

Численные модели распространения нелинейных акустических волн в задачах медицинского ультразвука и в некоторых приложениях аэро- и подводной акустики

П. В. Юлдашев,^{1,*} О. А. Сапожников,² М. М. Карзова,¹
С. А. Цысарь,³ А. В. Квашеникова,¹ Е. О. Коннова,^{3,†} В. А. Хохлова²

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

³Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра фотоники и физики микроволн

(Поступила в редакцию 16.09.2024; после доработки 17.11.2024; подписана в печать 02.12.2024)

В работе приводится обзор численных алгоритмов, разработанных в Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ и используемых для решения эволюционных уравнений нелинейной акустики, таких как уравнение Бюргерса, уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК), однонаправленное уравнение Вестервельта. Представлены основные результаты, полученные с помощью данных численных моделей при исследовании распространения интенсивных звуковых волн в различных средах. В частности, рассмотрены примеры решения задач медицинского ультразвука, нелинейной аэроакустики и нелинейной гидроакустики. Обсуждается обобщение однонаправленных моделей на случай присутствия неоднородностей среды с использованием методов широкоугольного параболического приближения в трехмерных задачах.

PACS: 43.20.Bi, 43.20.El, 43.25.-x, 43.28.Mw, 43.28.Lv, 43.25.Cb, 43.25.Lj, 43.25.Zx, 43.28.-g, 43.58.Ta, 43.80.Vj. УДК: 534.21, 534.23, 534.26.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнение Бюргерса, уравнение ХЗК, уравнение Вестервельта, медицинский ультразвук, нелинейные акустические волны, неоднородные среды, параметрический излучатель, широкоугольное параболическое приближение.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2520301](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2520301)

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении множества проблем в акустике необходимо прежде всего определить количественные характеристики волнового поля, создаваемого в среде теми или иными излучателями или источниками звука. Уравнения, описывающие распространение акустических волн в жидкостях и газах, включают в себя множество физических эффектов, таких как дифракция, поглощение и дисперсия, рассеяние на неоднородностях среды, а в случае волн высокой интенсивности — нелинейные эффекты. Эти уравнения являются достаточно сложными, и при общей постановке задачи найти их аналитические решения, как правило, не удается. Поэтому в большинстве случаев прибегают к методам численного моделирования, которые позволяют получить ответ при относительно произвольных конфигурациях среды и источников волнового поля. При этом сложность решения задачи зависит от сложности исходных уравнений и заложенных в них приближений. Обычно можно вы-

делить два основных типа уравнений, используемых в численном моделировании распространения акустических волн.

Во-первых, имеется система так называемых полноволновых уравнений акустики в жидкостях и газах, которая может быть получена из системы уравнений Навье–Стокса при известных допущениях [1]. Такая система наиболее полно учитывает все физические эффекты, связанные с распространением волн, однако вместе с этим при численном решении она предъявляет самые высокие требования к вычислительным ресурсам. В данном подходе эволюционной координатой выступает время, и численные алгоритмы предполагают расчеты с обновлением трехмерных полей различных акустических величин (давления, колебательной скорости, плотности), заданных на дискретных сетках, на каждом следующем шаге по времени. Поскольку шаг по времени связан с шагами численной сетки по пространственным координатам критерием Курранта–Фридрихса–Леви (критерий КФЛ), то объем вычислений растет обратно пропорционально четвертой степени размеров шагов пространственной численной сетки. В результате решение задач при наличии высокочастотных компонент поля становится чрезвычайно ресурсозатратным. В частности, такая ситуация возникает при учете нелиней-

* E-mail: petr@acs366.phys.msu.ru

† E-mail: helen.7aprel@gmail.com

ных эффектов, когда происходит генерация высших гармоник основной частоты излучения. В настоящее время самым известным программным воплощением данного подхода является пакет численного моделирования «k-Wave», реализующий заложенные в полноволновой модели идеи с использованием псевдоспектрального метода [2].

Во-вторых, большое число задач может быть решено на основе упрощенных уравнений, при выводе которых были использованы те или иные приближения. Так, физически обоснованным упрощением является предположение об однонаправленном характере распространения волн. Например, такая ситуация возникает, когда излучатель посылает волны в полупространство в виде направленного волнового пучка, что часто реализуется в различных практических приложениях. Благодаря рассмотрению только волн, распространяющихся вперед, удается фактически избавиться от одного пространственного измерения, что эффективно уменьшает размерность задачи на единицу. А именно одна из пространственных координат, выбранная в качестве преимущественного направления распространения волн, за счет перехода в сопровождающую систему координат становится эволюционной переменной. Таким образом, вдоль данного направления задача с граничными условиями заменяется на задачу с начальными условиями, которая существенно проще. Начальное поле обычно задается в некоторой плоскости, перпендикулярной оси эволюционной координаты. Волновое поле рассчитывается последовательно, переходя в маршевом алгоритме вдоль эволюционной координаты от текущей перпендикулярной плоскости до следующей с некоторым шагом. При этом поле в бегущей системе координат меняется относительно медленно, что упрощает применение численных методов.

Примерами уравнений указанного типа в акустике являются уравнение Бюргерса для одномерных волн конечной амплитуды [3] и уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК) для описания нелинейных волновых пучков [4]. Уравнение Вестервельта [5], исходно сформулированное для описания нелинейных волн, распространяющихся во всех направлениях, также может быть преобразовано к однонаправленному виду. Большое развитие получили методы широкоугольного параболического приближения, широко применяемого в акустике [6, 7], в подводной акустике [8–10] и в других областях [11]. Именно такого типа уравнения преимущественно использовались при решении множества научных задач в Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ (LIMU — Laboratory for Industrial and Medical Ultrasound, <http://limu.msu.ru/>). Это объясняется тем, что основной интерес представляли волновые явления при сильном проявлении нелинейных эффектов и, в силу сложности и громоздкости соответствующих численных задач, однонаправленные модели фактически становились безальтернативными. В настоящей обзорной работе представлены основные науч-

ные направления Лаборатории, в которых применялось численное моделирование с использованием указанных уравнений, а именно: медицинский ультразвук, аэроакустика и параметрическое излучение низкочастотных сигналов. Отдельно обсуждается вопрос обобщения однонаправленных моделей на случай неоднородной среды в трехмерных задачах с использованием методов широкоугольного параболического уравнения.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

1.1. Уравнение Бюргерса

Для описания распространения плоских (одномерных) волн конечной амплитуды в термовязкой среде часто используется уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Здесь p — акустическое давление, z — эволюционная пространственная координата, $\tau = t - z/c_0$ — время в сопровождающей системе координат, c_0 — скорость звука, ρ_0 — плотность среды, β — коэффициент нелинейности, δ — коэффициент термовязкого поглощения. Уравнение Бюргерса также может быть модифицировано на случай цилиндрических и сферических волн [3]. Без термовязкого поглощения уравнение известно как уравнение простых волн:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют аналитические решения, которые описываются в соответствующих руководствах [12]. Однако их не всегда удобно использовать на практике в связи с необходимостью вычисления интегралов, и во многих случаях оказывается проще получить решение тем или иным численным методом на дискретной сетке. Кроме того, в некоторых задачах, например в аэроакустике, необходимо дополнительно учитывать релаксационный механизм поглощения, что также не дает использовать аналитическое решение при общем виде волнового профиля [13]. Поскольку уравнение Бюргерса является составной частью других уравнений нелинейной акустики (например, уравнения ХЗК), то стоит остановиться на основных численных методах его решения подробнее.

По структуре в правой части уравнения стоят два дифференциальных оператора, один из которых описывает нелинейные эффекты, ответственные за укручение профиля волны и генерацию высших гармоник основной частоты, а второй описывает термовязкое поглощение. В операторном виде уравнение может быть записано как

$$\frac{\partial p}{\partial z} = L_N p + L_A p, \quad (3)$$

где

$$L_N = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial (\cdot)^2}{\partial \tau} \quad (4)$$

есть нелинейный оператор, а

$$L_A = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (5)$$

— оператор термовязкого поглощения.

Хотя в принципе возможно сконструировать численную схему с учетом действия суммарного оператора $L_N + L_A$ в правой части, наиболее часто используется метод расщепления по физическим факторам [14, 15]. Идея метода состоит в замене вычисления решения уравнения на каждом малом шаге Δz вдоль оси z с суммарным оператором в правой части (3) на простую последовательность вычислений решений уравнений с одним оператором в правой части, L_N или L_A . Чаще всего встречаются схемы первого и второго порядка точности:

$$p(z + \Delta z) \approx L_{N,\Delta z} L_{A,\Delta z} p(z), \quad (6)$$

$$p(z + \Delta z) \approx L_{A,\Delta z/2} L_{N,\Delta z} L_{A,\Delta z/2} p(z), \quad (7)$$

где операторы $L_{N,\Delta z}$ и $L_{A,\Delta z}$ описывают результаты решения уравнений с нелинейным оператором и с оператором поглощения, соответственно, на целом шаге по эволюционной координате Δz , а $L_{A,\Delta z/2}$ — решение уравнения с оператором поглощения на половинном шаге $\Delta z/2$. Для уравнения с нелинейным оператором фактически необходимо решить уравнение простых волн (2), а в уравнении с оператором поглощения необходимо решить уравнение, эквивалентное по форме уравнениям диффузии или теплопроводности. Поскольку операторы нелинейности и поглощения не коммутируют друг с другом, то ошибка такого представления решения пропорциональна $O(\Delta z^2)$ и $O(\Delta z^3)$ для схем первого и второго порядка точности, соответственно, и при достаточно мелком шаге Δz будет пренебрежимо малой. Преимущество схем расщепления состоит в том, что для каждого оператора возможно использование наиболее подходящей для него численной схемы. Далее рассмотрим основные варианты схем, используемых для обоих операторов.

Если волна на источнике представляет собой гармонический сигнал с круговой частотой ω_0 , то удобнее использовать спектральный подход, в котором функция давления $p(\tau, z)$ разлагается в конечный ряд Фурье

$$p(\tau, z) = \sum_{n=-N}^N p_n \exp(in\omega_0\tau), \quad (8)$$

где N — число гармоник, а амплитуды с отрицательными индексами комплексно сопряжены с амплитудами с положительными индексами: $p_{-n} = p_n^*$. После подстановки Фурье разложения в уравнение простых волн (2) для комплексных гармоник p_n может быть записана система нелинейных

обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{i\beta n \omega_0}{c_0^3 \rho_0} \left(\sum_{m=1}^{N-n} p_m^* p_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} p_m p_{n-m} \right). \quad (9)$$

Здесь p_m^* — комплексно-сопряженная величина p_m . Система уравнений (9) решается стандартным методом Рунге–Кутты четвертого порядка, количество вычислительных операций в котором в данном случае пропорционально квадрату числа гармоник [16]. Поэтому метод эффективен лишь при небольшом числе гармоник (несколько десятков), достаточных для описания слабо искаженных исходно синусоидальных профилей. При сильном проявлении нелинейных эффектов, когда в профиле волны формируется ударный фронт, количество гармоник, необходимое в численном описании, возрастает до сотен и тысяч и метод становится крайне неэффективным. Для ограничения числа гармоник при спектральном описании разрывных волн был развит асимптотический метод, в котором высокочастотные компоненты включались, используя аналитический результат для спектра разрывной волны. Такой метод позволил описывать распространение разрывных волн с использованием всего лишь 30 гармоник, но был реализован только для одномерного случая распространения плоских волн в идеальной среде и среде с произвольным частотным законом поглощения и дисперсии [16, 17]. В общем случае сильнонелинейных волн целесообразно применять схемы, сформулированные целиком во временном представлении. Так, в программных кодах, разработанных в LIMU, используется консервативная схема типа Годунова, представленная в работе [18]. Эта схема позволяет использовать всего 1–2 точки временной сетки на ударном фронте и правильно описывает скорость движения фронта и уменьшение его амплитуды с пройденным расстоянием. Детали реализации численной схемы во временном представлении можно найти в работе [19]. Также эта временная схема лучше подходит для описания распространения импульсных сигналов, спектр которых изначально очень широкий.

Оператор термовязкого поглощения может быть вычислен в спектральном представлении с использованием точного аналитического решения в виде затухающей экспоненты:

$$p_n(z + \Delta z) = \exp\left(-\frac{\Delta z \delta \omega_0^2 n^2}{2c_0^3}\right) p_n(z). \quad (10)$$

Этот способ применим в том числе и при общем виде оператора поглощения, например при наличии произвольного числа релаксационных процессов (в частности, двух релаксационных процессов для воздуха) или в случае степенного частотного закона поглощения (как в биологических тканях). Соответствующая поглощению дисперсия также входит в аналитическое решение. Во временном представлении оператора термовязкого поглоще-

ния могут использоваться известные явные и неявные конечно-разностные численные схемы, обычно сформулированные для уравнений теплопроводности и диффузии.

Стоит дополнительно отметить, что при несовпадении представлений поля давления для вычисления операторов нелинейности и поглощения в схеме расщепления необходимо каждый раз в цепочке операторов производить переход из временного представления в спектральное и обратно с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ). Это несколько увеличивает время расчета, но добавляет удобства в плане выбора наиболее удачной комбинации численных схем.

