

Вернемся теперь к обсуждению волновых эффектов в зоне каустики и отметим узкую, протяженную область большой интенсивности излучения, располагающуюся около острия каустики. Такая область хорошо видна на рис. 3. Она получила название *фотонной струи (photonic jet)*. Фотонная струя возникает во многих задачах волновой и субволновой оптики [50–52]. Например, она четко выражена и на рис. 5, где она выходит из «макушки» облучаемой сферы. Отметим, что в данном случае, благодаря интерференции с излучением, отраженным от подложки, фотонная струя ориентирована в противоположную от направления распространения падающего излучения сторону.

При определенных условиях ширина этой струи становится меньше дифракционного предела [53–57]. Физические основы для преодоления дифракционного предела в этом случае те же, что и обсуждавшиеся выше — особенности ближнепольной оптики в непосредственной близости от материального объекта.

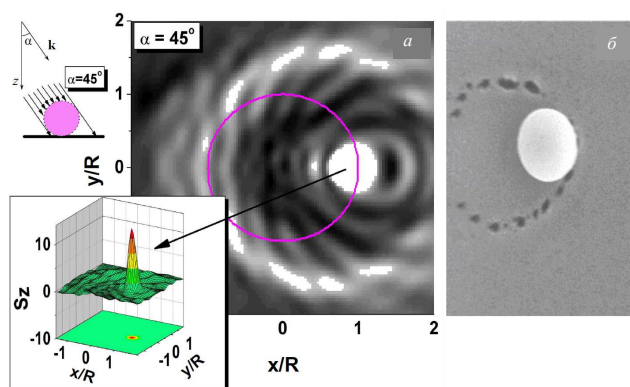


Рис. 6. *a* — Расчетное распределение  $z$ -компоненты вектора Пойнтинга ( $S_z$ ) на поверхности подложки под частицей полистирола радиусом 0.5 мкм при угле падения излучения  $45^\circ$ . Белый цвет обозначает области, где поглощенная энергия излучения превышает порог повреждения материала подложки, равный  $12.0$  мДж/см<sup>2</sup>. Вставка показывает пространственное распределение  $S_z$  в окрестности центрального яркого пятна, находящегося в области геометрической тени. *б* — Сканирующая электронная микроскопия экспериментально полученного изображения «кометного узора» на поверхности пленки из GeSbTe, на которой находилась сферическая частица полистирола. Облучение импульсом эксимерного импульсного KrF лазера;  $\lambda = 248$  нм, длительность импульса (FWHM) — 23 нс. Угол падения, размеры частицы и оптические константы соответствуют расчетным данным, приведенным на панели *a* [46]

Возможность контролировать характеристики фотонной струи сделала ее широко используемой в различных областях, таких как уже упоминавшиеся ранее лазерная очистка и обработка поверхностей [28, 29, 44–47]; микро- и нанoeлектроника [58–61]; нано-детектирование материальных объектов [62]; медицина [63, 64] и др. В качестве одного из примеров такого применения приведем технологию формирования нанотверстий в поверхности, покрытой сферическими микрочастицами [65–67]. На рис. 7 показан вид такой поверхности с массивом нанотверстий, сформированных при воздействии лазерного импульса на подложку, покрытую решеткой из SiO<sub>2</sub>-сфер микронного размера. Несмотря на микронный размер сфер, благодаря образованию фотонных струй, а также инициированных ими существенно нелинейных процессов поглощения и абляции удается формировать в подложке отверстия нанометрового размера (высотой до 30 нм в диаметре [67, 68]).

Нанометровые структуры с существенно субволновым характерным размером удается формировать на поверхности, облучая лазером и плазмонные наночастицы, т.е. металлические наночастицы, действительная часть диэлектрической проницаемости которых отрицательна ( $\text{Re } \epsilon < 0$ ), поддерживающие плазмонные резонансы [69, 70]. Так, например, в работе [69] продемонстрированы структуры с размером  $\lambda/260$ . Ряд других лазерных методов формирования наноструктур рассмотрен в [71–76].



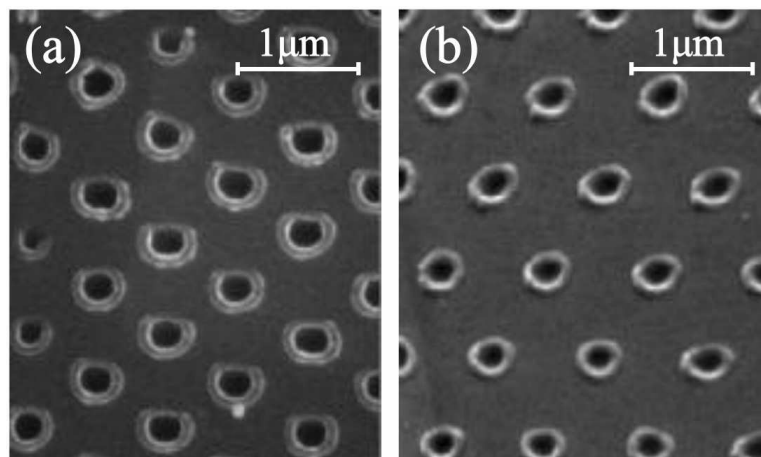


Рис. 7. Массивы дырок, сформированные фемтосекундным импульсным лазером (FWHM = 150 фс,  $\lambda = 800$  нм) в поверхности, покрытой гексагональным монослоем коллоидных сферических частиц  $\text{SiO}_2$ : *a* — кремниевая и *б* — германиевая подложки [65]

Возможен и обратный эффект — лазерное облучение поверхности через решетку сферических частиц позволяет формировать массивы нановыпуклостей [72, 75], или «нанохолмов», с высотой 10–100 нм, т.е. массивы нанолинз (см. рис. 8 [76]). Механизм формирования нановыпуклостей — плавление вещества подложки под поверхностью нанесенного на нее массива сферических наночастиц, действующих как микролинзы, с собиранием расплава в наноклапю за счет поверхностного натяжения и ее последующей солидификацией при остывании. Поверхности с нановыступами имеют множество различных применений. Они могут быть полезны при создании различных наноструктур: сверхвысокой плотности записи информации и др. [72].

И в завершение этого раздела — пример явления, на первый взгляд, противоречащего законам природы. Утверждение о том, что в однородной среде свет распространяется по прямой, представляется настолько же незыблемым, как то, что Волга впадает в Каспийское море. Насчет Волги спорить не будем (тем более что авторы не считают себя специалистами в географии). Что же касается света, то фраза «никогда не говори *никогда*» в науке справедлива как нигде. Даже в этом обзоре мы уже встречались с тем, что, казалось бы незыблемые представления (вроде невозможности оптической микроскопии с субволновым разрешением), при ближайшем рассмотрении оказываются очень даже «зыблемыми».

В этой связи отметим интересную и важную с практической точки зрения проблему формирования *изогнутой фотонной струи*, получившей название *фотонного крючка* (*photonic hook*). Этим крючком можно «цеплять» объекты, находящиеся в области геометрической тени — наноаналог ружья, стреляющего из-за угла.

Существуют различные способы создания фотонных крючков, обсуждение которых можно найти в работе [77] и цитируемой там литературе. В каче-

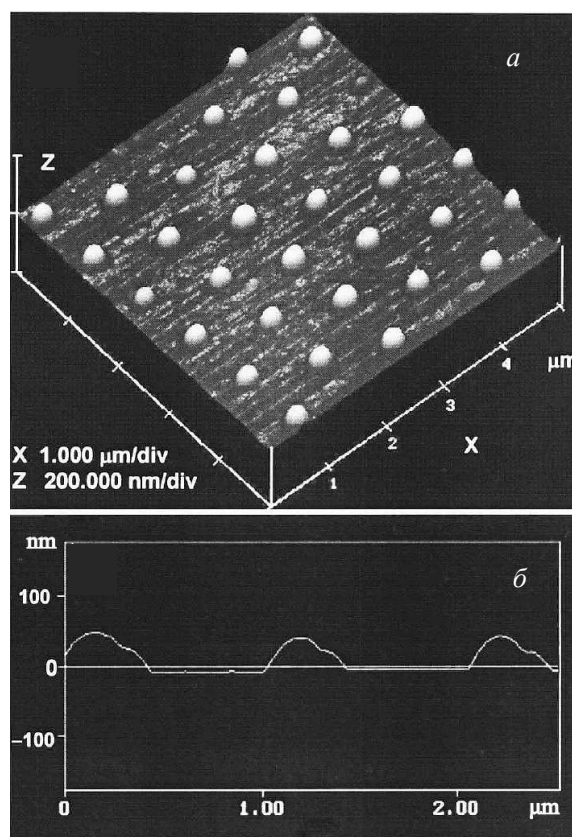


Рис. 8. *a* — Поверхность кремния с нановыступами, образующимися в результате облучения кремния импульсом KrF-лазера сквозь массив диэлектрических микросфер диаметром 1 мкм с показателем преломления  $n = 1$ . *б* — Профиль этой поверхности в сечении, проходящем через максимум нановыступов. Ноль соответствует положению необлученной поверхности. Профили получены с помощью атомно-силового микроскопа [72]

стве примера мы приведем некоторые результаты недавней статьи [78]. В ней экспериментально про-

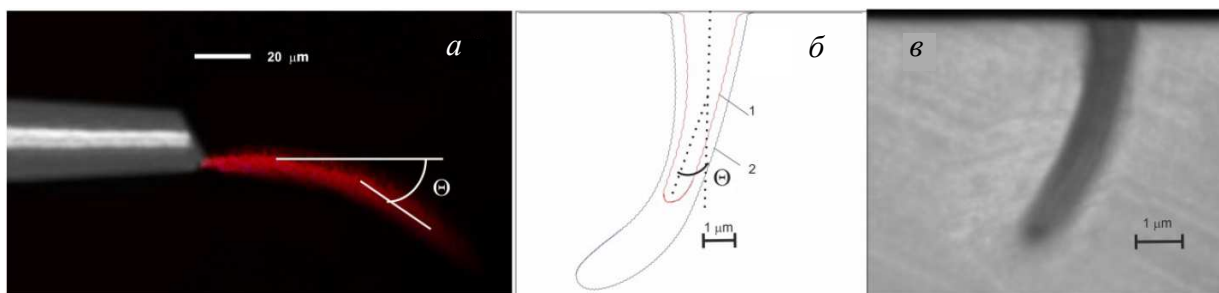


Рис. 9. *a* — Оптическое волокно с нарушенной симметрией окончания и формируемый фотонный крючок; *б* — профили поперечного сечения микрократеров для двух различных значений мощностей лазера: 1 — 40 и 2 — 80 мВт соответственно; (*с*) — фотография микрократера, полученного при мощности лазера 40 мВт [78]. Подробности в тексте

демонстрировано формирование фотонного крючка за счет нарушения аксиальной симметрии оптической системы. Конкретно крючок создавался при использовании оптоволокну, заканчивающегося усеченным конусом, плоскость сечения которого была непараллельна его основанию (см. рис. 9). Коническая часть волокна была расположена вертикально над поверхностью мишени из полистирола. В качестве источника излучения использовался термостабилизированный лазер с длиной волны 0.671 мкм, работающий в непрерывном режиме. Время воздействия на мишень 6–8 с. При данных значениях параметров пороговая величина мощности для получения кратера в полистироле составляет немного менее 10 мВт. Обратите внимание, что кратер проникает в полистирол в область геометрической тени от входного пятна облучения.