1.2. Уравнения ХЗК и Вестервельта

Многие физические явления, наблюдаемые в направленных пучках нелинейных акустических волн, объясняются на основе комбинации нелинейных и дифракционных эффектов. Поэтому в реалистичных моделях кроме нелинейности необходимо учитывать также и дифракционные эффекты, которые описываются в эволюционных уравнениях ХЗК

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} \quad (11)$$

и Вестервельта:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}. \quad (12)$$

Здесь применимы те же обозначения, что и в уравнении Бюргерса (1). Ось z декартовой системы координат обычно выбирается совпадающей с осью пучка и указывает преимущественное направление распространения волн в пучке. В правой части уравнения ХЗК первым идет дифракционный оператор, пропорциональный лапласиану в поперечной плоскости (x, y) . В уравнении Вестервельта дифракционный оператор пропорционален полному лапласиану. Эти два уравнения в правой части содержат такие же операторы нелинейности и поглощения, как и в уравнении Бюргерса. Уравнения записаны для однородной среды с постоянными значениями скорости звука и плотности. Учет неоднородностей является отдельной темой и обсуждается в конце статьи. Основное отличие двух уравнений состоит в том, что в уравнении ХЗК дифракционные эффекты описываются в параболическом приближении, которое справедливо при малых углах дифракции. Обычно считается, что точности параболического уравнения достаточно для углов дифракции приблизительно до 15 градусов относительно оси пучка [20, 21]. Фактический угловой

диапазон может быть разным в зависимости от конкретной задачи, решаемой с помощью параболического уравнения [22]. В уравнении Вестервельта дифракционный оператор является точным. Это видно из того, что при отбрасывании операторов нелинейности и поглощения уравнение Вестервельта переходит в обычное линейное волновое уравнение, переписанное для поля давления в сопровождающей системе координат.

При построении численных схем для двух обсуждаемых уравнений так же, как и для уравнения Бюргерса, может быть использована схема расщепления по физическим факторам, с той лишь разницей, что вместо двух операторов в схеме фигурируют три оператора, описывающие соответствующие физические эффекты: нелинейность, поглощение и дифракцию [23]. Порядок операторов может быть различным, однако на практике наиболее часто используется вариант схемы второго порядка, когда последовательность операторов начинается и замыкает оператор дифракции L_D , выполняющий расчет поля на полшага по оси z [24]:

$$p(x, y, z + \Delta z) \approx L_{D, \Delta z/2} L_{A, \Delta z/2} L_{N, \Delta z} L_{A, \Delta z/2} L_{D, \Delta z/2} p(x, y, z). \quad (13)$$

Дифракционный оператор проще вычислять в спектральном представлении поля давления (8). Для каждой фурье-гармоники p_n в случае параболического приближения в трехмерном варианте уравнения ХЗК необходимо решить эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{1}{2ik_n} \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} \right), \quad (14)$$

где $k_n = nk_0 = n\omega_0/c_0$ — волновое число на круговой частоте $\omega_n = n\omega_0$. Данное параболическое уравнение имеет вид уравнения диффузии или теплопроводности с мнимым коэффициентом и обычно решается с использованием конечно-разностных схем на основе метода переменных направлений (метод ADI — alternating directions implicit) в прямоугольной области в плоскости (x, y) [25]. На краях расчетной области могут использоваться различные граничные условия, в том числе идеально поглощающий слой PML (perfect matching layer), необходимый для гашения паразитных отражений при моделировании дифракции пучка в свободном поле.

Дифракционная часть уравнения Вестервельта

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{1}{2ik_n} \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

не является эволюционной, т.к. содержит в правой части в составе лапласиана вторую производную по z и по сути является переписанным уравнением Гельмгольца для медленно меняющейся амплитуды p_n в сопровождающей системе координат. Поэтому метод, использующийся для параболического приближения, здесь неприменим и необходимы другие подходы. В частности, поскольку

речь идет об однородной среде, часто применяется метод углового спектра, в котором поле давления отдельной гармоники $p_n(x, y, z)$ с использованием преобразования Фурье разлагается на набор плоских волн (пространственный или угловой спектр), которые описываются комплексными амплитудами $\hat{p}_n(k_x, k_y, z)$ [26]. Здесь k_x и k_y являются пространственными частотами вдоль соответствующих осей и имеют смысл компонент волнового вектора плоских волн в плоскости (x, y) . В пространственном спектре уравнение в частных производных становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_n}{\partial z^2} + 2ik_n \frac{\partial \hat{p}_n}{\partial z} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{p}_n = 0, \quad (16)$$

которое имеет два линейно независимых решения. Одно из них описывает плоские волны, распространяющиеся в полупространство $z > 0$, а второе — в обратную сторону. Выбор только одного решения для волн, бегущих в сторону $z > 0$, делает модель однонаправленной. В результате комплексная амплитуда плоской волны с компонентами волнового вектора $(k_x, k_y, k_z = \sqrt{k_n^2 - k_x^2 - k_y^2})$ на каждом следующем шаге $z + \Delta z$ рассчитывается умножением амплитуды на текущем шаге на аналитически заданный коэффициент, который называется пропагатором [24]:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \\ = \exp\left(i\Delta z \sqrt{k_n^2 - k_x^2 - k_y^2} - ik_n \Delta z\right) \hat{p}_n(k_x, k_y, z). \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что это решение включает в себя не только распространяющиеся плоские волны с $k_z > 0$, но и неоднородные волны с мнимым k_z , которые экспоненциально заглушаются вдоль оси z . Переход из пространственного спектра обратно в координатное пространство дает результирующее поле на следующем шаге.

Поле давления обычно задается на двумерной прямоугольной сетке, и метод углового спектра оказывается эффективным с вычислительной точки зрения за счет использования быстрого дискретного преобразования Фурье для двумерных матриц. С другой стороны, дискретность пространственного спектра приводит к появлению некоторых артефактов [24], связанных с эффектом наложения периодически продолженных полей в координатном пространстве, степень проявления которых может быть уменьшена за счет различного рода фильтрации пространственного спектра [27].

Кроме трехмерных уравнений ХЗК и Вестервельта в некоторых случаях целесообразно использовать их версии для аксиально-симметричных полей, которые проще для численного решения, поскольку число измерений эффективно меньше на единицу. Тогда вместо уравнений (14) и (15) для

расчета дифракции необходимо решать аналогичные уравнения с соответствующим радиально-симметричным лапласианом:

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{1}{2ik_n} \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n}{\partial r} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{1}{2ik_n} \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2} \right), \quad (19)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиальная координата цилиндрической системы координат (r, z) . Радиально-симметричное параболическое уравнение дифракции (18) может быть решено с использованием конечно-разностных схем, например схемы Кранка–Николсон, которая записывается после использования аппроксимации $\partial p_n / \partial z \approx (p_n^{m+1} - p_n^m) / \Delta z$ для эволюционной производной в левой части и $p_n \approx (p_n^{m+1} + p_n^m) / 2$ для поля в правой части. Здесь использованы обозначения $p_n^{m+1} = p_n(z + \Delta z, r)$ и $p_n^m = p_n(z, r)$ для полей на следующем и текущем шаге. После упорядочивания слагаемых получается уравнение:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{i\Delta z}{4k_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) p_n^{m+1} = \\ = \left(1 + \frac{i\Delta z}{4k_n} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) p_n^m. \end{aligned} \quad (20)$$

Дискретизация радиально-симметричного лапласиана на сетке по r , например при помощи метода конечных разностей второго порядка, позволяет получить итоговые линейные уравнения с трехдиагональной матрицей, которые решаются методом прогонки. На границе расчетной области здесь также могут быть использованы условия в виде поглощающего слоя PML.

Для решения уравнения (19), соответствующего дифракционной части уравнения Вестервельта также, как и в трехмерном случае, может быть применен метод углового спектра [28]. Однако для разложения поля в пространственный спектр вместо двумерного дискретного преобразования Фурье здесь необходимо использовать дискретное преобразование Ханкеля, для которого при непосредственной реализации алгоритма число операций пропорционально квадрату числа компонент пространственного спектра, а аналогичная БПФ быстрая версия алгоритма при этом отсутствует. Поэтому гораздо эффективнее в аксиально-симметричном случае использовать формализм широкоугольного параболического уравнения [29], в рамках которого можно построить конечно-разностные численные схемы, по структуре аналогичные схемам для узкоугольного параболического уравнения [30]. Так, однонаправленное уравнение для гармоники p_n в этом случае записывается как

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = ik_n \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta_\perp^2}{k_n^2}} - 1 \right) p_n, \quad (21)$$

где для краткости поперечный оператор Лапласа обозначен как

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (22)$$

В такой формулировке используется псевдодифференциальный оператор $\sqrt{1 + \Delta_{\perp}/k_n^2}$. Формальное решение уравнения (21) записывается посредством операторного пропагатора [31]:

$$\begin{aligned} p_n(r, z + \Delta z) &= \\ &= \exp \left[ik_n \Delta z \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta_{\perp}}{k_n^2}} - 1 \right) \right] p_n(r, z). \end{aligned} \quad (23)$$

Экспоненциальный пропагатор может быть вычислен приближенно с использованием Падэ аппроксимаций порядка (N_l, N_l) [32]:

$$p_n(r, z + \Delta z) = \prod_{l=1}^{N_l} \frac{1 + \mu_l \Delta_{\perp}/k_n^2}{1 + \nu_l \Delta_{\perp}/k_n^2} p_n(r, z). \quad (24)$$

Здесь коэффициенты μ_l и ν_l являются функциями параметра $ik_n \Delta z$ (безразмерного шага) и вычисляются исходя из соображений устойчивости и точности аппроксимации исходного пропагатора [33]. На практике, хотя пропагатор вычисляется приближенно, обычно достаточно небольшого числа N_l (например, $N_l = 3$) в произведении операторов в уравнении (24), чтобы обеспечить очень хорошую точность аппроксимации при шагах Δz , сравнимых с длиной волны и даже больше. Вычисление поля на каждом следующем шаге сводится к решению цепочки уравнений вида

$$(1 + \nu_l \Delta_{\perp}/k_n^2) p_n^{(l+1)} = (1 + \mu_l \Delta_{\perp}/k_n^2) p_n^{(l)} \quad (25)$$

для индексов $l = 1, \dots, N_l$, где последовательность иницируется полем на текущем шаге $p_n^{(1)} = p_n(r, z)$, а результат вычисления всей цепочки уравнений есть поле на следующем шаге $p_n^{(N_l+1)} = p_n(r, z + \Delta z)$. Эти уравнения ничем, кроме коэффициентов при лапласианах в левой и правой частях, не отличаются от уравнения (20), и построение численной схемы методом конечных разностей для них совершенно аналогично стандартной схеме Кранка–Николсон для узкоугольного параболического уравнения.

Описанные выше уравнения и методы их решения лежат в основе различных отдельных программ и программных комплексов, разработанных в LIMU для решения широкого круга задач, связанных с распространением нелинейных акустических волн. Конкретная реализация численных методов обычно адаптируется под особенности той или иной задачи с использованием физически обоснованных предположений, о чем будет упомянуто в соответствующих разделах статьи. Здесь лишь стоит отметить, что представленные численные методы и алгоритмы хорошо поддаются распараллеливанию для выполнения вычислений на много-

ядерных процессорах. Например, операторы нелинейности и поглощения можно независимо и параллельно вычислять для различных точек пространственной сетки. Оператор дифракции в нелинейных задачах вычисляется параллельно для отдельных фурье-гармоник p_n . В методе углового спектра параллельность вычислений для каждой отдельной гармоники p_n может быть реализована с использованием параллельных версий алгоритма БПФ. В настоящее время ведутся работы по ускорению вычислений за счет использования возможностей графических процессоров [34].

2. МЕДИЦИНСКИЙ УЛЬТРАЗВУК

2.1. Трехмерная модель на основе уравнения Вестервелта в задачах медицинского ультразвука

Хотя разработка медицинских применений ультразвука началась достаточно давно, в настоящее время продолжают интенсивные исследования в данной области [35]. Это связано с появлением новых технологий и аппаратных возможностей, а также с расширением области применений ультразвука в медицине [36]. Например, кроме классической тепловой абляции органов и тканей, используемой при реализации метода неинвазивной ультразвуковой хирургии [37], к настоящему времени были разработаны перспективные протоколы с использованием ударно-волновых импульсов, которые известны под общим названием гистотрипсия [38, 39].

Численный эксперимент играет большую роль в развитии методов медицинского ультразвука. Так, при разработке тех или иных протоколов воздействия ультразвуком на биологические ткани организма с целью оценки безопасности и эффективности планируемой процедуры необходимо заранее знать распределение волнового поля, создаваемого в среде выбранным излучателем. Численный эксперимент позволяет проанализировать ситуацию в широком диапазоне значений параметров задачи и подобрать конфигурацию излучателя, наиболее подходящего для заданных целей. При этом в численном эксперименте удается обойти многие ограничения, присутствующие в чисто экспериментальных способах исследования полей, и рассчитать требуемые величины во всей интересующей области пространства. Например, конечная полоса частот и конечный размер измерительных датчиков (гидрофонов) могут сильно исказить профиль исследуемой волны, в то время как в численном моделировании удается получить желаемые сигналы практически без искажений [40].

Значительный объем работ, выполненных в LIMU по теме медицинского ультразвука с использованием методов численного моделирования, был направлен на создание методов количественной характеристики полей мощных сильно сфокусированных излучателей, разработанных

в основном для приложений неинвазивной ультразвуковой хирургии. При этом большой интерес представляли режимы работы излучателей при высоких интенсивностях ультразвукового поля, достаточных для формирования ударных фронтов в области фокуса. Это связано с разработкой новых протоколов облучения биологических тканей на основе гистотрипсийного метода [41] и с усовершенствованием методов тепловой абляции [42]. Так, была разработана комбинированная методика, основанная на численном моделировании уравнений нелинейной акустики и экспериментальных данных, получаемых при сканировании поля гидрофоном в методе акустической голографии и при непосредственном измерении высокоинтенсивных полей оптоволоконным гидрофоном. Изначально метод был опробован на радиально-симметричных полях с использованием уравнения ХЗК [43], а затем был расширен на случай трехмерных полей с использованием численной модели на основе уравнения Вестервельта [44]. Теоретическая и экспериментальная составляющие методики требуют здесь дополнительных пояснений.

Хотя отдельные составляющие алгоритма решения трехмерного уравнения Вестервельта, описанные в предыдущем разделе, достаточно просты и хорошо изучены, его непосредственное применение для моделирования сильно нелинейных ультразвуковых полей с ударными фронтами приводит к нереалистично высоким требованиям по объему оперативной памяти и к длительным расчетам. Это связано как с большим числом гармоник, необходимых для корректного описания волн с разрывами, так и с повышенными требованиями к пространственному разрешению численной сетки в поперечной плоскости, поскольку размер фокальной области при фокусировке нелинейных волн уменьшается относительно линейного случая. Поэтому было предложено использовать физически обоснованную оптимизацию, связанную с пространственной характеристикой сфокусированных полей типовых излучателей неинвазивной ультразвуковой хирургии [45]. А именно поскольку нелинейные эффекты амплитудно-зависимы, то при увеличении интенсивности волнового поля они начинают раньше проявляться там, где амплитуда в волновом пучке максимальна, т.е. в небольшой области вокруг фокуса. Это приводит к тому, что при всех практически реализуемых режимах облучения на большой мощности ударные фронты также формируются около фокуса. В остальной части пространства поле остается квазилинейным, т.е. имеет профиль волны, слабо отличающийся от синусоиды, который можно описывать малым числом гармоник. Это позволяет хранить в оперативной памяти компьютера большое число гармоник (около тысячи) в относительно небольших массивах, соответствующих численной сетке, покрывающей фокальное пятно с достаточным перекрытием, а для всего остального пространства использовать массивы с сильно уменьшенным числом гармоник (несколь-

ко десятков или сотен). В результате данной оптимизации удалось сократить общий объем массивов более чем на порядок и довести время счета до разумных величин в несколько десятков часов (с учетом параллельных вычислений на многоядерных процессорах). Дополнительно в численной схеме было использовано искусственное поглощение, которое включалось локально в тех точках пространственной сетки, где формировались ударные фронты. Это позволило обеспечить заданную ширину фронта (обычно 8–9 точек на разрыв) и уменьшить поперечные пространственные градиенты поля давления с целью сглаживания паразитных осцилляций в профиле волны.

Акустическая голография, являющаяся второй компонентой методики, относится к экспериментальным способам исследования волновых полей и играет важную роль в привязке разработанной численной модели к описанию полей реальных излучателей [47]. Здесь стоит отметить, что создание ультразвуковых излучателей для конкретных приложений представляет собой сложную научно-техническую проблему, предполагающую использование множества конструкторских подходов и различных материалов. Поэтому зачастую промоделировать работу излучателя, исходя из его геометрии и конструкции, не представляется возможным, т.к. детали реализации (физические параметры материалов, расположение излучающих элементов, электродов и т.д.) в точности не известны или представляют собой коммерческую тайну, а сами уравнения с учетом пьезоупругих эффектов в твердых телах и методы их решения достаточно сложны. Акустическая голография позволяет избежать множества указанных сложностей и абстрагироваться от большинства деталей конструкции путем получения полной информации о результирующем поле, сгенерированном излучателем в среде.

Одним из удобных способов реализации акустической голографии является метод синтезированной апертуры. Для этого при помощи гидрофона выполняется запись пространственного распределения давления на некоторой поверхности (обычно это плоскость, перпендикулярная оси пучка, хотя возможно использование поверхностей иной геометрии [48]) при работе излучателя в заданных режимах в воде. Просканированные в монохроматическом режиме распределения амплитуды и фазы в наборе дискретных точек на плоскости вместе называются голограммой, которая может быть использована для восстановления поля в любой интересующей области пространства в предположении линейного характера распространения волн. При рассмотрении импульсных сигналов можно, используя время-частотное преобразование Фурье, получать наборы монохроматических голограмм (т.н. импульсные или нестационарные голограммы) сразу для определенной полосы частот [49]. Для переноса поля на нужную поверхность используются численные модели, основанные на методе углового спектра (с плоскости на плоскость)

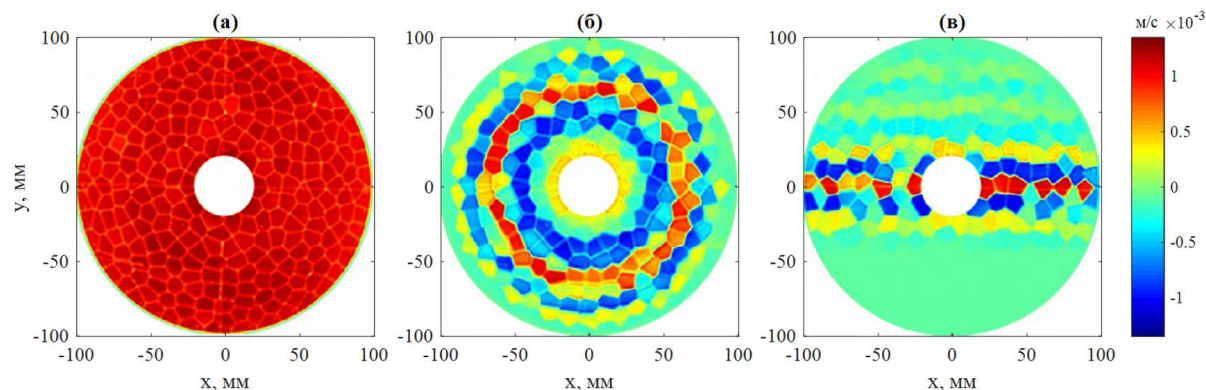


Рис. 1. Полученные методом акустической голографии распределения нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности 256-элементного пьезокомпозитного сферического излучателя с центральной частотой 1.2 МГц, апертурой 200 мм и радиусом кривизны 150 мм при излучении коротких импульсов с фокусировкой в геометрический фокус (а), с электронным смещением фокуса вдоль оси на 15 мм от излучателя (б), с электронным смещением фокуса на 8 мм поперек от оси (в)

или на вычислении интеграла Рэлея (для искривленных поверхностей) [47].

В численном моделировании мощных ультразвуковых полей голограмма используется для задания начальных условий для однонаправленной волновой модели [44]. Голограмма при этом снимается на некотором расстоянии от источника, а затем линейным способом распространяется на плоскость, привязанную к излучателю. Например, если излучатель выполнен на сегменте сферической поверхности, то это может быть касательная плоскость к вершине этой поверхности. Голограмма обычно снимается при достаточно низкой акустической мощности пучка, при которой поле можно считать практически линейным. При увеличении мощности, подаваемой на излучатель, голограмма масштабируется по амплитуде с коэффициентом, который определяется из дополнительных гидрофонных измерений в некоторой точке в ближнем поле. Таким образом, нет необходимости учитывать коэффициент передачи электрической мощности, подаваемой на излучатель, в акустическую мощность пучка, который, вообще говоря, меняется в зависимости от режима работы прибора.

Акустическая голография развивается в лаборатории как самостоятельное направление исследований, в рамках которого получен ряд важных результатов в биомедицинских приложениях ультразвука. В частности, можно восстановить амплитуду и фазу колебательной скорости на поверхности излучателя (рис. 1), например для выявления дефектов, которые обнаруживаются по низкому уровню амплитуды колебаний некоторого участка [50], либо по фазовым отклонениям, что бывает удобно при характеристике многоэлементных излучателей [51]. Более того, метод позволяет выявлять и компенсировать неточности в относительном позиционировании поверхности голограммы и излучателя [52], а также в отклонении осей системы позиционирования от ортогональности [53]. Для много-

элементных излучателей было предложено снимать голограммы отдельных элементов, которые впоследствии можно комбинировать в численном моделировании для анализа возможностей электронной фокусировки путем добавления соответствующих фаз к сигналам, подаваемым на отдельные элементы [54]. Измерение полной мощности пучка за счет использования эффекта радиационной силы вместе с данными голограммы позволяет проводить абсолютную калибровку гидрофонов [55]. Восстановление фазы на сферической поверхности многоэлементного излучателя, исходя из данных голографии, используется для коррекции дефектов формы поверхности, возникающих при изготовлении, которая в действительности отличается от идеальной сферы [56]. Коррекция, вносимая как дополнительная фаза на элементах, позволяет улучшить фокусировку волнового пучка. Использование голографического подхода для определения полной структуры пучка позволяет проводить декомпозицию поля по набору истинных плоских волн даже в случае фокусированных полей, что используется при определении акустических характеристик материалов малых объемов, актуальных для биологических образцов [57].

Используя описанную выше комбинированную методику, были проанализированы поля большого числа излучателей медицинского ультразвука различной конструкции. При этом результаты расчетов сравнивались с измерениями профилей волн в фокусе, выполненными с использованием оптоволоконного гидрофона, обладающего абсолютной калибровкой и широкой полосой частот, достаточной для воспроизведения профилей с ударными фронтами. Например, было показано, что поле, создаваемое в воде 256-элементной решеткой коммерческой системы ультразвуковой хирургии (Sonalleve V1 3.0T, Philips Healthcare), хорошо описывается в рамках данной модели во всем диапазоне доступных мощностей, включая режимы,

в которых происходит образование ударного фронта амплитудой до 100 МПа в фокусе [44]. Аналогичным образом были получены результаты для нескольких прототипов больших многоэлементных решеток, разработанных для метода гистотрипсии с кипением [58, 59]. Для других приложений исследовались нелинейные поля диагностических излучателей, выполненных в виде одномерной линейной решетки. Такие решетки могут использоваться в комбинированном режиме как для оказания терапевтического воздействия, так и для одновременного получения диагностического изображения. Так, например, было показано, что для стандартного 128-элементного коммерческого диагностического излучателя C5-2 на частоте 2.3 МГц, который в режиме высокой мощности в коротких импульсах тестировался при разработке протокола вытравливания почечных камней за счет эффекта радиационной силы, возможно формирование ударных фронтов в фокусе [60]. При этом в случае активации всех 128 элементов наблюдалось существенное отличие результатов расчета и эксперимента, которое объяснялось тем, что при острой фокусировке пучка фокальная область по размеру становилась соизмеримой с диаметром чувствительного элемента гидрофона (оптического волокна) и проявлялся эффект усреднения. Этот результат показывает, что численное моделирование с опорой на экспериментальные данные помогает получать более достоверные результаты, чем при чисто экспериментальных способах исследования. Другая одномерная 64-элементная решетка на частоте 1 МГц разрабатывалась для реализации методов воздействия импульсным ультразвуком высокой интенсивности. Этот способ используется, например, для инициирования инерционной кавитации в ткани в технологии направленной доставки лекарств без введения контрастных агентов (пузырьков с искусственной оболочкой). Численное моделирование позволило сначала найти оптимальный дизайн излучателя, который обеспечивает необходимые параметры ультразвукового поля при заданных ограничениях на геометрию преобразователя и максимально допустимую мощность [61]. Впоследствии был изготовлен прототип устройства, произведена характеристика его работы на заданных мощностях, выполнен анализ возможностей по электронному смещению фокуса, а также произведена оценка качества диагностического изображения [62].

Трехмерная модель на основе уравнения Вестервельта также использовалась для теоретического анализа гистотрипсийных протоколов воздействия на биологические ткани. Так, с помощью комбинированного подхода, состоящего в совместном использовании полноволновой модели «k-Wave» и уравнения Вестервельта, было рассчитано распространение мощного сфокусированного ультразвукового пучка через интактный череп в ткани головного мозга [63]. В этой задаче применялось разбиение всей области моделирования на три подобласти: от излучателя до черепа однородная подобласть с во-

дой, далее подобласть, содержащая сегмент неоднородного черепа, и последняя подобласть с тканями головного мозга, которые считались однородными. Подобное разбиение позволило рассчитывать нелинейное распространение волн в однородных подобластях на основе уравнения Вестервельта, а неоднородности и неровности поверхности черепа и возникающие из-за них аберрации учитывать в линейной модели «k-Wave». Физически разбиение с комбинацией линейной и нелинейной моделей оправдано тем, что кости черепа являются сильно поглощающей средой и почти не пропускают высокие гармоники, сгенерированные за счет нелинейности в первой подобласти на пути от излучателя к черепу. В результате было получено, что, с учетом компенсации аберраций на основе возможностей 256-элементной решетки с плотной упаковкой элементов и при условии существующих технических ограничений на максимальную интенсивность ультразвука на поверхности излучателя (40 Вт/см^2), в тканях головного мозга возможна фокусировка с ударными фронтами амплитудой более 60 МПа в фокусе и, соответственно, реализация гистотрипсийных механизмов воздействия на биоткань.

Другой пример использования трехмерной нелинейной модели связан с исследованием фокусировки ультразвуковых пучков в ткани печени в присутствии ребер [64]. Здесь проблема заключается в том, что ребра перегораживают часть пучка и за счет чередующейся структуры окна просвета образуют подобие дифракционной решетки. При использовании многоэлементной решетки часть элементов отключается для того, чтобы ультразвуковой пучок проходил в основном через просвет между ребрами, не вызывая избыточного нагрева окружающих их тканей. В результате поле в фокусе не только ослабляется, но и появляются дополнительные дифракционные максимумы, которые ухудшают локализацию терапевтического воздействия ультразвука. В указанной работе рассматривался процесс тепловой абляции ткани и было показано, что с увеличением интенсивности ультразвука на излучателе возможно улучшение локализации тепловых источников в основном фокусе за счет использования нелинейных эффектов. Здесь результат достигнут за счет того, что нелинейные эффекты начинают проявляться раньше в основном фокусе, чем в боковых максимумах, которые изначально меньше по амплитуде. Поэтому появление ударных фронтов, сопровождающееся существенным возрастанием величины тепловыделения, также раньше происходит раньше в основном фокусе.