Отметим также работу [79], в которой численно и экспериментально доказана возможность использования фотонного крючка, сформированного тем же способом, что и в работе [78], в качестве дешевого и эффективного оптического пинцета. В частности, применение такого пинцета позволяет с высокой точностью перемещать отдельные живые клетки (эритроциты), в том числе и в областях, экранированных от воздействия неизогнутых световых пучков, т.е. производить действия, неосуществимые традиционными оптическими методами.

Данные результаты демонстрируют возможности использования каустик для формирования важных для различных приложений структур, характерный размер которых может быть значительно меньше длины волны падающего излучения<sup>3</sup>. Они приведены только в качестве примеров и, разумеет-

ся, далеко не исчерпывают все возможные случаи, подробное обсуждение которых выходит за рамки настоящего обзора.

#### 4. ФАЗОВЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ, ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ, СУПЕРОСЦИЛЛЯЦИИ

Итак, мы убедились, что в ГО каустики представляют собой сингулярные многообразия, в которых интенсивность излучения становится бесконечно велика, а один (или оба) главных радиуса кривизны волнового фронта обнуляются. Однако описание этих сингулярностей в рамках ГО связано с использованием этого приближения за пределами его применимости. Более последовательное рассмотрение в рамках волновой оптики показывает, что вместо сингулярностей возникают области резкого изменения электромагнитных полей, но сами поля при этом остаются регулярными — никаких бесконечностей не возникает. Иными словами, сингулярность каустик фиктивная.

Естественный вопрос, который можно (и должно!) задать в такой ситуации: а бывают ли в оптике такие сингулярности, существование которых не связано с превышением точности рассмотрения? Ответ на этот вопрос положительный. Более того, выяснилось, что «зоопарк» таких сингулярностей весьма разнообразен. В рамках данного обзора мы не имеем ни возможности, ни необходимости обсудить их все. Такому обсуждению посвящено большое число как оригинальных, так и обзорных работ (см., например, уже упоминавшийся обзор Берри [5] и цитируемые там работы). Поэтому мы ограничимся рассмотрением простейшего случая фазовых сингулярностей, поскольку развитый подход потребуется нам позже для анализа сингулярностей поля вектора Пойнтинга.

Рассмотрение опять начнем с ГО. До сих пор в ГО нас интересовала только трассировка лучей. Теперь мы рассмотрим ГО как определенное приближение при решении уравнений Максвелла. При этом для простоты сразу ограничимся рассмотре-

<sup>3</sup> Во избежание недоразумений следует еще раз подчеркнуть, что часто существенную роль в уменьшении характерного масштаба воздействия фотонных струй на материальные объекты играют сопровождающие это воздействие нелинейные процессы (нелинейное поглощение света, абляция и т.п.). Нелинейность приводит к эффективно-му «укрочению» пространственного профиля такого воздействия и, как следствие, к уменьшению его поперечных размеров. Обсуждение этих вопросов представляет самостоятельный интерес и здесь не проводится.

нием монохроматической волны. В случае, когда такая волна плоская, все компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют вид  $A_\nu \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ , где  $A_\nu$  обозначает любую из трех компонент любого из указанных полей, а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор в среде, в которой распространяется волна. Обобщая это выражение, будем искать решение уравнений Максвелла для монохроматической волны в виде [1, 38]

$$A_\nu(\mathbf{r})e^{i[\Psi(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (7)$$

где теперь  $A_\nu(\mathbf{r})$  — зависит от координат, а градиент фазы<sup>4</sup> имеет смысл локального волнового вектора:  $\nabla\Psi = \mathbf{k}(\mathbf{r})$ .

В ГО предполагается, что функции  $A_\nu(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  — медленные, т.е. что они мало меняются на масштабах порядка локальной длины волны излучения ( $\sim 1/|\mathbf{k}|$ ), что приводит к определенным неравенствам, ограничивающим область применимости данного приближения [1, 38]. Мы не будем их здесь выписывать, поскольку нас интересует только структура решения, при которой все компоненты полей имеют одну и ту же, общую для всех фазу. Это требование более мягкое, чем условия применимости ГО, т.к. структура решения часто следует из симметрии задачи и не связана с применимостью каких-либо приближений.

Заметим теперь, что комплексную величину можно задать двумя эквивалентными способами: либо в виде ее действительной и мнимой частей, либо в виде модуля и фазы. Задавая модуль и фазу, мы с помощью формул Эйлера однозначно фиксируем действительную и мнимую части. В обратном случае, задавая действительную и мнимую части, мы однозначно фиксируем только модуль. Что же касается фазы, то она фиксируется с точностью до произвольного целого кратного  $2\pi$ . Но и здесь есть исключение: случай, когда комплексная величина обращается в ноль. В этом случае ее модуль равен нулю, а вот фаза остается неопределенной. Из сказанного следует, что окрестности точек, в которых в соотношении (7) все компоненты какого-либо из полей обращаются в ноль, заслуживают более пристального внимания. Рассмотрим такую ситуацию подробнее.

Пусть для определенности это будет поле  $\mathbf{E}$ . Кроме того, будем предполагать, что задача обладает непрерывной трансляционной симметрией вдоль оси  $z$ , так что зависимость от этой координаты исчезает и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y)$ . Это, однако, не исключает наличие у  $\mathbf{E}$  трех ненулевых компонент, так что неправильно было бы называть такую задачу двумерной. Рассмотрим зависимость какой-либо одной из компонент поля  $\mathbf{E}$  от координат в окрестности точки обнуления вектора  $\mathbf{E}$ . Возьмем, например,  $E_x$ . Поскольку точка обнуления не выделена ничем, кроме

того, что в этой точке  $\mathbf{E} = 0$ , то в случае общего положения компоненты  $\mathbf{E}$  в этой точке должны быть разложимы в ряд Тейлора по степеням отклонения координат от этой точки, и разложение начинается с линейных членов. Помещая начало координат в точку обнуления, учитывая, что вектор  $\mathbf{E}$  комплексный, и отбрасывая высшие члены разложения, получаем, что

$$E_x \approx ax + by + i(cx + dy), \quad (8)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — константы, равные значению соответствующих производных в точке разложения. Аналогично выглядят разложения других компонент вектора  $\mathbf{E}$ . Заметим, что, согласно уравнениям Максвелла,  $\mathbf{H}$  пропорционален ротору вектора  $\mathbf{E}$ . Поскольку компоненты ротора строятся из первых производных соответствующего вектора, то отсюда и из соотношения (8) следует, что в точке обнуления вектора  $\mathbf{E}$  вектор  $\mathbf{H}$  есть константа, вообще говоря, не равная нулю. Аналогичное утверждение справедливо для вектора  $\mathbf{E}$  в точке обнуления вектора  $\mathbf{H}$ . Таким образом, обнуление одного из полей не предполагает обязательное обнуление другого, хотя, в принципе, такое обнуление и допускается.

Более того, из ненулевого значения ротора векторного поля в точке обнуления последнего и теоремы Стокса следует, что для такого поля отличен от нуля криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру, охватывающему эту точку и имеющему малые характерные поперечные размеры. Это указывает на то, что точка обнуления является сингулярностью с ненулевым топологическим зарядом. Следует подчеркнуть что этот вывод основывается только на разложении (8) и уравнениях Максвелла. Он не использует предположение о форме решений этих уравнений и поэтому имеет значительно большую общность чем рассуждения, основанные на представлении решений уравнений Максвелла в форме (7).

Казалось бы, мы пришли к противоречию. Мы начали с регулярности поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в точке обнуления, а пришли к выводу о том, что там находится сингулярность. Чтобы разобраться с этим вопросом, обратимся к обсуждаемому примеру решений в виде (8). Это выражение приводит к следующей координатной зависимости фазы в окрестности точки обнуления  $\mathbf{E}$ :

$$\Psi \approx \arctg\left(\frac{cx + dy}{ax + by}\right). \quad (9)$$

При этом в силу предположения об одинаковости  $\Psi(\mathbf{r})$  для всех компонент поля выражение (9) справедливо и для фаз компонент  $E_{y,z}$ . Причем справедливо буквально, т.е. с теми же значениями констант  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Вычисление  $\nabla\Psi$  дает в этом случае значение локального волнового числа, равное

$$k \approx \left| \frac{(bc - ad)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2(a^2 + c^2) + 2xy(ab + cd) + y^2(b^2 + d^2)} \right|. \quad (10)$$

<sup>4</sup> Помимо фазы  $\Psi$ , в ГО часто вводится величина  $\psi$ , называемая эйконалом, которая связана с  $\Psi$  соотношением  $\Psi = \frac{\omega}{c}\psi$ .



В выражении (10) числитель имеет первый порядок малости по  $x$  и  $y$ , а знаменатель — второй. Поэтому при приближении точки наблюдения к началу координат, когда  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ , величина  $k$  расходится. Расходимость локального волнового числа означает наличие в данном поле пространственных осцилляций с периодом, стремящимся к нулю при приближении к началу координат. С другой стороны, мы начали с предположения, что поле в окрестности начала координат представимо в виде разложения (8), являющегося линейной функцией координат и вообще *не содержащее никаких осцилляций!* Может быть, указанные осцилляции — это математический артефакт, не имеющий отношения к реально существующей структуре поля?

Чтобы понять, в чем тут дело, обратимся к выражению (9). Легко видеть, что семейство линий постоянной фазы  $\Psi(x, y) = \Psi_0 = \text{const}$  в этом выражении представляют собой веер прямых линий, исходящий из центра координат и покрывающий все пространство. Градиент скалярной функции ориентирован перпендикулярно линиям ее постоянного значения. В нашем случае отсюда следует, что вектор  $\mathbf{k}$  перпендикулярен этим прямым и при обходе начала координат по замкнутой кривой совершает полный оборот. При этом фаза вектора  $\mathbf{E}$  приобретает фазовый сдвиг  $\pm 2\pi$  (конкретный знак определяется соотношением между коэффициентами  $a, b, c, d$ ). Чем меньше масштаб контура обхода, тем меньший путь требуется пройти, чтобы получить полный оборот вектора  $\mathbf{k}$ , тем быстрее меняется фаза, т.е. тем больше ее градиент, а значит, и модуль  $|\mathbf{k}|$ . Это и есть те пространственные осцилляции, которые мы получили выше.

Подчеркнем, что пока все рассуждения относятся только к фазе поля вектора  $\mathbf{E}$  и его локальному волновому вектору. Фаза световой волны может быть измерена (по крайней мере, в принципе) по интерференционной картине опорного пучка, фаза которого известна, с нашим сингулярным волновым полем. Тем не менее хотелось бы понять, как ведет себя сам вектор  $\mathbf{E}$ . Для этого заметим, что в силу сохранения топологического заряда вывод об изменении фазы  $\Psi$  на  $\pm 2\pi$  при обходе сингулярности по замкнутому контуру остается справедливым не только для контура, лежащего в непосредственной окрестности сингулярности, но и для контура *любого размера* до тех пор, пока он не охватывает другие сингулярности. Но, как уже обсуждалось выше, на достаточном удалении от сингулярности восстанавливается применимость ГО, даже если в ее непосредственной окрестности ГО неприменима. Применимость ГО гарантирует, что в выражении (7) амплитуды  $A_\nu(x, y)$  — медленные функции координат. В этом случае в уравнении  $\text{div} \mathbf{E} = 0$  в главном приближении  $\text{div} \mathbf{E} \approx \mathbf{E} \nabla \Psi = \mathbf{E} \mathbf{k}$ , т.е. вектор  $\mathbf{E}$  ортогонален вектору  $\mathbf{k}$ , а электромагнитная волна полностью поперечна. Отсюда немедленно следует, что, если обход по замкнутому контуру приводит к повороту вектора  $\mathbf{k}$  на  $\pm 2\pi$ , то же самое происходит и с вектором  $\mathbf{E}$ . Повторяя в обратном поряд-

ке рассуждения о сохранении топологического заряда, приходим к выводу, что это свойство вектора  $\mathbf{E}$  сохраняется и в малой окрестности сингулярной точки, даже если в этой области нарушается приближение ГО, а электромагнитная волна приобретает продольную компоненту. Такая сингулярность называется *оптическим вихрем*.

Таким образом, рассмотренная нами фазовая сингулярность связана с векторной природой полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и проявляется в быстром «проворачивании» соответствующего вектора вокруг особой точки, а вовсе не в быстрых протранственных колебаниях каждой из его компонент. Последние только меняют знак при переходе через сингулярность.

Может показаться, что из выражения (7) следует, что, поскольку фаза всех компонент вектора  $\mathbf{E}$  одинакова и их отношение не зависит от  $\Psi$ , то изменение  $\Psi$  меняет только соотношение между действительной и мнимой частью каждой из компонент, но не ориентацию вектора  $\mathbf{E}$  в пространстве. Это противоречит только что сделанному утверждению. Для понимания того, где скрыта ошибка, заметим следующее. Во-первых, нужно определить, *что* понимать под направлением комплексного вектора, т.к. направления  $\text{Re} \mathbf{E}$  и  $\text{Im} \mathbf{E}$ , вообще говоря, различны. Поскольку комплексность входящих в уравнения Максвелла полей введена исключительно для удобства расчетов, а реальные физические поля действительны, примем за направление вектора  $\mathbf{E}$  направление его действительной части. Во-вторых, в силу комплексности амплитуд  $A_\nu$  в выражении (7) в окрестности сингулярности компоненты вектора  $\mathbf{E}$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E_\nu &= |E_\nu| \exp[i(\Psi(x, y, z) + \Psi_\nu^{(0)})], \\ \Psi_\nu^{(0)} &= \text{const}; \quad \nu = x, y, z. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь функция  $\Psi(x, y, z)$  одна и та же для всех компонент, а вот постоянные  $\Psi_\nu^{(0)}$  отличаются друг от друга<sup>5</sup>. Это нарушает пропорциональное изменение различных компонент вектора  $\text{Re} \mathbf{E}$  при изменении  $\Psi$  и обеспечивает его вращение вокруг сингулярности при ее обходе.

Отметим, что резкие изменения фазы на  $2\pi$  при обходе точки, в которой модуль комплексной функции обращается в ноль, хорошо известны и в других разделах физики, где они также играют существенную роль. Спектр таких разделов простирается от сверхпроводимости до образования структур в макроскопических неравновесных системах [80–83] — пример того, что физика едина и далекие друг от друга явления, казалось бы, не имеющие между собой ничего общего, описываются одними и теми же закономерностями.

<sup>5</sup> Отметим, что вопрос о разделении вкладов, которые вносит в полную фазу функция  $\Psi(x, y, z)$  и  $\Psi_\nu^{(0)}$ , не вполне тривиальный. Фактически он сводится к лежащему в основе приближения ГО представлению полей в виде (7), см. подробнее, например, [34, 38].



Сделаем еще одно важное замечание. Обсуждавшееся образование оптического вихря в точке обнуления одного из электромагнитных полей существенно связано с возможностью описания всех компонент этих полей одной единственной фазой. Если такое описание невозможно, то к таким полям приведенные выше аргументы неприменимы. Например, при интерференции двух монохроматических плоских линейно поляризованных волн с одинаковой поляризацией и равной амплитудой, распространяющихся навстречу друг другу, образуется стоячая волна. В ее узлах соответствующие поля обнуляются. Однако это не приводит к образованию оптических вихрей, т.к. в этом случае поле представляется в виде суммы слагаемых, для которых фазы  $\Psi$  отличаются знаком, и его описание выражением (7) невозможно. Что же касается обсуждавшихся пространственных осцилляций с волновыми числами, значительно превышающими те, что входят в спектр Фурье соответствующего поля, то они получили название *суперосцилляций* [18, 84–86] и встречаются в широком круге оптических явлений (см., например [18] и цитируемую там литературу). Особо подчеркнем, что суперосцилляции — это не только красивое, но и весьма практически важное явление. В настоящее время они уже широко используются, например, в субволновой микроскопии [12, 13, 16].

Рассмотрим теперь влияние фазовых сингулярностей на проявление дифракционного предела. До сих пор мы обсуждали дифракционный предел в связи с фокусировкой оптического излучения, что молчаливо предполагает увеличение интенсивности света. В фазовых сингулярностях по крайней мере одно из полей (либо  $\mathbf{E}$ , либо  $\mathbf{H}$ ) обнуляется, а фаза обнуленного поля не определена. Кроме того, поскольку вектор Пойнтинга пропорционален векторному произведению полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , обнуление любого из этих полей ведет к обнулению вектора Пойнтинга (т.е. интенсивности излучения) в этой точке. Как все это сказывается на дифракционном пределе?

Опять воспользуемся принципом неопределенности Гейзенберга, но сейчас применим его для энергии световой волны:  $\Delta U \Delta t \sim \hbar$ . Что касается энергии, то очевидно, что  $U = N\hbar\omega$ , где  $N$  — число фотонов. Входящее же в соотношение неопределенности  $\Delta t$  есть время жизни данного квантового состояния. С учетом временного множителя выражение для полной фазы в приближении ГО имеет вид  $\Psi = \omega t$ . Поэтому время жизни можно оценить как  $\Psi/\omega$ . Собирая все вместе, получаем, что в рассматриваемом случае принцип неопределенности приобретает вид  $\Delta N \Delta \Psi \sim 1$ . Поскольку в точке сингулярности фазы она не определена, т.е. имеет бесконечную неопределенность, то отсюда следует, что число фотонов в этой точке равно нулю. Сопоставляя это утверждение с приведенными выше рассуждениями о наличии сингулярности фазы в точке обращения в ноль амплитуды одного из электромагнитных полей, приходим к выводу в справедливости

и обратного утверждения: наличие фазовой сингулярности приводит к обнулению интенсивности излучения в этой точке.

Далее, как это обычно делается в квантовой механике, предполагая, что  $\Delta N \sim N$ , а  $\Delta \Psi \sim \Psi$ , получаем, что  $\Psi \sim 1/N$ . Отсюда вытекает следующая оценка локального волнового числа:  $k \equiv |\nabla \Psi| \sim |\nabla N|/N^2 \sim 1/(LN)$ , где  $L$  — характерный пространственный масштаб профиля  $N(\mathbf{r})$ . Эта оценка объясняет расходимость  $k$  в областях «темного света», где  $N \rightarrow 0$ .

Отметим также, что в окрестности фазовой сингулярности характерный пространственный масштаб поля определяется величиной  $1/k$ . Расходимость  $k$  означает, что при приближении к сингулярной точке этот масштаб стремится к нулю, что, как следует из предыдущего параграфа, *не нарушает дифракционный предел*. Это позволяет создавать оптические вихри существенно субволнового размера [21, 87–95].

Естественные вопросы, которые возникают после приведенного выше обсуждения: как все это сказывается на потоке энергии (поле вектора Пойнтинга) в окрестности таких сингулярностей и существуют ли в этом поле сингулярности, не связанные с обнулением полей  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ ? Выяснению ответов на эти вопросы посвящен следующий раздел обзора.