2.2. Радиально-симметричная модель на основе уравнений ХЗК и Вестервельта в задачах медицинского ультразвука

Как уже было сказано выше, даже при внедрении всех оптимизаций в алгоритмы решения трехмерного уравнения Вестервельта, расчет с одним

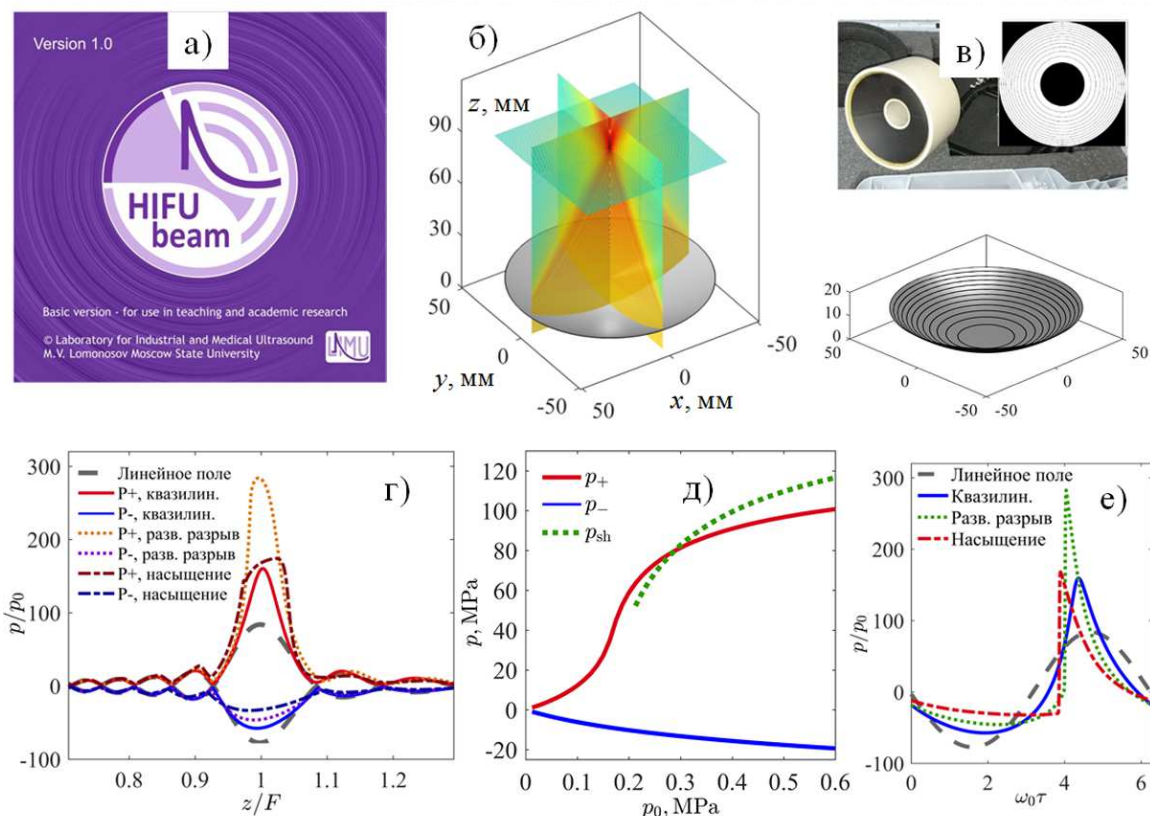


Рис. 2. Моделирование радиально-симметричных нелинейных ультразвуковых пучков: а — логотип программы с графическим интерфейсом пользователя HIFU-beam; б — 3D-модель и поле одноэлементного сфокусированного излучателя; в — фотография и 3D-модель кольцевой решетки; г — положительное $P_+ = p_+/p_0$ и отрицательное $P_- = p_-/p_0$ безразмерное давление волнового поля на оси одноэлементного излучателя (фокус $F = 120$ мм, диаметр $D = 120$ мм, частота $f_0 = 1.2$ МГц) для трех характерных режимов работы: квазилинейный, развитый разрыв в фокусе, насыщение (здесь $p_0 = \rho_0 c_0 u_0$ — характерное давление на излучателе, связанное с амплитудой колебательной скорости поверхности u_0); д — зависимости p_+ , p_- , а также амплитуды ударного фронта p_{sh} в абсолютных величинах (МПа) от давления на излучателе p_0 (кривые насыщения), е — безразмерные профили волны p/p_0 для трех характерных режимов работы: квазилинейный, развитый разрыв в фокусе, насыщение

конкретным набором входных параметров для численной модели занимает значительное время (десяtkи часов) на высокопроизводительных серверах и рабочих станциях с многоядерными процессорами. В связи с этим в LIMU была разработана упрощенная численная модель на основе радиально-симметричных версий уравнений ХЗК и Вестервельта (с использованием широкоугольного приближения для вычисления оператора дифракции). Численная модель снабжена графическим интерфейсом пользователя и выложена для бесплатного использования на сайте LIMU как программный комплекс (рис. 2, а) под названием «HIFU-beam» [65] (аббревиатура от High Intensity Focused Ultrasound — сфокусированный ультразвук высокой интенсивности и beam — луч или пучок). С помощью «HIFU-beam» можно рассчитывать поля одноэлементных сфокусированных излучателей (рис. 2, б) и кольцевых решеток (рис. 2, в), выполненных на сегменте сферической поверхности, в однородной среде или среде, состоящей из нескольких плоских слоев, расположенных перпендикулярно к оси пучка. Слои в данном случае могут ис-

пользоваться для имитации распространения ультразвука в биоткани, которая в грубом приближении также состоит из слоев: кожа, жир, мышцы, органы и др. Радиально-симметричная модель имеет несколько применений, в которых были получены самостоятельные результаты.

Во-первых, это анализ полей радиально-симметричных излучателей (рис. 2, г), которые часто используются в лабораториях медицинского ультразвука, когда нет необходимости в более дорогих и сложных приборах, таких как многоэлементные решетки с трехмерной структурой поля. Например, наряду с одноэлементными излучателями, применяются кольцевые решетки, которые за счет электронной фокусировки обеспечивают смещение фокального максимума вдоль оси. Негативным следствием электронной фокусировки является формирование побочных дифракционных максимумов в пре- и постфокальных областях, которые достаточно сильны ввиду регулярной структуры кольцевых решеток. Для 12-элементной кольцевой решетки с рабочей частотой 2 МГц, имеющейся в распоряжении лаборатории, на основе широкоугольной мо-

дели было рассмотрено влияние электронного смещения фокуса вдоль оси пучка на формирование ударных фронтов в основном и побочных максимумах [46]. Были определены безопасные расстояния, на которые можно перемещать фокус от исходного положения, задаваемого радиусом кривизны сферической поверхности, а также показано, что в некоторых случаях для изменения угла фокусировки пучка выгоднее отключать внешние элементы, чем производить фазировку решетки при всех включённых элементах. В другом исследовании с использованием уравнения ХЗК была выполнена характеристика радиально-симметричного излучателя медицинского прибора экстракорпоральной ударно-волновой терапии Duolith SD1 [66]. Моделирование показало, что хотя в создаваемом прибором поле проявляются нелинейные эффекты, ударных фронтов все же не образуется.

Во-вторых, с использованием радиально-симметричной модели на основе уравнения ХЗК исследовались общие свойства нелинейных сфокусированных пучков и предельные значения параметров разрывных волн, достигаемых в фокусе. Хотя аналитические оценки для предельного уровня давления в фокусе, полученные на основе разных приближений, известны давно [67, 68], численное моделирование позволяет получить конкретные числовые значения с высокой точностью. Так, для поршневых сфокусированных излучателей были получены кривые насыщения для положительного и отрицательного давлений и интенсивности в фокусе в зависимости от коэффициента усиления преобразователя при фокусировке линейных волн [69]. Кривые насыщения называются так потому, что при увеличении амплитуды исходной акустической волны уровень положительного и отрицательного давлений в фокусе меняется нелинейным образом (рис. 2, *д*). Для пикового положительного давления сначала происходит рост быстрее линейной зависимости, связанный с лучшей фокусировкой высших гармоник, а затем рост сильно замедляется из-за ограничивающих факторов, возникающих при образовании разрывной волны: дополнительного нелинейного поглощения на фронте ударной волны или нелинейной рефракции [70]. Пиковое отрицательное давление по модулю растёт медленнее линейной зависимости. Показано, что аналитические оценки и результаты численного расчёта совпадают по порядку величины, но ошибка аналитических выражений при этом все же велика для использования в практических целях. Для импульсных и периодических полей гауссовского пучка отдельно исследовались физические механизмы, приводящие к насыщению поля в фокусе [71]. Показано, что при фокусировке периодических волн насыщение параметров волны в фокусе происходит в основном вследствие нелинейного поглощения на ударном фронте волны. В импульсных полях насыщение давления больше связано с проявлением эффекта нелинейной рефракции. При этом предельные значения пикового положительно-

го давления в периодических полях оказываются выше, чем в импульсных полях.

В процессе увеличения мощности пучка формирование ударного фронта в фокусе происходит при определенном уровне интенсивности, а затем амплитуда фронта быстро увеличивается, переходя к насыщению при больших мощностях. Для практических целей было предложено отмечать переход к насыщению по образованию так называемого полностью развитого разрыва, который соответствует максимальной безразмерной амплитуде разрыва, т.е. амплитуде, отнесенной к давлению на источнике [72]. Визуально развитый разрыв формируется тогда, когда пиковое положительное давление становится равным амплитуде разрыва (рис. 2, *е*). Работа излучателя в режиме развитых разрывов наиболее подходит для реализации протоколов облучения биологической ткани с использованием ударно-волновых импульсов. Поэтому была поставлена обратная задача по определению необходимых параметров излучателя для создания в среде развитого разрыва нужной величины. Для этого использовалось многопараметрическое прямое моделирование фокусировки нелинейного ультразвукового пучка, создаваемого поршневым излучателем, на основе радиально-симметричного уравнения ХЗК [72]. В результате анализа широкого набора данных было получено, что при условии большого волнового размера излучателя (которое в медицинских приложениях ультразвука практически всегда выполняется), амплитуда развитого разрыва главным образом определяется углом фокусировки излучателя или так называемым апертурным числом $F_{\text{number}} = F/D$, где F — фокусное расстояние, а D — диаметр преобразователя. С увеличением угла фокусировки и уменьшением F_{number} амплитуда развитого разрыва растёт и при $F_{\text{number}} = 1$ составляет около 80 МПа в воде. Были построены соответствующие кривые зависимости амплитуды развитого разрыва и пиковых положительных и отрицательных давлений от F_{number} , а также определена необходимая акустическая мощность пучка.

В-третьих, результаты, полученные при анализе фокусировки радиально-симметричных нелинейных пучков могут применяться и для оценки полей с трехмерной структурой, создаваемых, например, многоэлементными рандомизированными решетками. Для этого была введена концепция эквивалентного осесимметричного излучателя, линейное поле которого хорошо аппроксимирует поле реального излучателя в области фокального максимума [73]. Поскольку при близости линейных полей по геометрии и амплитуде нелинейные эффекты будут развиваться практически одинаково, то и при больших интенсивностях поля будут близки. Это объясняется тем, что нелинейные эффекты проявляются в основном там, где амплитуда поля максимальна, т.е. в фокусе, где аппроксимация полем эквивалентного источника наиболее точна. На примере нескольких решеток было показано, что результаты численного моделирования с использованием трехмерно-

го уравнения Вестервельта и голографических начальных условий и радиально-симметричного уравнения ХЗК для подобранных эквивалентных излучателей хорошо согласуются, что подтверждает работоспособность данного метода [74].

Полученные в радиально-симметричной модели данные могут использоваться для быстрой оценки возможностей того или иного излучателя в протоколах облучения с применением ударно-волновых импульсов, например в гистотрипсии [75, 76]. В частности, метод эквивалентного излучателя использовался при исследовании потенциальной возможности применения многоэлементных фокусирующих излучателей для реализации гистотрипсийного метода в неинвазивной хирургии глубоких участков головного мозга через интактный череп [77]. Здесь поле произвольной решетки, выполненной на сферическом сегменте, было заменено эквивалентным излучателем с учетом коэффициента заполнения поверхности решетки излучающими элементами. В предположении, что аберрации на неоднородностях кости черепа скомпенсированы, а также с учетом потерь на отражение и поглощение, было получено, что реализация гистотрипсийного воздействия при соблюдении технических ограничений по интенсивности на излучающих элементах возможна для плотного заполнения решеток, на ультразвуковых частотах около 1 МГц, при апертурном числе $F_{\text{number}} = 1$ и диаметре излучателя около 20 см.