## 5. СИНГУЛЯРНОСТИ ПОЛЯ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА

### Вводные замечания

Поле вектора Пойнтинга описывает перенос энергии электромагнитной волной, а дивергенция этого поля определяет плотность диссипации электромагнитной энергии в веществе. По этой причине знание структуры поля вектора Пойнтинга представляет первостепенную важность как с академической точки зрения, так и с точки зрения многочисленных приложений, в особенности связанных с медициной, биологией, а также обработкой и записью информации, где управляемое во времени и пространстве энерговыделение играет принципиальную роль. Некоторые из них (лазерная очистка поверхностей, создание метаматериалов с уникальными, не существующими у природных аналогов свойствами и др.) уже упоминались выше. Среди прочих можно указать нанохимию живых клеток и отдельных хромосом [96, 97]. Точный контроль плотности электромагнитной энергии на субволновых масштабах важен при изготовлении современных оптоэлектронных микро- и наноустройств [98]. Другие примеры использования структурирования поля вектора Пойнтинга в различных нанотехнологиях можно найти, например, в справочнике [99]. Отметим также, что тип и положение сингулярностей поля вектора Пойнтинга влияет на локализацию точки приложения углово-

го момента пондеромоторных сил [100], что может быть использовано при создании оптических ловушек и пинцетов. Этот список легко продолжить.

Отметим также, что поле вектора Пойнтинга не входит в уравнения Максвелла и непосредственно ими не определяется. Оно *вычисляется* по известному профилю полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Прямое измерение этого поля хотя и возможно, но соответствующие эксперименты представляют собой непростую задачу [101]. В такой ситуации на первый план выходят теоретические исследования, в частности изучение сингулярных точек поля вектора Пойнтинга, так как именно тип и пространственное расположение сингулярностей векторного поля в значительной степени определяют его глобальную топологическую структуру. Обсуждению этих вопросов и посвящен настоящий раздел. Однако прежде чем переходить к такому обсуждению, сделаем несколько важных общих замечаний.

Мы будем использовать стандартное определение вектора Пойнтинга как действительной величины, которая для монохроматической волны после усреднения по периоду временных осцилляций поля задается соотношением

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi}([\mathbf{E}^*\mathbf{H}] + [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]), \quad (12)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В ряде случаев также имеет смысл вводить комплексный вектор Пойнтинга  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}]$ , мнимая часть которого описывает осциллирующий поток запасенной энергии [102]. Эта величина играет важную роль в некоторых задачах взаимодействия света с веществом [103–109]. В большинстве случаев обсуждаемые ниже результаты, полученные для действительного  $\mathbf{S}$ , легко обобщаются на случай комплексного  $\hat{\mathbf{S}}$ .

Поле вектора Пойнтинга будем описывать силовыми линиями, которые по аналогии с гидродинамикой будем также называть *линиями тока*. По определению силовых линий векторного поля, в каждой точке такой линии вектор  $\mathbf{S}$  должен быть к ней касателен. Уравнения силовых линий удобно задавать в параметрической форме:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Тогда каждую такую линию можно рассматривать как траекторию движения в пространстве виртуальной материальной точки. При этом  $t$  будет играть роль «времени».

Мы взяли слово «время» в кавычки, чтобы подчеркнуть, что это — всего лишь параметр, никакого отношения к реальной динамике переноса потока энергии вдоль линий тока не имеющий. Однако трактовка линии тока как некоторой траектории оказывается весьма полезной, т.к. сразу позволяет написать уравнение, описывающее форму этой траектории. Действительно, при движении материальной точки по траектории ее скорость в каждой точке направлена по касательной к этой траектории. Отсюда сразу следует, что вектор  $\mathbf{S}$  пропорционален  $d\mathbf{r}/dt$ , а поскольку параметр  $t$  еще не определен, коэффициент пропорциональности в этом соотношении всегда можно обратить в единицу за счет

надлежащего масштабного преобразования  $t$ . В результате получаем, что линии тока поля вектора Пойнтинга описываются уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{r}). \quad (13)$$

В этом случае для сингулярностей поля вектора Пойнтинга применима обычная классификация Пуанкаре, в которой сингулярность (особая точка) является точкой пересечения нуль-изоклин  $S_{x,y,z}(\mathbf{r}) = 0$ , а ее тип определяется корнями характеристического уравнения [110], см. также ниже. Такая классификация хорошо известна (см., например, работу [111]). При этом, согласно формуле (12), поле вектора Пойнтинга наследует все особенности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В частности, нули каждого из этих полей одновременно являются нулями поля вектора Пойнтинга, т.е. удовлетворяют условию  $S_{x,y,z}(\mathbf{r}) = 0$ , а значит, являются сингулярностями линий тока этого поля. Согласно сложившейся терминологии, такие особенности будем называть *сингулярностями полевого типа*, в частности  $E$ -типа для особенностей, связанных с обнулением электрического поля, и  $H$ -типа при обнулении магнитного поля.

Однако ситуация этим не исчерпывается. Как известно, в стоячей волне усредненный по периоду временных осцилляций поля поток энергии отсутствует не только в узлах волны, но и также и в областях, где ни одно из полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не обнуляется. В соответствии с этим возможно образование сингулярностей поля  $\mathbf{S}$  в точках, в которых ни одно из полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не равно нулю. Такие особенности будем называть *поляризационными*.

При этом, несмотря на интенсивное изучение особенностей поля вектора Пойнтинга (см. например, работы [21, 22, 90–92, 101, 112–114] и цитированную в них литературу), до сих пор недостаточно внимания уделялось тому факту, что это поле должно удовлетворять закону сохранения энергии и ограничениям, накладываемым симметрией задачи. Данные условия приводят к существенному снижению «числа степеней свободы» задачи о сингулярностях поля вектора Пойнтинга по сравнению с ситуацией, справедливой для векторного поля, не имеющего таких ограничений. Частично этот пробел был восполнен в недавних работах [115–118], которые кратко будут обсуждаться ниже, но в целом задача еще далека от своего завершения.

Наконец, коснемся важного вопроса о характерном пространственном масштабе сингулярностей. Поскольку по мере приближения к сингулярной точке характерный масштаб задачи, как правило, стремится к нулю (см. выше обсуждение суперосцилляций), имеет смысл, как это уже отмечалось во Введении, говорить только о верхней границе, определяющей область, внутри которой структура поля преимущественно определяется данной сингулярностью. В этом смысле существует качественное отличие между традиционными сингулярностями, возникающими в спекл-структурах [119], па-

раксиальных пучках [120] и т.п., от сингулярностей, возникающих при резонансном рассеянии света нанообъектами [21]. Если в первом классе задач возникновение сингулярностей обычно обусловлено свойствами падающего лазерного пучка, и верхний масштаб особенности оказывается не меньше (а зачастую и значительно больше) длины волны падающего излучения, то во втором — сингулярности возникают спонтанно и существуют даже при рассеянии линейно поляризованной плоской волны, не имеющей никаких особенностей. При этом характерный масштаб области, в которой структура поля преимущественно определяется данной сингулярностью, *существенно меньше* длины волны падающего излучения.

Отметим также, что во многих случаях пространственная конфигурация падающего электромагнитного излучения ограничена снизу масштабами порядка длины волны этого излучения. На меньших масштабах такую волну можно рассматривать как локально плоскую. Это значительно расширяет область применимости результатов исследования задачи о субволновых сингулярностях при рассеянии плоской волны.

Физические основы для существования субволновых сингулярностей при рассеянии света наночастицами уже обсуждались выше: при таком рассеянии длина волны излучения перестает играть роль характерного масштаба задачи. Единственным масштабом в этом случае является размер рассеивающего объекта, который и проявляется в структуре ближнего поля и, в частности, в масштабе сингулярностей. Подчеркнем, что такие субволновые сингулярности оказываются весьма важными для приложений, т.к. позволяют использовать возникающую структуру электромагнитного поля для воздействия на материальные объекты со сверхвысоким пространственным разрешением, а также изучать различные квантовые эффекты [12–16, 121–123].

### Симметрия, закон сохранения энергии, инвариантные плоскости и двумерные структуры

Описание сингулярностей поля вектора Пойнтинга основывается на предположении, которое уже использовалось нами ранее при обсуждении сингулярностей фазы полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ : в сингулярной точке компоненты полей обращаются в ноль, но при этом остаются регулярными функциями, разложимыми в ряд Тейлора по малым отклонениям координат от этой точки. Все остальное — дело техники. Выбирая сингулярность в качестве начала локальной системы координат; разлагая  $S_{x,y,z}(x, y, z)$  в такие ряды, ограничиваясь линейными членами; учитывая, что в силу симметрии задачи (если таковая имеется) некоторые коэффициенты разложения могут тождественно обнуляться, а оставшиеся могут обладать определенными свойствами по

отношению к замене знака координат; дополняя это законом сохранения энергии, согласно которому  $-\operatorname{div}\mathbf{S} = Q$ , где  $Q$  — плотность диссипируемой электромагнитной энергии, можно не только провести полную классификацию особых точек, но и построить полную бифуркационную картину их рождения, движения и аннигиляции, возникающую при изменении различных параметров задачи. Детальное обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящего обзора, поэтому ниже мы приведем только основные результаты и несколько характерных примеров, отсылая заинтересованных в деталях читателей к оригинальным работам [115–118].

Типичным примером такого рода задач является структура поля при рассеянии сферой плоской линейно поляризованной волны, изучавшаяся еще в работах [21, 90, 91]. На рис. 10 изображена такая структура в экваториальной плоскости рассеивающей сферы. Для данного значения параметра размера  $q = kR$  выбранное значение диэлектрической проницаемости соответствует окрестности электрического дипольного резонанса. Точный резонанс достигается при  $\varepsilon = -2.2229\dots$

Для определения электромагнитного типа сингулярностей линии тока вектора Пойнтинга наложены на профили полей  $|\mathbf{E}|^2$  и  $|\mathbf{H}|^2$ , изображенных в логарифмическом масштабе. Видно, что фокусы соответствуют полевым сингулярностям  $H$ -типа, а седла — поляризационным сингулярностям. Это является общим свойством задачи и имеет простое объяснение. Действительно, поляризационные сингулярности связаны с образованием стоячих волн, которые представляют собой две бегущие волны равной амплитуды, распространяющиеся навстречу друг другу. Это предполагает наличие в задаче выделенных направлений. Для фокусов такие направления отсутствуют, поэтому для них поляризационный тип сингулярностей оказывается невозможен. Напротив, седла имеют выделенные направления, совпадающие с их усами сепаратрис.

Строго говоря, данное утверждение применимо только к двумерным полевым структурам. В трех измерениях двумерный фокус может иметь третий корень характеристического уравнения чисто действительным (особенность типа седло-фокус). В таком случае образование стоячей волны возможно по направлению, определяемому собственным вектором, соответствующему этому корню. Некоторые аспекты полевых сингулярностей в трехмерном пространстве мы обсудим ниже, но в целом эта область изучена еще далеко не полностью. Важно подчеркнуть, что, как уже отмечалось, в рассматриваемой задаче характерный размер полевых структур много меньше длины волны излучения. Разумеется, это относится и к обсуждаемым стоячим волнам, которые реализуются только в существенно субволновой окрестности особой точки.