Кроме того, при рассмотрении нелинейных сфокусированных пучков наблюдаются интересные физические эффекты, которые удобно изучать в радиально-симметричных моделях. Так, в линейном случае поле на оси пучка поршневого излучателя можно представить в виде суммы прямой и краевой волн [78]. При сильном проявлении нелинейных эффектов у каждой из этих волн вблизи фокуса формируется ударный фронт [79]. Фронты ориентированы друг к другу под некоторым углом, зависящем от угла фокусировки преобразователя. Эти два фронта бегут, вообще говоря, с разными скоростями и в некоторый момент «сталкиваются» друг с другом вблизи оси пучка, образуя один новый ударный фронт большей амплитуды. На поперечном срезе поля в осевой плоскости это проявляется как формирование так называемой «ножки Маха» — известного явления, наблюдаемого также при отражении ударных волн от плоской жесткой поверхности в случае малых углов скольжения [80]. Фронты падающей и отраженной волны не соприкасаются у поверхности, а смыкаются в некоторой точке над ней, от которой до поверхности опускается «ножка Маха». Здесь одинаковый характер нелинейно-дифракционных эффектов в двух разных физических задачах объясняется тем, что на оси радиально-симметричного пучка выполняются такое же граничное условие, как и при отражении от абсолютно жесткой поверхности: равенство нулю производной давления по нормали к поверхности. На кривой зависимости пикового положитель-

ного давления от расстояния вдоль оси образование «ножки Маха» в сильно нелинейном сфокусированном пучке проявляется в виде наличия небольшого локального пика, расположенного перед главным фокальным максимумом [65]. Дело в том, что после образования ударного фронта большей амплитуды в «ножке Маха», чем два исходных, происходит резкое увеличение нелинейного поглощения, пропорционального амплитуде ударного фронта в кубе. Поэтому амплитуда фронта начинает уменьшаться быстрее, чем это было до столкновения исходных двух фронтов незадолго до достижения фокуса. Затем амплитуда фронта восстанавливается и достигает максимума, поскольку до фокуса еще остается некоторое расстояние.

3. АЭРОАКУСТИКА

3.1. Нелинейные импульсы в случайно-неоднородной среде

В лаборатории выполнялись работы в области нелинейной аэроакустики, которые во многом были мотивированы проблемой импульсного шума, создаваемого сверхзвуковыми самолетами гражданской авиации. Шумовые волны распространяются от сверхзвукового самолета в виде конуса Маха и воспринимаются на земле как очень резкий импульсный шум, который вызывает раздражающее действие [81]. Классическая форма импульса такой волны известна в литературе под названием «N-волна», поскольку состоит из двух крутых фронтов — переднего и заднего, которые соединяются линейным участком, напоминая по очертаниям латинскую букву N. Это асимптотическая форма волны конечной амплитуды, которая формируется в процессе ее длительного распространения в атмосфере благодаря нелинейным эффектам после слияния множества мелких крутых фронтов исходного аэродинамического возмущения, порождаемого вблизи корпуса самолета. В настоящее время форма планируемых к выпуску коммерческих сверхзвуковых самолетов оптимизируется таким образом, чтобы уменьшить величину скачка давления на крутых участках профиля волны за счет «размазывания» импульса во времени, что приводит к существенному уменьшению уровня шума [82]. Такие профили обсуждаются в литературе под названием «low-boom» и сейчас активно исследуются.

Среди множества аспектов данной проблемы в Лаборатории изучалось прохождение N-волны через приземный турбулентный слой атмосферы. Специфика соответствующих процессов заключается в том, что на высотах до 1–2 км нестабильность атмосферы приводит к появлению различного рода турбулентности, например вихрей при сильном ветре или флуктуаций температуры в восходящих конвективных потоках над хорошо прогретой поверхностью земли. В результате скорость звука над землей испытывает небольшие флуктуации, про-

являющиеся на разных масштабах и существенно влияющие на распространение акустической волны. Например, случайное пространственное распределение скорости звука, которое можно образно воспринимать как множество разбросанных акустических «линз» разных размеров и силы, приводит к образованию случайных фокусировок и дефокусировок волнового поля, в которых амплитуда волны и, соответственно, уровни шума усиливаются или ослабляются также случайным образом [83]. Поэтому в данной проблеме обычно ставится задача об исследовании статистических характеристик волнового поля после прохождения турбулентного слоя определенной толщины и интенсивности. Вообще, теме волн в случайно-неоднородных средах посвящена обширная литература, т.к. эта проблема встречается во многих разделах волновой физики [84]. Однако сильное проявление нелинейных эффектов и импульсный характер волнового поля выделяет рассматриваемую задачу, в том числе по выбору методов исследования. Ввиду невозможности получения точных аналитических решений соответствующих нелинейных волновых уравнений в случайно-неоднородной среде здесь также в основном прибегают к численным методам.

В ранних работах в Лаборатории для представления случайно-неоднородной среды использовалась модель фазового экрана [85]. Эта модель хороша тем, что допускает аналитическую трактовку решений метода геометрической акустики. Однако геометрический метод приводит к сингулярностям в акустическом поле при формировании каустик, которые нужно описывать отдельно [86]. Кроме того, одиночный фазовый экран задает случайные возмущения волнового фронта лишь в некоторой начальной плоскости [87], хотя в действительности эти флуктуации накапливаются постепенно по мере распространения волны вглубь неоднородной среды. Поэтому более реалистично использовать уравнения, учитывающие дифракцию вместе с распределенными неоднородностями скорости звука и скорости движения среды (при наличии ветра). При самой общей постановке даже однонаправленные уравнения и методы их решения оказываются достаточно сложными, т.к. содержат большое количество дифференциальных операторов, ответственных за описание прохождения волны в неоднородной движущейся среде [88]. Также необходимо учитывать общую геометрию фронта падающей волны (конус Маха) и стратификацию атмосферы [89]. Например, градиент скорости звука по высоте приводит к тому, что разные участки исходного конического волнового фронта падают под разными углами к поверхности (на языке геометрической акустики это проявляется как искривление лучей). В результате совокупности этих факторов волны, наблюдаемые на различных расстояниях от проекции траектории самолета на землю, проходят разные расстояния в неоднородностях турбулентного слоя и характеризуются различной степенью случайных искажений профиля.

Для выявления основных физических аспектов обсуждаемой задачи целесообразно рассматривать ее в упрощенной постановке. Во-первых, с целью упрощения моделирования в плане начальных и граничных условий можно считать фронт исходной волны плоским, а геометрию выбрать двумерной из-за ограниченности вычислительных ресурсов. Таким образом, расчет ведется в прямоугольной области, в которой одна из сторон прямоугольника направлена вдоль эволюционной координаты однонаправленного волнового уравнения. Во-вторых, турбулентность можно считать однородной и изотропной. Тогда для задания ее свойств можно использовать всего один пространственный спектр мощности случайного поля с несколькими параметрами. В-третьих, поскольку флуктуации скорости звука даже в сильной атмосферной турбулентности относительно малы (обычно не более 0.5–1.0%), то углы дифракции оказываются невелики, и можно использовать нелинейное параболическое уравнение ХЗК. Для движущейся среды была выведена и обоснована специальная версия уравнения ХЗК [90], которая затем использовалась в численном моделировании [91, 92]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \right. \\ \left. - \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - \frac{\Delta c + u_z}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0} (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla_\perp p) \right] = \\ = \frac{c_0}{2} \Delta_\perp p. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь в дополнение к обозначениям, использованным в уравнениях (11) и (12), $\Delta c = c - c_0$ — это скалярные неоднородности скорости звука, вызванные, например, флуктуациями температуры воздуха, u_z — продольная компонента вектора скорости среды \mathbf{u} (ветра), \mathbf{u}_\perp — поперечная компонента этого вектора, ∇_\perp — градиент по поперечным координатам, Δ_\perp — лапласиан по поперечным координатам.

Поскольку волновое поле в данной задаче является импульсным, то численная модель строилась на основе численных схем, сформулированных во временном представлении. При этом исчезает необходимость выполнения преобразований Фурье для перехода в спектральное представление поля давления и обратно. В качестве начальных условий обычно задается плоская N-волна во временном окне достаточной длительности, чтобы из-за флуктуаций скорости звука профиль волны не вышел за пределы этого окна в бегущей системе координат. Можно использовать и другие начальные профили, например, соответствующие low-boom дизайну. Для набора статистических данных генерируются достаточно длинные в поперечном направлении реализации турбулентного поля скорости среды или температуры, которые пересчитываются в скорость звука и акустический показатель преломления. Реализации создаются на основе метода случайных фурье-мод [91]. При этом обычно используют кар-

мановский спектр турбулентности, соответствующий экспериментальным данным [93, 94]. Например, для двумерного моделирования энергетический кармановский спектр кинематической турбулентности описывается выражением:

$$E(\mathbf{K}) = \frac{55 \langle u_z^2 \rangle K^3 \exp(-K^2/K_m^2)}{18 c_0^2 L_0^{5/3} (K^2 + K_0^2)^{17/6}}. \quad (27)$$

Здесь $\mathbf{K} = (K_x, K_z)$ — вектор в пространственном спектре, $\langle u_z^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций продольной компоненты скорости u_z , $K_m = 5.92/l_0$, $K_0 = 1/L_0$. Спектр характеризуется внешним масштабом L_0 , связанным с размером наиболее крупных вихрей, внутренним масштабом l_0 , ниже которого вихри затухают, и интенсивностью, которая может быть представлена уровнем среднеквадратичной флуктуации показателя преломления для продольной компоненты $\sqrt{\langle u_z^2 \rangle}/c_0$. Амплитуда флуктуаций параметров среды вблизи границ расчетной области по поперечной координате обычно сглаживается до нуля, чтобы уменьшить паразитные отражения. При этом тип граничных условий в поперечном направлении не так важен, поэтому выбираются самые простые условия в виде жесткой стенки. Возможно также использование периодических граничных условий. После завершения расчета акустического поля на каждом шаге по эволюционной координате проводилось построение гистограмм распределений различных характеристик импульсов, которые подвергались последующей обработке.

Изначально физические параметры численной модели были привязаны к лабораторным экспериментам, которые проводились совместно с коллегами из Центральной школы Лиона (Франция) с целью изучить распространение N-волн в турбулентном слое в хорошо контролируемых условиях [93, 94]. В этих экспериментах сферические N-волны короткой длительности (30-40 мкс) и большой амплитуды (до 1500 Па на расстоянии 15 см от источника) генерировались при помощи высоковольтного искрового разряда [95]. Для импульсов с такими временными масштабами поглощение происходит в основном за счет термовязких эффектов, поэтому ширина ударного фронта, которая классическим образом определяется по длительности между пороговыми отметками в 10% и 90% от пикового положительного давления p_{\max} на профиле волны, может быть рассчитана согласно Тейлоровскому выражению $\tau_{\text{sh}} = 4.4\delta\rho_0/(\beta p_{\max})$. Релаксационные эффекты в связи с возбуждением колебательных степеней свободы молекул N_2 и O_2 также оказываются важны и приводят к дополнительному поглощению и к некоторой асимметрии профиля из-за проявлений дисперсии [95]. В экспериментах турбулентность создавалась либо на выходе мощного потока воздуха из сопла (кинематическая турбулентность) [93], либо в конвективных потоках над специальной нагревательной решеткой (термическая турбулентность) [94]. Спектры турбулентности измерялись по сигналу с термоанемометра или

термометра сопротивления и проверялись на соответствие кармановской модели для однородной изотропной турбулентности. Внешний масштаб турбулентности составлял около 15–20 см, а длина распространения в слое с неоднородностями достигала 2 м. Интенсивность турбулентности по среднеквадратичному значению флуктуаций акустического показателя преломления не превышала 1% как в кинематической, так и в термической турбулентности. Поскольку в реальных атмосферных масштабах изучаемые волновые процессы происходят аналогично, то иллюстративный материал (рис. 3 и 4) представлен на основе данных моделирования для полномасштабной N-волны.

Результаты численного моделирования процесса распространения N-волны находились в целом в хорошем согласии с данными модельных экспериментов. Для иллюстрации происходящих физических явлений удобно рассматривать следующие статистические характеристики положительного пикового давления (для краткости называемого далее амплитудой), нормированного на значения, полученные в однородном воздухе: среднее и стандартное отклонение для оценки общего уровня флуктуаций, а также кумулятивные вероятности превышения некоторого порога с целью отслеживания формирования каустик. Поскольку при данных физических параметрах амплитуда в каустиках обычно не более чем в несколько раз превышает номинальный уровень, то рассматривалась вероятность двукратного превышения номинальной амплитуды [92]. В литературе в дополнение к статистике амплитуды обычно принято анализировать статистику ширины ударного фронта, поскольку она тесно связана с уровнем воспринимаемого шума. Однако при сильных искажениях профиля обычное определение ширины фронта по порогам в 10% и 90% от амплитуды может давать сильно завышенные результаты. Кроме того, перепад давления происходит не на одном фронте, а, скорее, возможна серия из нескольких фронтов со случайными значениями перепада давления. Поэтому в численном эксперименте вычислялась не ширина фронта, а его крутизна, определяемая по пику производной профиля [92]. При этом автоматически выделяется самый крутой участок профиля, который и принимается за «ударный» фронт. Для крутизны, нормированной на соответствующие значения в однородной среде, также рассматривался набор статистических данных, аналогичный вычисляемому для амплитуды. Статистические данные анализировались как функции пройденного волной расстояния. Здесь стоит отметить, что в вопросе анализа временных характеристик импульсов численное моделирование имеет большое преимущество перед экспериментом, т.к. из-за несовершенства измерительной аппаратуры (наличие среза высоких частот у микрофонов) ударные фронты сглаживались, в результате чего их ширина, определенная, как сказано выше, оказывалась в несколько раз или даже на порядок выше фактической [95].