Далее, в ситуации, изображенной на рис. 10, из симметрии задачи следует, что плоскость рисунка является инвариантной плоскостью — линии тока, лежащие в этой плоскости, не выходят из нее. Это



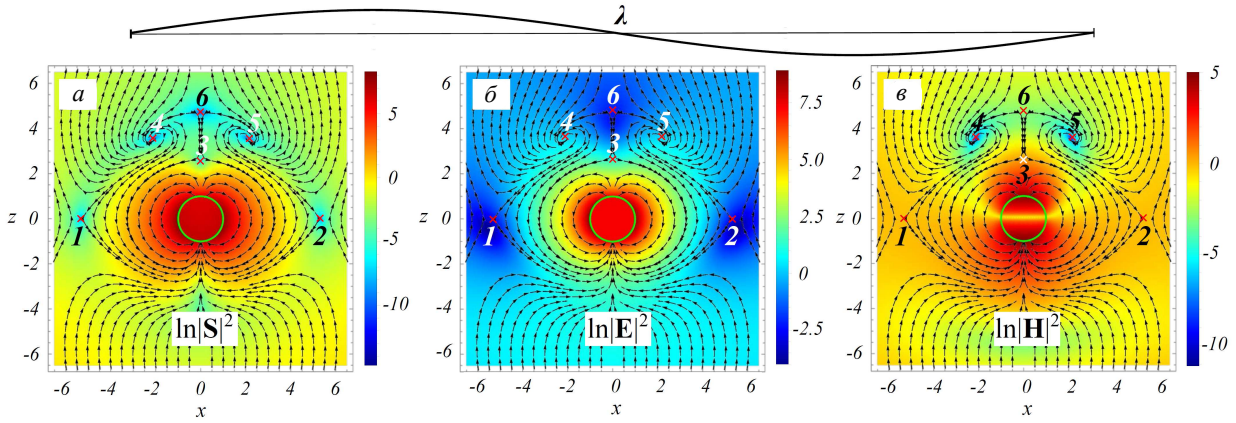


Рис. 10. Линии тока поля вектора Пойнтинга, а также значения логарифма квадрата модуля вектора Пойнтинга (а), электрического (б) и магнитного (в) полей (показаны цветом) в инвариантной плоскости  $xz$ , рассчитанные с помощью уравнения (13) на основании точного аналитического решения уравнений Максвелла (решение Ми). Координаты  $x$  и  $z$  нормированы на радиус сферы  $R$ . Все поля нормированы на соответствующие значения в падающей волне. Плоскость поляризации совпадает с плоскостью рисунка. Волновой вектор  $\mathbf{k}$  падающего излучения параллелен оси  $z$ . Параметр размера  $q = 0.3$ ;  $\varepsilon = -2.17$ . Поверхность сферы изображена сплошной зеленой линией. Из симметрии задачи следует, что структуры всех полей симметричны относительно плоскости  $x = 0$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Крестики (x) отмечают положение особых точек поля вектора Пойнтинга. Точки 4 и 5 — фокусы, остальные сингулярности — седла;  $|\mathbf{S}|^2 = 0$  во всех особых точках. Характерный масштаб структуры полей значительно меньше длины волны излучения, размер которой для сравнения изображен в верхней части рисунка в том же масштабе [115, 117]. Подробности в тексте

означает, что в плоскости рисунка поле  $\mathbf{E}$  имеет только две компоненты, отличные от тождественного нуля:  $E_{x,z}$ , которые зависят только от двух переменных  $x$  и  $z$ . В таком случае поле  $\mathbf{H}$ , которое, согласно уравнениям Максвелла, пропорционально ротору  $\mathbf{E}$ , имеет единственную отличную от тождественного нуля компоненту, ориентированную перпендикулярно плоскости рисунка и зависящую от тех же двух переменных.

Вспомним теперь, что входящие в формулу (12)  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  комплексны, поэтому для обнуления  $\mathbf{S}$  в полевой сингулярности требуется обращение в ноль как действительной, так и мнимой частей соответствующего поля. При этом координаты полевой сингулярности на плоскости  $xz$  определяются в результате решения соответствующей системы уравнений. Требование обнуления поля  $\mathbf{E}$  приводит к четырем уравнениям:  $\text{Re}E_{x,z}(x, z) = 0$ ,  $\text{Im}E_{x,z}(x, z) = 0$ , для двух координат  $x$  и  $z$ . В общем случае такая система переопределена и решений не имеет. Исключение составляют ситуации, когда одна из компонент поля  $\mathbf{E}$  тождественно обнуляется в силу симметрии задачи. Например, в случае, изображенном на рис. 10, в силу зеркальной симметрии структуры относительно оси  $z$  для любой точки, принадлежащей этой оси,  $E_x$  тождественно равно нулю. Однако в этом случае координата  $x$  оказывается фиксирована условием  $x = 0$ . Мы получаем два уравнения  $\text{Re}E_z(0, z) = 0$ ,  $\text{Im}E_z(0, z) = 0$  для единственной оставшейся координаты  $z$ , что опять приводит к переопределенной системе уравнений, не имеющей решений.

Если же потребовать обнуления в полевой син-

гулярности поля  $\mathbf{H}(x, z)$ , имеющего единственную отличную от тождественного нуля компоненту, то никаких сложностей такого рода не возникает. Требование обнуления приводит к двум уравнениям для двух переменных:  $\text{Re}H_y(x, z) = 0$ ,  $\text{Im}H_y(x, z) = 0$ , решение которых и определяет положение особой точки.

Приведенные рассуждения являются весьма общими. Они справедливы в любой ситуации, когда симметрия задачи приводит к возникновению для линий тока инвариантной плоскости. При этом если в инвариантной плоскости лежит поле  $\mathbf{E}$ , то в полевой сингулярности обнуляется поле  $\mathbf{H}$ , а если поле  $\mathbf{H}$ , то обнуляется поле  $\mathbf{E}$ .

Обсудим еще некоторые интересные топологические особенности поля вектора Пойнтинга, представленного на рис. 10, а. На рисунке видно, что линии тока, заключенные внутри двух петель сепаратрис, выходящих из седла 3 по его неустойчивым усам, огибающих рассеивающую сферу и возвращающихся в это же седло по его устойчивым усам, не связаны с внешним пространством. Это означает, что энергия электромагнитного поля циркулирует вдоль этих линий, будучи заперта в конечной области пространства. Поскольку до того, как сфера стала облучаться падающей электромагнитной волной, поле там отсутствовало, это порождает естественный вопрос о том, как оно там появилось. Единственный возможный ответ на него состоит в том, что на начальной стадии облучения, когда процесс рассеяния носил нестационарный характер, топологическая структура поля была другой. Численные расчеты подтверждают этот



вывод. Они показывают, что на нестационарной стадии процесса рассеяния топологическая структура поля, как вне, так и внутри рассеивающей частицы, испытывает качественные изменения, связанные с рождением и пространственным перемещением различных сингулярностей [124]. Однако исследования этой проблемы находятся в самой начальной стадии, многие ее важные аспекты еще не раскрыты, а соответствующие вопросы даже не сформулированы.

Еще одно важное замечание касается фокусов, обозначенных на рис. 10, *a* цифрами 4 и 5. Видно, что оба фокуса неустойчивые — линии тока выходят из них, т.е. энергия непрерывно вытекает из этих сингулярностей. С другой стороны, представленная картина линий тока стационарна. Поэтому, в силу закона сохранения энергии, поток энергии, вытекающий из фокусов, должен компенсироваться ее притоком по каким-то другим направлениям. Ясно, что эти «другие» направления должны быть трансверсальны инвариантной плоскости. Именно так и происходит. В силу трёхмерности задачи, помимо двух собственных векторов, лежащих в инвариантной плоскости, каждая из изображенных на рис. 10, *a* сингулярностей имеет третий собственный вектор, этой плоскости перпендикулярный. Анализ, проведенный с учетом отмеченных выше ограничений, налагаемых симметрией и законом сохранения энергии, показывает, что корень характеристического уравнения, отвечающий этому третьему вектору, всегда чисто действительный. При этом для неустойчивого двумерного фокуса соответствующее направление в перпендикулярной плоскости устойчиво, а для устойчивого — неустойчиво. Поэтому поток энергии, исходящий из фокусов 4, 5 в направлениях, близких к инвариантной плоскости, компенсируется притоком энергии вдоль направлений, близких к перпендикуляру к этой плоскости.

Если бы задача была двумерной, то существование фокусов в недиссипативной среде было бы запрещено именно потому, что противоречило бы закону сохранения энергии. Такая ситуация возникает при облучении бесконечного кругового цилиндра линейно поляризованной плоской волной, волновой вектор которой перпендикулярен оси цилиндра (нормальное падение), а плоскость поляризации либо перпендикулярна этой оси (так называемая ТЕ-поляризация), либо ось цилиндра лежит в плоскости поляризации (ТМ-поляризация). В этих случаях при отсутствии диссипации возможны только особые точки типа центр или седло [115].

В случае рассеяния света частицей, материал которой поглощает падающее излучение, течение энергии вдоль силовых линий поля вектора Пойнтинга сопровождается ее диссипацией. Поэтому существование замкнутых петель силовых линий, которые хотя бы частично проходили внутри рассеивающей частицы, становится невозможным. Действительно, предположим, что замкнутая петля существует. Такая линия тока не име-

ет связи с внешним миром, и энергия в нее не поступает. Тогда как диссипация идет и электромагнитная энергия непрерывно переходит в тепло. При отсутствии внешней компенсации таких потерь это невозможно.

В частности, все сингулярности типа центр внутри частицы превращаются в фокусы. Подчеркнем, что речь идет именно о сингулярностях, находящихся внутри рассеивающей частицы. Как отмечалось во Введении, окружающая частицу среда предполагается недиссипативной, поэтому там остаются в силе все отмеченные выше ограничения, справедливые для недиссипативных веществ.