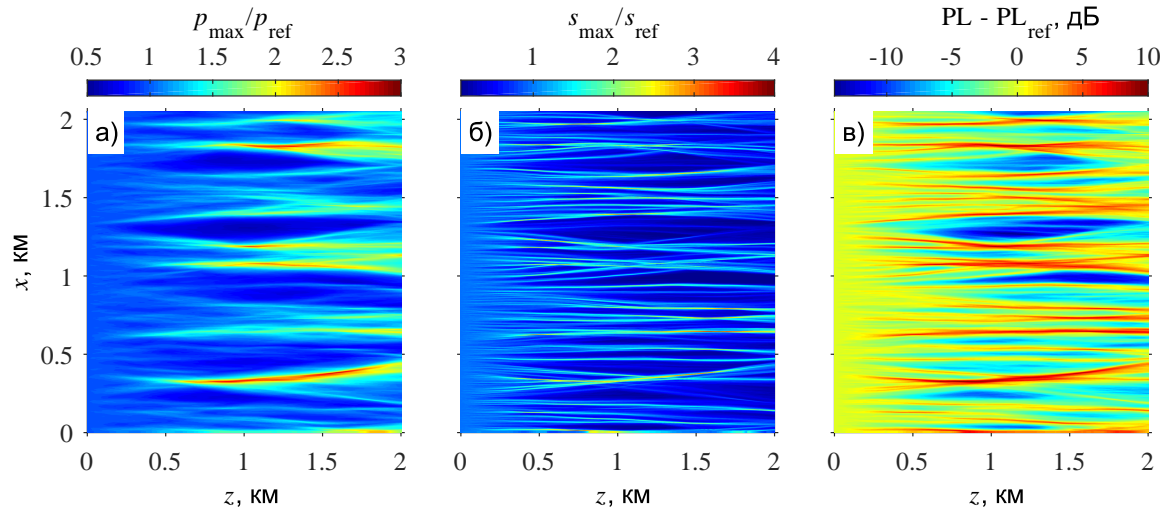


Рис. 3. Примеры случайных реализаций параметров N -волны, нормированных на соответствующие номинальные уровни, полученные в результате численного моделирования распространения нелинейных импульсов в турбулентной атмосфере в реальном масштабе: a — пиковое положительное давление, b — крутизна ударного фронта, v — метрика импульсного шума perceived loudness Mark VII

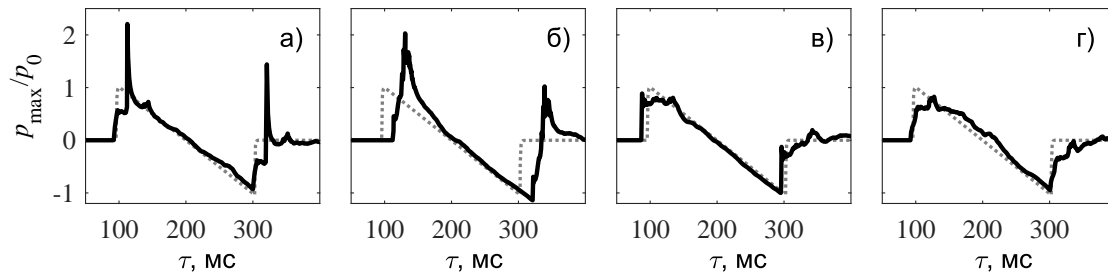


Рис. 4. Примеры случайных искажений формы профиля волны при распространении исходной N -волны с амплитудой $p_0 = 20$ Па (показана штриховой линией) в турбулентной атмосфере в реальном масштабе на расстояние 2 км: $a, б$ — в области каустик с усилением давления; $в, г$ — области вне каустик с эффектом размытия ударных фронтов

С началом распространения волны в турбулентном слое исходно плоский волновой фронт под действием неоднородностей скорости звука различного знака начинает случайным образом искривляться, что порождает фокусировку и дефокусировку волн. Процесс развивается постепенно с включением неоднородностей все больших масштабов, пока на некотором расстоянии не образуются наиболее сильные каустики с максимальным усилением амплитуды волны, обусловленные наличием крупных неоднородностей в спектре турбулентности (рис. 3). Каустики являются вытянутыми структурами, и амплитуда в них продолжает оставаться высокой на расстояниях, в несколько раз превышающих расстояние образования первых сильных фокусировок. При этом, однако, области дефокусировки с низкой амплитудой заметно расширяются в поперечном направлении. Профили волны отличаются большим разнообразием и, например в области каустик, имеют форму с большой амплитудой, называемую U -волной, а для профилей в областях дефокусировки характерно размытие ударного фронта и пониженная амплитуда (рис. 4). На статистических данных описываемые процессы от-

ражаются в виде начального линейного роста стандартного отклонения амплитуды и крутизны фронта. Стандартное отклонение для обеих величин на расстоянии образования первых каустик достигает максимума, а после медленно спадает. При этом уровень флуктуаций крутизны фронта оказывается в несколько раз выше, чем у амплитуды. На кривых кумулятивной вероятности также наблюдается максимум, положение которого соответствует расстоянию образования первых каустик.

В численном моделировании удобно проводить качественный и количественный анализ явлений, варьируя значения входных параметров модели в некотором диапазоне или даже отключая отдельные физические эффекты. Здесь главным образом исследовалось влияние нелинейных эффектов путем выполнения расчетов с различной амплитудой начальной N -волны (от 50 Па до 400 Па), а также с выключенным нелинейным оператором (линейная задача). Было показано, что степень проявления нелинейных эффектов относительно слабо влияет на кривые среднего значения и стандартного отклонения амплитуды. Существенные отличия можно обнаружить на кривых кумулятивной

вероятности, где разница в максимумах вероятности может достигать двух раз (от 2% до 4% для двукратного превышения номинального уровня амплитуды). Это объясняется эффектом усиления фокусировки в случайных каустиках за счет большей крутизны фронта при большей начальной амплитуде волны [91]. Для статистики крутизны фронта результаты, полученные в линейной модели, показывают, что среднее значение крутизны фронта довольно быстро уменьшается, а величина кумулятивной вероятности удвоения крутизны очень мала и составляет меньше 1%. Таким образом, за счет рассеяния на неоднородностях разных масштабов исходный крутой фронт, без поддержки нелинейными эффектами, быстро размывается. При наличии нелинейных эффектов уровень флуктуаций крутизны сильно зависит от степени их проявления и максимум стандартного отклонения и кумулятивной вероятности отличается в несколько раз в зависимости от начальной амплитуды N-волны. Также можно наблюдать, что чем сильнее нелинейные эффекты, тем медленнее спадает интенсивность флуктуаций амплитуды и крутизны фронта с расстоянием. Таким образом, в условиях модельного лабораторного эксперимента нелинейные эффекты играют важную роль в поддержании достаточно крутого фронта волны и препятствовании его размыванию вплоть до больших расстояний при распространении в случайно-неоднородном слое.

Интересно также отметить, что хотя моделирование выполнялось в двумерной геометрии, а эксперимент по постановке был трехмерным, в количественном отношении статистические результаты, полученные теоретически и экспериментально, оказались довольно близки [91, 93]. Это объясняется тем, что, как было показано впоследствии другими исследователями с использованием трехмерного моделирования [96], отличия между двумерной и трехмерной моделями на статистических результатах в основном проявляются в области высокоамплитудных «хвостов» распределений, которым соответствуют малые вероятности.

Разработанную численную модель можно относительно легко перенести на случай анализа распространения N-волны в реальных масштабах, поскольку почти все происходящие физические процессы аналогичны. Длительность реальной N-волны составляет обычно от 100 до 300 мс, поэтому ввиду достаточно низких частот такого импульса термовязкое поглощение уступает место релаксационным процессам. В работе [97] было проведено подобное исследование на основе описанной выше модели, в котором, кроме уже упоминавшихся характеристик нелинейного импульса (амплитуда и крутизна фронта), проводился анализ шумовой метрики. Такого рода метрики используются для нормировки уровней шума от сверхзвуковых самолетов в соответствующих регуляторных документах. Здесь рассматривалась стандартная метрика PL (Perceived loudness) Mark VII, которая хорошо коррелирует с субъективным уровнем шума

и практически всегда рассчитывается в исследованиях по данной теме. Как и при анализе результатов в масштабах лабораторных экспериментов, здесь для оценки влияния нелинейных эффектов в численном моделировании варьировалась амплитуда начальной N-волны в диапазоне от 10 до 40 Па, что соответствует реалистичным уровням давления для сверхзвуковых самолетов различных моделей. Было показано, что качественно статистика амплитуды и крутизны фронта при моделировании в реальном масштабе ведет себя аналогично результатам, полученным для параметров модельного эксперимента. Одно качественное отличие, вызванное меньшим уровнем поглощения в реальных масштабах, чем в модельных экспериментах, наблюдалось для среднего значения амплитуды, которое не уменьшалось с пройденным расстоянием, а увеличивалось до небольшого максимума (от +10% до +30% к номиналу) после прохождения расстояний образования сильных каустик. По результатам моделирования было получено, что среднее значение метрики PL Mark VII в турбулентной среде незначительно уменьшается на 1–2 дБ по сравнению с номинальным уровнем в однородном воздухе. Было показано, что при низком и умеренном уровне амплитуды начальной N-волны (10 и 20 Па) статистические результаты для нормированной шумовой метрики практически не отличаются. При этих условиях стандартное отклонение достигает максимума в 3 дБ на расстоянии формирования наиболее сильных каустик, а кумулятивная вероятность превышения номинального уровня шума на 6 дБ в максимуме не превышает 3%. При повышении амплитуды N-волны до 40 Па происходит небольшое увеличение и стандартного отклонения (до 4 дБ), и кумулятивной вероятности шумовой метрики (до 4%). При этом уровне амплитуды также существенно возрастает уровень флуктуаций амплитуды и крутизны фронта. Эти явления, по всей видимости, связаны с ростом высокочастотной части спектра импульса из-за уменьшения ширины ударного фронта. При этом высокочастотный край спектра волны смещается в сторону наиболее чувствительной области частот человеческого уха, что приводит к возрастанию громкости в области случайных фокусов, которые сильно влияют на уровень флуктуаций шумовой метрики.

Таким образом, в задаче о распространении импульса с крутыми фронтами в случайно-неоднородной среде численное моделирование с использованием уравнения ХЗК позволило выявить ряд важных количественных и качественных особенностей акустического поля нелинейной волны и его статистических характеристик. Количественные данные, полученные методами численного моделирования, были подтверждены как результатами модельных экспериментов, так и совокупностью данных из литературы, полученных в натуральных условиях при облетах сверхзвуковых самолетов в многочисленных тестах [98].

3.2. Регистрация нелинейных импульсов в воздухе оптическими методами

Как уже было сказано выше, основная проблема аэроакустических измерений в лабораторных экспериментах заключалась в том, что конденсаторные микрофоны, которые использовались для регистрации импульсных сигналов, обладают ограниченной полосой пропускаемых частот [95]. В результате фильтрации ударные фронты N -волн сильно сглаживались и ширина ударного фронта завывшалась почти на порядок. Также в измеренном сигнале присутствовали осцилляции из-за резонансов мембраны микрофона на частотах около 150 кГц. Поэтому в ходе работы над модельными лабораторными экспериментами было развито отдельное направление по оптической регистрации слабых ударных импульсов от искрового источника. Численное моделирование процесса распространения сферической N -волны с использованием модифицированного уравнения Бюргерса здесь также играло большую роль. Так, задание некоторого начального профиля на определенном расстоянии вблизи от источника позволяло получить профили на любых других расстояниях, больших начального. В результате появлялась возможность соотносить серию измерений профилей N -волны на различных расстояниях от источника с теорией.

Были опробованы несколько различных оптических методов. В простом теневом методе область, через которую распространяется сферическая N -волна, просвечивалась параллельным пучком белого света от короткой искровой вспышки и на выходе регистрировалась теневая картина [99]. Данный метод чувствителен к резким перепадам оптического показателя преломления на ударных фронтах, и с его помощью удалось измерить ширину фронта, которая хорошо соответствовала значениям, полученным при моделировании уравнения Бюргерса для сферической N -волны. Для восстановления всего профиля акустической волны был применен шпирен метод, который в целом показал хорошие результаты за исключением эффекта смазывания ударного фронта на изображении из-за недостаточного быстродействия цифровой камеры [100]. Наилучшие данные были получены в установке, построенной на основе интерферометра Маха–Цендера, использованного в режиме полос бесконечной ширины [101]. Временное разрешение определялось шириной лазерного луча в месте касания фронта сферической волны и составило 0.4 мкс, что не менее чем в 6 раз превосходит возможности коммерческих конденсаторных микрофонов (например, V&K тип 4138, 1/8 дюйма). Численное моделирование уравнения Бюргерса для сферических волн использовалось для оценки ошибки, получаемой при выполнении процедуры восстановления профиля волны по данным оптического сигнала, проинтегрированного вдоль лазерного луча, проходящего через радиально-симметричное распределение акустического давления. Отдельный

численный алгоритм, являющийся частью процедуры восстановления профиля, был реализован для выполнения обратного преобразования Абеля [100].

Качество восстановления экспериментального профиля нелинейной волны оказалось настолько высоким, что результаты оптических измерений на основе интерферометра Маха–Цендера использовались как эталонные в процедуре определения амплитудно- и фазочастотного откликов акустических микрофонов. Изначально были откалиброваны стандартные микрофоны (V&K тип 4138, 1/8 дюйма) [101], а впоследствии оптическая установка использовалась при работе с прототипами перспективных высокочастотных микрофонов с теоретической полосой до 1 МГц, изготовленных по технологии МЭМС (микроэлектромеханические системы) [102].