Отметим также, что наличие диссипации нарушает существующую в недиссипативных средах симметрию между полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и, как следствие этого, — между полевыми сингулярностями  $E$ - и  $H$ -типа. Дело в том, что при поглощении электромагнитного излучения средой плотность диссипированной мощности пропорциональна сумме  $\varepsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2$  [1], где двумя штрихами обозначены мнимые части соответствующих величин. Однако на оптических частотах магнитная проницаемость  $\mu$  чисто действительна и равна единице [1]. Поэтому член с магнитным полем обнуляется и диссипативные процессы становятся связанными только с электрическим полем. В результате если в сингулярностях  $H$ -типа, в центре которых электрическое поле не равно нулю, наличие диссипации трансформирует особые точки типа центр в фокусы уже в линейном по отклонению координат от точки сингулярности приближении, для сингулярностей  $E$ -типа в самой сингулярной точке плотность диссипируемой мощности равна нулю и в линейном приближении тип сингулярности остается центром. В фокус он переходит только с учетом квадратичных поправок. Такие фокусы называются медленными. Они имеют существенно меньший шаг спирали и более быстрое уменьшение этого шага по мере приближения силовой линии к сингулярной точке, чем это присуще традиционному фокусу [116].

### Мягкое нарушение симметрии, трехмерные структуры, бифуркации

Итак, мы убедились что закон сохранения энергии и симметрия задачи играют существенную роль в формировании сингулярностей поля вектора Пойнтинга и налагают определенные ограничения на их тип и свойства. Естественный вопрос, возникающий в этой связи: «Что будет, если некоторые из этих ограничений снимаются?» Разумеется, мы не можем отменить закон сохранения энергии. Не то с симметрией. Существует множество способов ее нарушить. При этом наибольший интерес представляет «мягкое» нарушение симметрии, когда в задаче имеется непрерывно изменяемый параметр, значение которого определяет степень нарушения симметрии. С этой целью в работе [118] исследовалась структура поля при рассеянии ли-

нейно поляризованной плоской волны бесконечным цилиндром кругового сечения, когда волновой вектор падающей волны по-прежнему был перпендикулярен оси цилиндра, но плоскость поляризации могла быть ориентирована произвольным образом, так что вектор  $\mathbf{E}$  составлял с осью цилиндра произвольный угол  $\alpha$ , см. рис. 11.

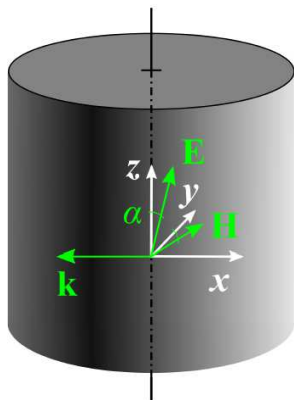


Рис. 11. Взаимная ориентация цилиндра, системы координат и векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  падающей волны;  $\alpha$  — угол между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{E}$ , равный углу между осью  $y$  и вектором  $\mathbf{H}$

В данной постановке в задаче сохранялась трансляционная симметрия вдоль оси цилиндра, зеркальная же симметрия относительно плоскости перпендикулярной оси цилиндра контролируемо нарушалась за счет изменения угла  $\alpha$ . В силу трансляционной симметрии, компоненты вектора Пойнтинга не могут зависеть от координаты  $z$ . Что же касается зависимости от  $x$  и  $y$ , то можно показать [118], что в такой задаче они удовлетворяют соотношениям:

$$(S_x(x, y), S_y(x, y), S_z(x, y)) = (S_x(x, -y), -S_y(x, -y), -S_z(x, -y)). \quad (14)$$

Важно, что при произвольном значении  $\alpha$  задача рассеяния допускает точное аналитическое решение [39], что значительно облегчает исследование возникающих сингулярностей. Такое исследование показывает, что изменение параметров задачи ( $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $q$ ) приводит к сложному сценарию последовательных бифуркаций рождения и аннигиляции особых точек. В окрестности точек бифуркаций удается построить феноменологическую теорию, основанную только на учете ограничений, накладываемых условием (14) и законом сохранения энергии на коэффициенты разложения компонент вектора Пойнтинга по малым отклонениям координат от определенных характерных точек. Предсказания бифуркационной картины, следующие из этой теории, идеально совпадают с результатами, получающимися при анализе точного решения задачи. Однако, по нашему мнению, подробное обсуждение деталей бифуркационной картины представляет интерес только для узких специалистов. Мы

не приводим его здесь, отсылая заинтересованного читателя к оригинальной работе [118].

Отметим только одно существенное отличие задачи с нарушенной симметрией от ее более симметричного аналога. Дело в том, что теперь все линии тока, за исключением линий, принадлежащих инвариантной плоскости  $y = 0$  (см. рис. 11), становятся трехмерными. В таком случае положение сингулярностей должно определяться точками пересечения трех поверхностей  $S_{x,y,z} = 0$ . В результате для определения координат сингулярностей получаются *три* уравнения для *двух* переменных  $x$  и  $y$ . Мы опять получаем переопределенную систему, не имеющую решений. Исключение составляют случаи, когда на некотором многообразии компоненты вектора Пойнтинга тождественно обнуляются в силу симметрии задачи. Из непрерывности координатной зависимости компонент поля вектора Пойнтинга и условия (14) следует, что  $S_y(x, 0) = S_z(x, 0) = 0$ . Иными словами, указанным многообразием является плоскость  $y = 0$ , в которой две компоненты вектора Пойнтинга тождественно равны нулю. Тогда условие, задающее положение сингулярности, сводится к единственному уравнению  $S_x(x, 0) = 0$ , которое уже может иметь решение, а может и *не* иметь — это определяется конкретным видом зависимости  $S_x(x, 0)$ . Так или иначе, но теперь сингулярности поля вектора Пойнтинга могут находиться только в плоскости  $y = 0$ . При этом, в силу непрерывной трансляционной симметрии вдоль оси  $z$ , сингулярности (если они есть) представляют собой не отдельные точки, а непрерывные линии, параллельные оси  $z$ .

Помимо обсуждавшейся выше трехмерной структуры поля вектора Пойнтинга, полезно бывает рассмотреть его двумерную проекцию на перпендикулярную оси цилиндра плоскость. Такая двумерная картина также может содержать особые точки. Однако следует иметь в виду, что если эти точки не принадлежат оси  $x$ , в трехмерном пространстве они являются регулярными, т.к. имеют ненулевое значение компоненты  $S_z$ . В работе [118] такие сингулярности назывались фиктивными (false).

Рис. 12 иллюстрирует сказанное. Заметим, что спиральная линия тока, изображенная на рис. 12, б, не обладает трансляционной симметрией вдоль оси  $z$ , что находится в видимом противоречии с исходными предположениями. В действительности никакого противоречия нет. Трансляционная симметрия задачи гарантирует, что  $\mathbf{S}(x, y, z+a) = \mathbf{S}(x, y, z)$  где  $a$  — произвольная константа надлежащей размерности. Это не обязательно означает, что любая линия тока таким преобразованием должна переходить сама в себя. Достаточно, чтобы преобразование трансляции переводило линию тока в *другую* линию тока, форма которой тождественна исходной. Линия, изображенная на рис. 12, б, как раз и удовлетворяет этому условию.

Отметим, что такие трехмерные спирали, наматывающиеся на некоторую (не обязательно прямую) линию или разматывающиеся с нее, являются

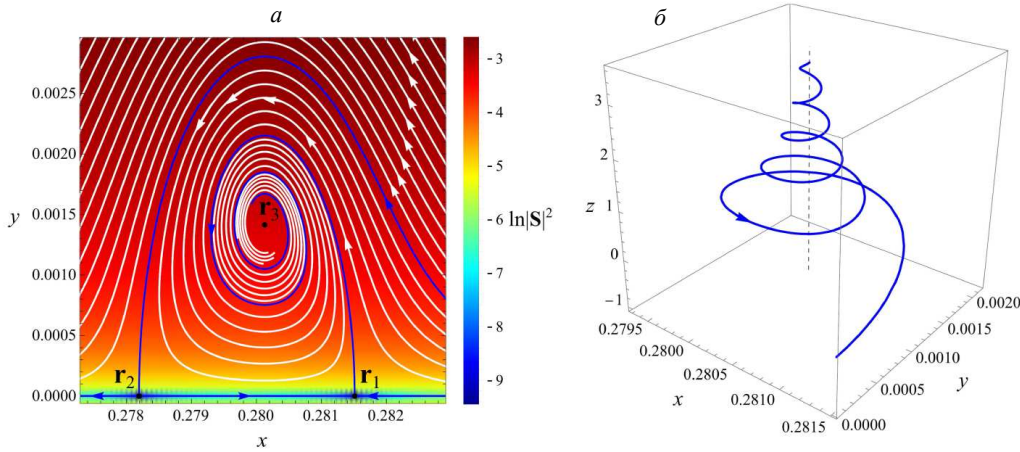


Рис. 12. Нормированное на интенсивность падающей волны поле вектора Пойнтинга внутри бесконечного кругового цилиндра, рассчитанное на основании точного решения уравнений Максвелла;  $\varepsilon = 17.775 + 0.024i$ , что соответствует диэлектрической проницаемости германия на длине волны 1590 нм [125];  $\alpha = 45.403^\circ$ . Пространственные координаты нормированы на радиус цилиндра  $R$ . *a* — Двумерная проекция поля на перпендикулярную оси цилиндра плоскость содержит три сингулярности, обозначенные черными точками: два седла ( $r_{1,2}$ ), лежащие на оси  $x$ , и устойчивый фокус ( $r_3$ ), который не принадлежит этой оси. В то же время в трехмерном пространстве седла  $r_{1,2}$  являются истинными сингулярностями, тогда как точка  $r_3$  становится регулярной. Это хорошо видно на панели *б*, где в трехмерном пространстве изображен отрезок уса сепаратрисы, выходящей из седла  $r_1$  и обматывающейся вокруг вертикальной прямой линии (показана пунктиром), чья проекция на плоскость  $xy$  соответствует точке  $r_3$  [118, 126]. Обратите внимание на разницу в масштабах осей на панели *б*

типичными структурами поля вектора Пойнтинга. Они образуются не только при резонансном рассеянии электромагнитной волны цилиндром, но и при рассеянии сферическими частицами. В последнем случае их появление, как правило, связано с образованием особой точки типа седло-фокус, а линией, вокруг которой происходит наматывание (разматывание) спирали, является ус седла (см., например, [90, 92, 94, 112, 127, 128]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя сказанное, отметим, что мы рассмотрели различные типы сингулярностей световых пучков, последовательно спускаясь от микронных масштабов и ГО до субволновой оптики. Мы обсудили, что трассировка лучей может приводить к образованию каустик. В рамках ГО они представляют собой сингулярные образования, на которых интенсивность излучения обращается в бесконечность, а по крайней мере один из радиусов кривизны волнового фронта обнуляется. Повышение точности рассмотрения каустик при переходе к волновой оптике показывает, что геометрические каустики размываются в области высокой, но конечной интенсивности излучения, имеющие конечную протяженность по всем трем пространственным координатам и свою внутреннюю структуру.

В отличие от каустик, фазовые сингулярности соответствуют обнулению одного из электромагнитных полей, а следовательно, и интенсивности излучения. При этом сами поля могут оставаться мо-

нотонными, разложимыми в ряд Тейлора функциями координат, однако их локальное волновое число (модуль градиента фазы) расходится в точке сингулярности. По этой причине фазовые сингулярности демонстрируют суперосцилляции, связанные с поворотом вектора поля на  $\pm 2\pi$  при обходе сингулярности по замкнутому контуру.

Аналогичные сингулярности демонстрирует поле вектора Пойнтинга, однако в этом случае возможно образование нового типа особенностей, обусловленных локальным возбуждением стоячих волн, когда ни одно из полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не обнуляется в точке сингулярности.

Симметрия задачи играет важную роль в формировании свойств сингулярностей. В случае же сингулярностей поля вектора Пойнтинга закон сохранения энергии накладывает на эти свойства дополнительные ограничения.

Использование сингулярностей и их свойств помогает преодолеть дифракционный предел и управлять электромагнитным излучением на субволновых масштабах, что важно для широкого круга приложений, некоторые примеры которых приводились в различных разделах настоящего обзора. Мы надеемся, что наш обзор проясняет ряд важных вопросов субволновой оптики и стимулирует дальнейшие исследования в этом перспективном и бурно развивающемся направлении.

Авторы признательны Ю.С. Кившарю, И.В. Минину, О.В. Минину, А.В. Новицкому и О.И. Сурову за полезные обсуждения и ценные замечания. Наши особые благодарности Н.Д. Арнольду за детальное обсуждение вопросов, посвященных геометрии



ческой оптике и каустикам, а также за его ценные

замечания, которые помогли нам существенно улучшить изложение этих вопросов в настоящем обзоре.

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Курс теоретической физики. Т. 8, М.: Наука, (Landau L.D., Bell J.S., Kearsley M.J. et al // *Electrodynamics of continuous media*. Vol. 8. Elsevier. 2013.) 1982.
- [2] Seneca About Nature. Loeb Classical Library, Vol. 1. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1972.
- [3] Pliny the Elder The Natural History, Book XXXVII. London, Taylor and Francis, 1855. Vol. 10.
- [4] Kwan A., Dudley J., Lantz E. // *Phys. World*. **15**, N 4. 641 (2002).
- [5] Berry M.V. // *Light: Science & Applications*. **12**, N 1. 238. (2023).
- [6] Bliokh K.Y., Karimi, E., Padgett, M.J. et al. // *Journal of Optics*. **25**, N 10. 103001. (2023).
- [7] Shi L., Che Z., Kivshar Y. // *Photonics Insights*. **3**, N 1. C02. (2024).
- [8] Abbe E. // *Archiv für Mikroskopische Anatomie*. **9**, N 1. 413. (1873).
- [9] Hon A. // *Journal of the Royal Microscopical Society*. **2**, N 4. 460. (1882).
- [10] Novotny L., Hecht B. Principles of nano-optics, Cambridge university press, 2012.
- [11] Hecht B., Sick B., Wild U.P. et al. // *J. Chem. Phys.* **112**. 7761. (2000).
- [12] Wang Z., Guo W., Li L. et al. // *Nat. Commun.* **2**. 218. (2011).
- [13] Wang F., Liu L., Yu P. et al. // *Sci. Rep.* **6**. 24703. (2016).
- [14] Krivitsky L.A., Wang J.J., Wang P.Z. et al. // *Sci. Rep.* **3**, N 1. 3501. (2013).
- [15] Huang K., Qin F., Liu H. et al. // *Adv. Materials*. **30**, N 26. 1704556. (2018).
- [16] Astratov V.N. // *Laser & Photonics Reviews*. **17**. 2200029. (2023).
- [17] Maslov A.V., Astratov V.N. // *Phys. Rev. Appl.* **11**, N 6. 64004. (2019).
- [18] Berry M.V. // *J. Opt.* **21**. N 5. 53002 (2019).
- [19] Oseen C.W. // *Ann. der Physik*. **374**, N 19. 202 (1922).
- [20] Di Francia G.T. // *Il Nuovo Cimento* (1943-1954). **9**. 426 (1952).
- [21] Tribelsky M.I., Luk'yanchuk B.S. // *Phys. Rev. Lett.* **97**. 263902. (2006).
- [22] Трибельский М.И., Мирошниченко А.Е. // *УФН*. **192**, № 1. 45 (2022). (Tribelsky M.I., Miroshnichenko A.E. // *Phys.-Usp.* **65**, 40 (2022)).
- [23] Kivshar Y. // *Nano Letters*. **22**. 3513 (2022).
- [24] Minin O.V., Minin I.V. // *Photonics (MDPI)*. 591 (2021).
- [25] Luk'yanchuk B.S., Bekirov A.R., Wang, Z.B. // *Physics of Wave Phenomena*. **30**, N 4. 217 (2022).
- [26] Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. (Arnold V.I. Catastrophe theory. Springer Science & Business Media, 2003.)
- [27] Żakowicz W. // *Phys. Rev. E*. **64**, N 6. 66610 (2001).
- [28] Arnold N. // *Applied Surface Science*. **208**. 15 (2003).
- [29] Luk'yanchuk B.S., Arnold N., Huang S.M. et al. // *Appl. Phys. A*. **77**, N 2. 209 (2003).
- [30] Арнольд В.И. // *УФН*. **141**, № 12. 569 (1983). (Arnol'd V.I. // *Sov. Phys. Usp.* **26**. 1025 (1983)).
- [31] Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
- [32] Арнольд В.И. // *УФН* **169**, № 12. 1311 (1999). (Arnol'd V.I. // *Phys. Usp.* **42**. 1205 (1999)).
- [33] Berry M.V., Upstill C. // *Progress in optics*. **18**. 257 (1980).
- [34] Kravtsov Y.A., Orlov Y.I. Caustics. Catastrophes and Wave Fields, Second Edition. Springer, 1993.
- [35] Trinkaus H., Drepper F. // *J. Phys. A: Math. Gen.* **10**. 11 (1977).
- [36] Berry M., Klein S. // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. **93**, N 6. 2614 (1996).
- [37] Kofler J., Arnold N. // *Phys. Rev. B*. **73**. 235401. (2006).
- [38] Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
- [39] Bohren C.F., Huffman D.R. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. New York, Wiley-Interscience, 2004.
- [40] Mie G. // *Ann. Physik*. **25**. 1 (1908).
- [41] Pearcey T. // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. **37**, N 268. 311 (1946).
- [42] Connor J.N.L., Farrelly D. // *The Journal of Chemical Physics*. **75**, N 6. 2831 (1981).
- [43] López J.L., Pagola P.J. // *Mathematics of Computation*. **86**, N 307. 2399 (2017).
- [44] Luk'yanchuk B.S., Zheng Y.W., Lu Y.F. // *Proc. SPIE*. **4065**. 576. (2000).
- [45] Luk'yanchuk B.S. Laser Cleaning: Optical Physics, Applied Physics and Materials Science. Singapore, World Scientific, 2002
- [46] Luk'yanchuk B.S., Wang Z.B., Hong M.H. et al. // *Proc SPIE*. **5448**. 37 (2004).
- [47] Kane D.M. Laser cleaning II. Singapore, World Scientific, 2006.
- [48] Arnold N. // *Appl. Phys. A*. **92**. 1005 (2008).
- [49] Bobbert A., Vlieger J. // *Physica A*. **137**. 209. (1986).
- [50] Heifetz A., Kong S-Ch, Sahakian A.V. // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. **6**, N 9. 1979 (2009).
- [51] Wang Z., Luk'yanchuk B., Minin I.V. // *Photonics*. **9**, N 8. 540. (2022).
- [52] Minin I.V., Minin O.V., Geints Y.E. // *Annalen der Physik*. **527**, N 7–8. 491 (2015).
- [53] Zhang P., Yan B., Gu G. et al. // *arXiv:2107.04115 [physics.optics]* (Accessed: May. 25, 2024).
- [54] Littlefield A.J., Zhu J., Messinger J.F. et al. // *Opt. Photonics News*. **32**, N 1. 34 (2021).
- [55] Minin I.V., Geints Y.E., Zemlyanov A.A. et al. // *Opt. Express*. **28**. 22690 (2020).
- [56] Minin I.V., Minin O.V., Cao Y. et al. // *Opto-Electron. Sci.* **1**, N 2. 210008. (2022).
- [57] Chen Z., Tafloue A., Backman V. // *Opt. Express*. **12**. 1214 (2004).
- [58] Wu W., Katsnelson A., Memis O.G. et al. // *Nanotechnology*. **18**. 485302. (2007).
- [59] McLeod E., Arnold C. B. // *Nat. Nanotechnology*. **3**.