В дальнейшем интерферометр использовался для экспериментального исследования процесса отражения слабой ударной волны, генерируемой искровым источником в модельных экспериментах, при условии формирования «ножки Маха» [103]. Здесь были измерены профили на различных высотах над плоской поверхностью и построена картина отражения на нескольких расстояниях от искрового источника. По этим данным была определена высота «ножки Маха» и отслежена ее динамика с увеличением пройденного волной расстояния вдоль поверхности. Экспериментальные данные оптических измерений процесса нерегулярного отражения нелинейной волны сравнивались с результатами прямого численного моделирования уравнений сжимаемой жидкости и оказались в хорошем согласии с теорией [104, 105].

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ

Развитые в лаборатории методы численного моделирования однонаправленных нелинейных волновых уравнений использовались для исследования классической проблемы нелинейной акустики, связанной с взаимодействием высокоамплитудных волн разных частот. В начале 1960 гг. независимо П. Вестервельтом в США [5] и В.А. Зверевым и А.И. Калачевым в СССР [106] была предложена концепция параметрической антенны бегущей волны. При нелинейном взаимодействии в среде двух высокочастотных гармонических волн накачки высокой интенсивности происходит каскадный процесс генерации множества спектральных компонент. На некотором расстоянии от источника, в силу увеличивающегося с частотой поглощения в среде, волны накачки в значительной степени затухают, и далее продолжает распространяться лишь низкочастотная компонента — волна разностной частоты (ВРЧ). К преимуществам такой генерации низкочастотного излучения относятся узкая диаграмма направленности в пределах нескольких градусов с отсутствием боковых ле-

пестков, а также возможность использования высокочастотных излучателей небольших размеров по сравнению с длиной волны низкочастотного излучения [107]. Главный недостаток параметрического способа генерации излучения на разностной частоте состоит в его относительно низкой эффективности, поскольку энергия волн накачки распространяется в основном вверх по спектру, где подвергается затуханию, а вниз спектра, т.е. в ВРЧ, уходит лишь небольшая часть.

Тем не менее интерес к исследованию особенностей нелинейных взаимодействий в параметрических излучателях до сих пор не угасает. Так, параметрические излучатели низкочастотного звука находят применение в гидроакустических задачах по изучению дна, зондированию океана на длинных трассах и подводной связи [108], в вопросах создания высоконаправленных звуковых пучков в воздухе в системах активного шумоподавления и системах таргетного общения с пользователем в библиотеках и музеях [109], а также в медицинских приложениях, например для ультразвуковой визуализации на разностной частоте [110].

При теоретическом описании процессов генерации и распространения волны разностной частоты обычно используется однонаправленное уравнение Вестервельта [5] или параболическое уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК) [4] при условии, что дифракционная расходимость как высокочастотных волн накачки, так и генерируемой низкочастотной компоненты составляет менее 15° [20]. Современные исследования параметрических взаимодействий основаны на численном моделировании, поскольку аналитические решения удалось получить лишь с использованием различных приближений при описании нелинейных и дифракционных эффектов: в квазилинейном приближении описания взаимодействия волн накачки [5, 107], с приближенным описанием разрывов в профиле нелинейной волны [111], а также при учете упрощенных граничных условий на излучателе [5, 107]. Однако даже существующие численные алгоритмы на основе уравнений ХЗК или Вестервельта [112–116] были построены для квазилинейного подхода и/или осевой симметрии пучка либо для относительно малого отношения частоты накачки к разностной частоте и умеренных нелинейных условий распространения [117].

В лаборатории LIMU недавно был разработан трехмерный полный нелинейный алгоритм решения задачи о параметрической генерации волны разностной частоты [118] для источников с произвольным отношением частот накачки к разностной частоте и степенью проявления нелинейных эффектов, а также для реалистичных условий на излучателе с точным описанием дифракционных эффектов в узконаправленных пучках как для волн накачки, так и для волны разностной частоты [119]. Численно решалось уравнение ХЗК в спектральном представлении с использованием метода прореживания спектра [120], апробация которого проводи-

лась на основе решения уравнения Бюргерса для плоской нелинейной задачи.

Суть метода прореживания спектра (рис. 5, а) основана на его особенностях при двухчастотном взаимодействии и состоит в следующем. Как уже было упомянуто в описании алгоритмов решения однонаправленных уравнений в задачах медицинского ультразвука, для корректного учета нелинейных взаимодействий, особенно при условии формирования ударных фронтов, в численном алгоритме необходимо использовать около тысячи или хотя бы несколько сотен гармоник. В данном случае речь идет о гармониках высокочастотных волн накачки. Принимая во внимание соотношение между разностной частотой и частотами волн накачки, которое может достигать до нескольких десятков, число необходимых гармоник возрастает до десятков тысяч. Такое большое количество спектральных компонент приводит к фактической невозможности выполнения трехмерного моделирования как из-за большого объема требуемой оперативной памяти для хранения массивов данных, так и из-за длительности расчетов. Однако при детальном рассмотрении спектров нелинейной волны при двухчастотной накачке выясняется, что большая часть спектральных компонент имеет малую амплитуду и дают крайне незначительный вклад в генерацию ВРЧ. Это позволяет оптимизировать спектральный алгоритм решения уравнения ХЗК путем выбора по пороговому критерию некоторого ограниченного подмножества гармоник из полного дискретного спектра. То есть, если амплитуда какой-либо гармоники оказывается выше заданного порога, то она учитывается в алгоритме, если нет — то отбрасывается. В модели дополнительно вводилось искусственное поглощение, которое позволяло быстрее уменьшать амплитуды самых высоких гармоник, при этом практически не влияя на низкочастотную часть спектра. Согласно предложенному методу, на некотором расстоянии от источника был определен набор из пятидесяти высокоамплитудных спектральных компонент, вносящих наибольший вклад в генерацию низкочастотного излучения. Ошибка, возникающая из-за урезания спектра, была оценена путем сравнения численных решений уравнения Бюргерса для плоской волны с бигармоническим начальным профилем, рассчитанных на основе алгоритмов с полным спектром и с оптимизированным. В результате было получено, что ошибка не превышает 2% на всех рассматриваемых расстояниях, составляющих несколько характерных нелинейных длин [120]. Были исследованы альтернативные критерии выбора набора гармоник для прореживания спектра, которые, однако, не дали лучших результатов [121].

В трехмерной задаче прореживание спектра позволило существенно (на порядки) сократить объем вычислений и сделало возможным проводить моделирование в разумные сроки (около нескольких суток для одного расчета). В методе расщепления по

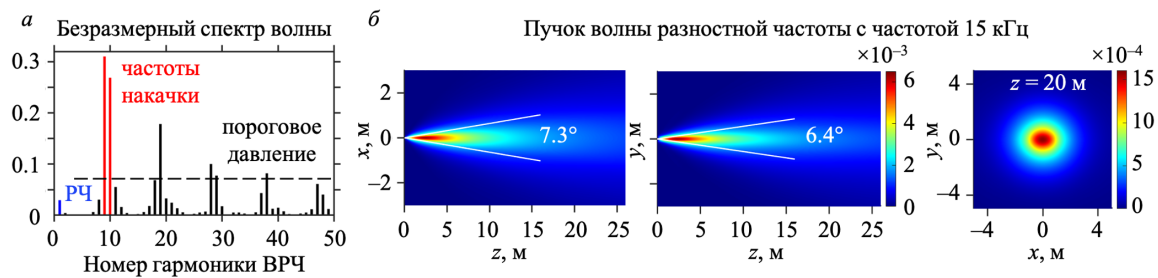


Рис. 5. Численное моделирование параметрического излучения на основе уравнения ХЗК в спектральном представлении поля давления: *a* — иллюстрация к методу прореживания спектра по порогу, *b* — двумерные продольные (x, z) и (y, z) и поперечное (x, y) распределения поля давления волны разностной частоты с частотой 15 кГц

физическим факторам для уравнения ХЗК уменьшение числа гармоник пропорционально уменьшает время расчета операторов дифракции и поглощения. Особенно выигрышным метод прореживания спектра оказался при оптимизации спектрального алгоритма для оператора нелинейности, поскольку число вычислительных операций в этом алгоритме пропорционально квадрату числа гармоник (9). К сожалению, оптимизация расчетов импульсных сигналов, спектр которых изначально широкий, таким способом невозможна, и здесь нужно искать другие подходы.

Разработанный алгоритм был использован для расчета параметрической антенны бегущей волны (рис. 5, *b*) на примере подводного многоэлементного двухканального излучателя волн накачки эллиптической формы с соотношением осей 1.69 [122]. Частота одной из волн накачки была фиксированной на 150 кГц, а частота второй компоненты варьировалась в интервале от 135 до 145 кГц, что соответствует ВРЧ на частотах от 5 до 15 кГц. Численное моделирование позволило уточнить многие эффекты, которые ранее были исследованы в основном качественно на основе приближенных аналитических моделей [107]. Так, из аналитических решений следует, что в плоской волне амплитуда ВРЧ растет с частотой линейно, пока не начинает сказываться поглощение волн накачки. При генерации ВРЧ в пучке наблюдается рост амплитуды на оси быстрее, чем линейный, поскольку при более высоких частотах ВРЧ дифракционная расходимость сказывается слабее. Показан эффект симметризации поля ВРЧ, создаваемого волнами накачки от излучателя эллипсоидальной формы. Так, хотя ширина диаграмм направленности пучков волн накачки для данного излучателя отличается в 1.6 раза для двух взаимно-перпендикулярных направлений в поперечной плоскости, для ВРЧ данное отношение падает до 1.14. Также ширина диаграммы направленности ВРЧ уширяется почти в два раза при переходе от квазилинейного режима взаимодействия волн накачки к сильно нелинейным режимам. Это объясняется тем, что генерация волны разностной частоты в этом случае происходит в основном в ближнем поле пучка волн накачки. Соответственно, размеры пучка разностной частоты будут малы и эффекты дифракционной рас-

ходимости будут проявляться сильнее.

Исследовался вопрос об эффективности генерации ВРЧ исходя из двух критериев: рассматривалось отношение амплитуды ВРЧ на оси пучка к амплитуде волн накачки на излучателе (относительная амплитуда), а также отношение полной акустической мощности пучка для ВРЧ к полной мощности пучков волн накачки. Показано, что относительная амплитуда сначала растет линейно с ростом амплитуды волн накачки, в соответствии с квазилинейной моделью, а затем, при дальнейшем увеличении интенсивности волн накачки, переходит к насыщению, что согласуется с аналитическими оценками [111]. Насыщение наступает из-за сильного увеличения нелинейного поглощения при образовании ударных фронтов. При этом в абсолютных единицах акустического давления насыщение на оси пучка соответствует продолжающемуся линейному росту амплитуды ВРЧ. Относительная мощность пучка ВРЧ при этом продолжает расти без насыщения, поскольку с увеличением амплитуды волн накачки к генерации подключается периферия пучка. Для ВРЧ с частотой 15 кГц отношение мощностей в сильно нелинейном режиме составило 0.05%.

Таким образом, в серии работ было продемонстрировано, что полный нелинейный трехмерный подход на основе уравнения ХЗК позволяет детально исследовать количественные характеристики процесса параметрической генерации низкочастотного излучения и определять оптимальные параметры излучения волн накачки с целью увеличения выходной мощности на разностной частоте при сохранении желаемой направленности низкочастотного пучка.

5. МЕТОДЫ ШИРОКОУГОЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Основные подходы к построению широкоугольных параболических моделей

В предыдущих разделах обзора, кроме акустических задач, в основном было рассмотрено применение однонаправленных численных моделей для изучения нелинейных волновых процессов в од-

нородных средах. Однако во многих практически важных случаях большой интерес представляет исследование влияния неоднородностей на распространение волн, за счет которых пространственные распределения волнового поля могут существенно меняться по сравнению со случаем однородной среды [123]. Так, например, в медицинских приложениях мощного ультразвука фокусировка пучков в область терапевтического воздействия осуществляется через слои мягких биологических тканей, которые с акустической точки зрения представляют собой слабонеоднородную среду [124]. Неоднородности скорости звука вносят aberrации, которые приводят к уменьшению качества фокусировки пучка и проявляются в виде снижения амплитуды в фокусе и смещения его положения [125]. Эффект искажения акустического поля делает терапевтическое воздействие плохо прогнозируемым и в каких-то случаях даже не позволяет его осуществить, если необходимые характеристики волны в фокусе не достигаются [126]. Поэтому данные волновые явления требуют подробного изучения с использованием соответствующих теоретических моделей с учетом неоднородностей.

Однонаправленные волновые модели с некоторыми оговорками могут быть обобщены на случай неоднородных сред, когда скорость звука, плотность среды, а также другие параметры (коэффициенты нелинейности и поглощения) являются функциями пространственных координат [127]. Так, следует отметить, что при распространении исходной волны преимущественно в одном направлении, наличие неоднородностей приводит не только к искажению падающей на них волны, но и к генерации отраженных волн, бегущих в обратном направлении. Строго говоря, однонаправленные модели в этом случае перестают в полной мере описывать волновой процесс. Однако если неоднородности достаточно слабые и плавные, то амплитуда отраженных волн оказывается мала и ими можно пренебречь. Тогда применение однонаправленных моделей для описания распространения волн в неоднородных средах оправдано и не приводит к большим ошибкам. Если взять за основу уравнение Вестервельта в неоднородной среде, то наибольшую трудность при его решении представляет дифракционная часть, которая эквивалентна обычному волновому уравнению во временном или уравнению Гельмгольца в частотном представлении поля давления. Поэтому здесь для построения однонаправленной модели можно воспользоваться методами широкоугольного параболического приближения, которое часто применяется при рассмотрении широкого класса задач об однонаправленном распространении волн в неоднородных средах в различных областях акустики [128, 129], в геофизике [11], а также в радиофизике [130] и в оптике [131].