- 413 (2008).
- [60] Kim J., Cho K., Kim I. et al. // *Appl. Phys. Express*. **5**, 25201 (2012).
- [61] Zhang X.A., Chen I.-T., Chang C.H. // *Nanotechnology*. **30** 352002 (2019).
- [62] Chen X., Wu T., Gong Z. et al. // *Photonics Res.* **8**, N 3. 225 (2020).
- [63] Astratov V.N., Darafsheh A., Kerr M.D. et al. // *SPIE Newsroom*. **12**, 32 (2010).
- [64] Yan B., Yue L., Monks J.N. et al. // *Opt. Lett.* **45**, N 5. 1168 (2020).
- [65] Münzer H.-J., Mosbacher M., Bertsch M. et al. // *Proc. SPIE*. **4426**, 180 (2002).
- [66] Lu Y.F., Zhang L., Song W.D. et al. // Письма в ЖЭТФ. **72**, № 9. 658 (2000). [http://jetpletters.ru/ps/1994/article\\_30125.shtml](http://jetpletters.ru/ps/1994/article_30125.shtml)
- [67] Huang S.M., Hong M.H., Luk'yanchuk B.S. et al. // *J. Appl. Phys.* **92**, 2495 (2002).
- [68] Huang S.M., Hong M.H., Luk'yanchuk B.S. et al. // *J. Vacuum & Sci. Technol. B*. **20**, N 3. 1118 (2002).
- [69] Huang S.M., Hong M.H., Luk'yanchuk B.S. et al. // *Appl. Phys. Lett.* **82**, N 26. 4809 (2003).
- [70] Eversole D., Luk'yanchuk B., Ben-Yakar A. // *Appl. Phys. A*. **89**, 283 (2007).
- [71] Wang Z.B., Guo W., Luk'yanchuk B.S. et al. // *Proc. SPIE*. **7005**, 50 (2008).
- [72] Huang S.M., Sun Z., Luk'yanchuk B.S. et al. // *Appl. Phys. Lett.* **86**, 161911. (2005).
- [73] Fardel R., McLeod E., Tsai Y.-C. et al. // *Appl. Phys. A*. **101**, 41 (2010).
- [74] Huang S.M., Wang Z.A., Sun Z. et al. // *J. Nanoscience Nanotechnology*. **11**, 10981 (2011).
- [75] Wang W.J., Lim G.H., Song W.D. et al. // *J. Phys.: Conf. Ser.* **59**, 177 (2007).
- [76] Wang Z.B., Guo W., Pena A. et al. // *Opt. Express*. **16**, N 24. 19706 (2008).
- [77] Minin O.V., Minin I.V. *The Photonic Hook: From Optics to Acoustics and Plasmonics*. Springer International Publishing, 2021.
- [78] Минин О.В., Минин И.В. // Письма в ЖЭТФ. **120**, № 2. 152 (2024). (Minin O.V. Minin I.V. // *JETP Letters*. **120**, (2024) in press.)
- [79] Chen W.-Y., Hung T.-Y., Hsieh Y.-K. et al. // *Optics & Laser Technology*. **180**, 111520 (2025).
- [80] Ивлев Б.И., Копнин Н.Б. // УФН. **142**, № 3. 435 (1984). (Iulev B.I., Kopnin N.B. // *Sov. Phys. Usp.* **27**, 206 (1984)).
- [81] Гольберг С.М., Копнин Н.Б., Трибельский М.И. // ЖЭТФ. **94**, 289 (1988). [http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e\\_067\\_04\\_0812.pdf](http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_067_04_0812.pdf)
- [82] Golberg S., Kopnin N., Tribelsky M. // *J. Low Temp. Phys.* **77**, 209 (1989).
- [83] Tribelsky M.I., Kai S., Yamazaki H. et al. // *Phys. Rev. E*. **51**, N 5. 5132 (1995).
- [84] Berry M.V., Popescu S. // *J. Phys. A*. **39**, 6965 (2006).
- [85] Rogers E.T., Lindberg J., Roy T. et al. // *Nature Materials*. **11**, N 5. 432 (2012).
- [86] Ахаронов Ю. // *Mem. Am. Math. Soc.* **247**, 1174. (2017).
- [87] Wang Z.B., Luk'yanchuk B., Yue L. et al. // *Sci. Rep.* **9**, 20293 (2019).
- [88] Berry M.V., Dennis M.R. // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. **457**, N 2013. 2251 (2001).
- [89] Leach J., Dennis M.R., Courtial J. et al. // *Nature*. **432**, N 7014. 165 (2004).
- [90] Wang Z.B., Luk'yanchuk B., Hong M.H. et al. // *Phys. Rev. B*. **70**, N 3. 35418 (2004).
- [91] Bashevoy M., Fedotov V., Zheludev N. // *Optics Express*. **13**, N 21. 8372 (2005).
- [92] Luk'yanchuk B.S., Wang Z.B., Tribelsky M.I. et al. // *J. Phys.: Conf. Ser.* **59**, 234 (2007).
- [93] Luk'yanchuk B.S., Chong T.C., Shi L.P. et al. // *IEEE PhotonicsGlobal@Singapore (IPGS)*. **1–2**, 187 (2008).
- [94] Luk'yanchuk B.S., Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. // *J. Optics*. **15**, N 7. 73001. (2013).
- [95] Kuznetsov A.I., Miroshnichenko A.E., Brongersma M.L. et al. // *Science*. **354**, 2472 (2016).
- [96] Vogel A., Noack J., Hüttman G. et al. // *Appl. Phys. B*. **81**, 1015 (2005).
- [97] Berns M.W. // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. **8**, 721 (2020).
- [98] Gawęda S., Podborska A., Macyk W. et al. // *Nanoscale*. **1**, N 3. 299 (2009).
- [99] *Springer Handbook of Nanotechnology* / Ed. B. Bhushan. Berlin, Springer-Verlag, 2017. 4th ed.
- [100] Mokhun I., Khrobatin R. // *J. Optics A: Pure and Appl. Optics*. **10**, N 6. 64015 (2008).
- [101] Mokhun I., Arkhelyuk A., Galushko Yu. et al. // *Appl. Opt.* **51**, N 10. C158 (2012).
- [102] Jackson J.D. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [103] Bliokh K.Y., Kivshar Y.S., Nori F. // *Phys. Rev. Lett.* **113**, N 3. 33601 (2014).
- [104] Bliokh K.Y., Bekshaev A.Y., Nori F. // *Nature Comm.* **5**, N 1. 3300 (2014).
- [105] Bekshaev A.Y., Bliokh K.Y., Nori F. // *Phys. Rev. X*. **5**, N 1. 11039 (2015).
- [106] Xu X., Nieto-Vesperinas M. // *Phys. Rev. Lett.* **123**, N 23. 233902 (2019).
- [107] Khonina S.N., Degtyarev S.A., Andrey V., Ustinov A.V. et al. // *Optics Express*. **29**, N 12. 18634 (2021).
- [108] Tang Y., Cohen A.E. // *Phys. Rev. Lett.* **104**, N 16. 163901 (2010).
- [109] Lisinger A., Palermo G., Guglielmelli A. et al. // *Advanced Materials*. **35**, N 34. 2107325 (2022).
- [110] Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: МЦНМО, 2012. (Arnold V.I. // *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 1992.)
- [111] Novitsky A.V., Barkovsky L.M. // *Phys. Rev. A*. **79**, N 3. 33821. (2009).
- [112] Luk'yanchuk B.S., Tribelsky M.I., Ternovsky V. et al. // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. **9**, N 9. S294 (2007).
- [113] Canós V.A., Gurrutxaga E.A., Benimetskiy, F.A. et al. // *Laser & Photonics Reviews*. **15**, N 10. 2100114 (2021).
- [114] Luk'yanchuk B. S., Ternovsky V. // *Phys. Rev. B*. **73**, N 23. 235432 (2006).
- [115] Tribelsky M.I., Rubinstein B.Y. // *Nanomaterials*. **12**, N 11. 1878 (2022).
- [116] Tribelsky M.I., Rubinstein B.Y. // *Nanomaterials*. **12**, N 18. 3164 (2022).
- [117] Трибельский М.И. // Письма в ЖЭТФ. **118**, № 6. 417 (2023). (Tribelsky M.I. // *JETP Letters*. **118**, N 6. 414 (2023)).
- [118] Tribelsky M.I. // *Laser & Photonics Reviews*. **18**, N 3. 2300512 (2024).
- [119] *Laser speckle and related phenomena. Topics in applied physics*. Vol. 9 / Ed. J.C. Dainty. Berlin, Springer-Verlag, 2013.

- [120] *Angelsky O.V., Bekshaev A.Ya., Vasnetsov M.V. et al.* // *Frontiers in Physics*. **10**. (2022). <http://refractiveindex.info/> (Accessed: May. 25, 2024)
- [121] *Barnett S.M., Berry M.* // *Journal of Optics*. **15**, N 12. 125701 (2013).
- [122] *Berry M.V., Dennis M.R.* // *J. Optics A: Pure and Appl. Optics*. **6**, N 5. S178 (2004).
- [123] *Barnett S.M.* // *J. Modern Optics*. **55**, N 14. 2279 (2008).
- [124] *Svyakhovskiy S., Ternovski V., Tribelsky M.* // 2018 International Conference Laser Optics (ICLO). IEEE. 336 (2018).
- [125] *Polyanskiy M.* Refractive index database.
- [126] *Tribelsky M.I.* // *arXiv:2305.08534v2 [physics.optics]* (Accessed: May. 25, 2024).
- [127] *Лукьянчук Б.С., Трибельский М.И., Терновский В.В.* // *Опт. Ж.* **73**, № 6. 7 (2006).
- [128] *Luk'yanchuk B., Paniagua-Domínguez R., Kuznetsov A.I. et al.* // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. **375**, N 2090. 20160069 (2017).

## Structures and singularities in optics: from caustic to subwavelength scales

M. I. Tribelsky<sup>1,a</sup>, B. S. Luk'yanchuk<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>*Department of Polymer and Crystal Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*

<sup>2</sup>*Department of Nanophotonics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>mitribel@gmail.com, <sup>b</sup>LukyanchukBS@my.msu.ru*

We present a concise overview of the current advancements in understanding the singularities of the electromagnetic field, which emerge in the contexts of light refraction and scattering by material objects. We initiate the discussion with the formation of caustics in geometric optics, where beams of light are traced, and progressively refine our examination towards smaller scales with increasing accuracy. This exploration culminates in a detailed description of singularities associated with light scattering by subwavelength particles. Our review highlights both common and unique characteristics of various singularities, emphasizing the influence of problem symmetry and the principle of energy conservation. Additionally, we delve into the fundamental principles underlying these phenomena and explore methods to surpass the diffraction limit. The theoretical framework is enriched with experimental examples and a range of practical applications stemming from the discussed effects. Through this review, we aim to provide a comprehensive understanding of the singularities in the electromagnetic field and their implications in modern optics and related disciplines.

PACS: 42.15.Dp; 42.25.-p; 42.25.Hz

*Keywords:* caustic, photon jet, diffraction, interference, singularity, Pointing vector.

*Received 12 July 2024.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2024. **79**, No. 6. Pp. .

### Сведения об авторах

1. Трибельский Михаил Исаакович — доктор физико-математических наук, профессор, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-10-13, e-mail: [mitribel@gmail.com](mailto:mitribel@gmail.com).
2. Лукьянчук Борис Семенович — доктор физико-математических наук, профессор; тел.: (495) 939-39-10, e-mail: [LukyanchukBS@my.msu.ru](mailto:LukyanchukBS@my.msu.ru).