Если ось z выбирается в качестве выделенного (преимущественного) направления распространения волн, то уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды поля давления p принято за-

писывать в операторном виде [132]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 \widehat{Q}^2 p = 0, \quad (28)$$

где определен оператор $\widehat{Q}^2 = 1 + \widehat{L}$, а оператор \widehat{L} — это дифференциальный оператор, содержащий лапласиан по поперечным координатам x и y , а также функции, описывающие неоднородности скорости звука c и плотности среды ρ [133]:

$$\widehat{L} = n_a^2 - 1 + \frac{\rho}{k_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right). \quad (29)$$

Здесь $k_0 = \omega_0/c_0$ — это референсное волновое число, которое соответствует референсному значению скорости звука c_0 , а $n_a = c_0/c$ — акустический показатель преломления в среде с распределением скорости звука $c(x, y, z)$. Здесь рассматривается случай плавных изменений неоднородностей вдоль оси z , поэтому локально эту зависимость можно не учитывать. В общем случае для учета плавных продольных изменений свойств среды вводится специальный нормирующий множитель, зависящий от параметров среды и связывающий давление и новую переменную, для которой выводится однонаправленное уравнение [134].

Для описания однонаправленного распространения волн часто используется метод нормальных мод [135]. Согласно этому методу поле давления в уравнении Гельмгольца (28) может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод:

$$p = \sum_m p_m(z) \psi_m(x, y), \quad (30)$$

где функции $p_m(z)$ пропорциональны $\exp(ik_m z)$, а нормальные моды ψ_m и собственные значения k_m^2 удовлетворяют уравнению:

$$k_0^2 (n_a^2 - 1) \psi_m + \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \psi_m = k_m^2 \psi_m. \quad (31)$$

При этом сами моды еще удовлетворяют условию ортогональности:

$$\iint_D \rho^{-1} \psi_m(x, y) \psi_n(x, y) dx dy = \delta_{mn}, \quad (32)$$

где D — область на поперечной плоскости (x, y) , в которой решается задача, δ_{mn} — символ Кронекера, $m > 0$, $n > 0$ — номера мод. В краткой записи с использованием классического дифференциального оператора $k_0^2 \widehat{Q}^2$ задача на собственные функции и собственные значения представлена в виде:

$$k_0^2 \widehat{Q}^2 \psi_m = k_m^2 \psi_m. \quad (33)$$

Применяя оператор $k_0^2 \widehat{Q}^2$ к функции ψ_m целое число раз $J > 0$, получим:

$$\left(k_0^2 \widehat{Q}^2\right)^J \psi_m = \left(k_m^2\right)^J \psi_m. \quad (34)$$

Поэтому для некоторой функции $f(X)$, которая может быть разложена в сходящийся ряд Тейлора, можно записать:

$$f\left(k_0^2 \widehat{Q}^2\right) \psi_m = f\left(k_m^2\right) \psi_m. \quad (35)$$

В частном случае функции $f(X) = \sqrt{X}$ при $X > 0$ и $X < 2$ получим:

$$k_0 \widehat{Q} \psi_m = k_m \psi_m, \quad (36)$$

где $\widehat{Q} = \sqrt{1 + \widehat{L}}$ — псевдодифференциальный оператор. Вообще у оператора $k_0^2 \widehat{Q}^2$ могут быть и отрицательные собственные значения, которые соответствуют нераспространяющимся волнам (тогда k_m мнимое). В этом случае выбирается та ветвь функции квадратного корня, которая обеспечивает затухание этих волн с расстоянием.

При помощи модового представления поля можно вывести однонаправленное уравнение. Например, если рассмотреть одну m -ю моду, то поле для нее:

$$p = e^{ik_m z} \psi_m(x, y). \quad (37)$$

Дифференцирование по z дает:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = ik_m e^{ik_m z} \psi_m(x, y). \quad (38)$$

Используя определение оператора \widehat{Q} (36), можно переписать правую часть данного уравнения и получить однонаправленное псевдодифференциальное уравнение для одной моды:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = ik_0 \widehat{Q} p. \quad (39)$$

Поскольку каждое решение исходного уравнения (28) может быть представлено в виде суперпозиции мод, то полученное уравнение также справедливо для волны, являющейся решением и распространяющейся в сторону $z > 0$. В теории широкоугольных параболических уравнений при проведении дальнейших выкладок принято пользоваться более кратким операторным формализмом, который основывается на модовом представлении поля давления.

Так, уравнение Гельмгольца в операторном виде может быть факторизовано на два сомножителя:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_0 \sqrt{1 + \widehat{L}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - ik_0 \sqrt{1 + \widehat{L}}\right) p = 0. \quad (40)$$

Здесь в правой части в плавно-неоднородной среде обычно пренебрегают коммутатором оператора $\partial/\partial z$ и псевдодифференциального оператора

$\widehat{Q} = \sqrt{1 + \widehat{L}}$. Отсюда следуют два уравнения, одно из которых соответствует волнам, распространяющимся в сторону $z > 0$, а другое — в сторону $z < 0$ [136]. Выбирая только одно направление распространения волн в сторону положительных z , для медленно меняющейся огибающей акустического давления $\varphi = p \exp(-ik_0 z)$ записывается однонаправленное эволюционное уравнение [137]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = ik_0 \left(\sqrt{1 + \widehat{L}} - 1\right) \varphi. \quad (41)$$

Из-за наличия псевдодифференциального оператора $\widehat{Q} = \sqrt{1 + \widehat{L}}$ в правой части это уравнение решить довольно трудно, т.к. тогда потребовалось бы найти все моды и соответствующие собственные значения, что в общем случае является сложной вычислительной задачей. Поэтому в практике построения численных моделей прибегают к различным приближениям оператора $\widehat{Q} \approx \widehat{Q}_a$, чтобы избежать решения задачи на собственные значения и использовать другие, менее трудоемкие методы решения [138]. С точки зрения модового разложения решения применение приближенного оператора \widehat{Q}_a означает следующее. Во-первых, уравнение (33) переписывается в виде

$$\widehat{L} \psi_m = \frac{k_m^2 - k_0^2}{k_0^2} \psi_m, \quad (42)$$

согласно которому собственное значение оператора \widehat{L} есть $\xi_m = (k_m^2 - k_0^2)/k_0^2$. Используя те же рассуждения, что и для оператора $k_0^2 \widehat{Q}^2$, можно показать, что для некоторой функции $f(X)$ справедливо

$$f(\widehat{L}) \psi_m = f\left(\frac{k_m^2 - k_0^2}{k_0^2}\right) \psi_m. \quad (43)$$

Поэтому при замене точного оператора $\widehat{Q} = \sqrt{1 + \widehat{L}}$ на его приближение $\widehat{Q}_a(L)$ в уравнении (39) и подстановке решения в виде одной моды $p = e^{ik_m z} \psi_m$ получим:

$$\tilde{k}_m = k_0 Q_a \left(\frac{k_m^2 - k_0^2}{k_0^2}\right). \quad (44)$$

Здесь $Q_a(\xi)$ — это аппроксимирующая функция к $\sqrt{1 + \xi}$, а \tilde{k}_m — приближенное значение волнового числа. Таким образом, в решении приближенного однонаправленного уравнения моды ψ_m не меняются, а точные волновые числа k_m заменяются на их приближенные значения \tilde{k}_m , соответствующие той или иной аппроксимирующей функции.

Например, если воспользоваться линейным разложением $\sqrt{1 + \widehat{L}} \approx 1 + \widehat{L}/2$, то можно получить стандартное параболическое уравнение дифракции [139]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{ik_0}{2} \widehat{L} \varphi, \quad (45)$$

которое уже обсуждалось выше для случая однородной среды ($n_a = 1$, $\rho = \text{const}$). Разложение оператора \widehat{Q} в ряд Тейлора до более высоких порядков по \widehat{L} для увеличения точности аппроксимации и расширения углового диапазона приближенного уравнения оказывается непродуктивным [140] и в основном используются аппроксимации Падэ в виде произведения или суммы рациональных функций [141]:

$$\widehat{Q} \approx \prod_{l=1}^{N_l} \frac{1 + \mu_l \widehat{L}}{1 + \nu_l \widehat{L}} = 1 + \sum_{l=1}^{N_l} \frac{\alpha_l \widehat{L}}{1 + \beta_l \widehat{L}}, \quad (46)$$

где целое число $N_l > 0$ определяет порядок аппроксимации $2N_l$, а (μ_l, ν_l) и (α_l, β_l) , $l = 1 \dots N_l$ — соответствующие наборы коэффициентов, которые находятся различными способами [142]. Например, для порядка $N_l = 1$ известно одно из первых широкоугольных уравнений [143]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{ik_0}{2} \frac{\widehat{L}}{1 + \widehat{L}/4} \varphi. \quad (47)$$

Далее однонаправленное уравнение аналогично тому, как это делалось со стандартным параболическим уравнением, может быть аппроксимировано на основе обобщенной схемы Кранка–Николсон [143]:

$$\left(1 - \frac{\zeta}{2} (\widehat{Q} - 1)\right) \varphi^{m+1} = \left(1 + \frac{\zeta}{2} (\widehat{Q} - 1)\right) \varphi^m, \quad (48)$$

где φ^{m+1} — это поле на следующем шаге $z + \Delta z$, φ^m — поле на текущем шаге z , а $\zeta = ik_0 \Delta z$ — безразмерный комплексный параметр, по модулю равный безразмерному шагу сетки вдоль оси z . После подстановки конкретной Падэ-аппроксимации оператора \widehat{Q} в уравнение (48) и дальнейшей факторизации операторов в левой и правой частях можно получить серию итоговых уравнений вида

$$\left(1 + \tilde{\nu}_l \widehat{L}\right) \tilde{\varphi}^{(l+1)} = \left(1 + \tilde{\mu}_l \widehat{L}\right) \tilde{\varphi}^{(l)} \quad (49)$$

с новым набором коэффициентов $\tilde{\nu}_l$ и $\tilde{\mu}_l$, которые решаются различными численными методами (конечными разностями, конечными элементами). Здесь $\tilde{\varphi}^{(l)}$ — это промежуточные поля при решении серии из N_l уравнений, которая инициализируется полем φ^m на текущем шаге по z .

Более прогрессивный подход состоит в использовании формального решения однонаправленного уравнения

$$\varphi^{m+1} = \exp \left[\zeta \left(\sqrt{1 + \widehat{L}} - 1 \right) \right] \varphi^m, \quad (50)$$

полученного после интегрирования уравнения (41) по z . На языке модового представления это решение выглядит так:

$$\varphi^{m+1} = \sum_l a_l \psi_l \exp [\zeta (k_l/k_0 - 1)], \quad (51)$$

где a_l — коэффициенты разложения поля φ^m по нормальным модам ψ_l с соответствующими волновыми числами k_l . Ранее это решение было названо операторной плоской волной, которая есть совокупность нормальных мод, бегущих в одну сторону [10]. В современной литературе в основном используется понятие пропагаторного оператора или, кратко, пропагатора:

$$\widehat{H} = \exp \left[\zeta \left(\sqrt{1 + \widehat{L}} - 1 \right) \right], \quad (52)$$

аргументами которого являются псевдодифференциальный оператор \widehat{Q} и безразмерный параметр ζ . Согласно (51) операторному пропагатору \widehat{H} соответствует комплекснозначная функция собственных значений ξ оператора \widehat{L} :

$$H(\xi, \zeta) = \exp \left[\zeta \left(\sqrt{1 + \xi} - 1 \right) \right]. \quad (53)$$

В однородной среде это есть в точности пропагатор метода углового спектра для $\xi = -(k_x^2 + k_y^2)/k_0^2 = -\sin^2 \theta$, где θ — это угол, под которым плоская волна с волновым вектором $(k_x, k_y, k_z = \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2)/k_0^2})$ распространяется к оси z . График амплитуды и фазы пропагатора изображен на рис. 6, а, б пунктирной линией. Интервал $-1 < \xi \leq 0$ соответствует распространяющимся волнам, а область $\xi \leq -1$ — нераспространяющимся неоднородным волнам, которые экспоненциально затухают с ростом z . Область $\xi > 0$ не задействована в однородной среде, т.к. здесь $\xi = 0$ — это максимальное собственное значение, соответствующее плоской волне с волновым вектором $(0, 0, k_0)$, бегущей строго вдоль оси z . Однако область $\xi > 0$ проявляется при наличии неоднородностей с показателем преломления $n_a > 1$.

Так же, как и оператор \widehat{Q} в уравнении (41), пропагатор в формальном решении может быть напрямую заменен Падэ-аппроксимациями заданного порядка (N_l, N_l) [29, 144]

$$\varphi^{m+1} = \prod_{l=1}^{N_l} \frac{1 + \tilde{\mu}_l \widehat{L}}{1 + \tilde{\nu}_l \widehat{L}} \varphi^m, \quad (54)$$

где коэффициенты $\tilde{\mu}_l = \tilde{\mu}_l(\zeta)$ и $\tilde{\nu}_l = \tilde{\nu}_l(\zeta)$ являются функциями безразмерного шага. Такая запись эквивалентна приближению для функции $H(\xi, \zeta)$:

$$H(\xi, \zeta) \approx \prod_{l=1}^{N_l} \frac{1 + \tilde{\mu}_l \xi}{1 + \tilde{\nu}_l \xi}. \quad (55)$$

Полученная в результате аппроксимации форма пропагатора (54) предполагает решение уравнений такого же вида (49), как и при использовании обобщенной схемы Кранка–Николсон для однонаправленного уравнения. Альтернативно вместо Падэ-аппроксимаций в виде произведения могут исполь-

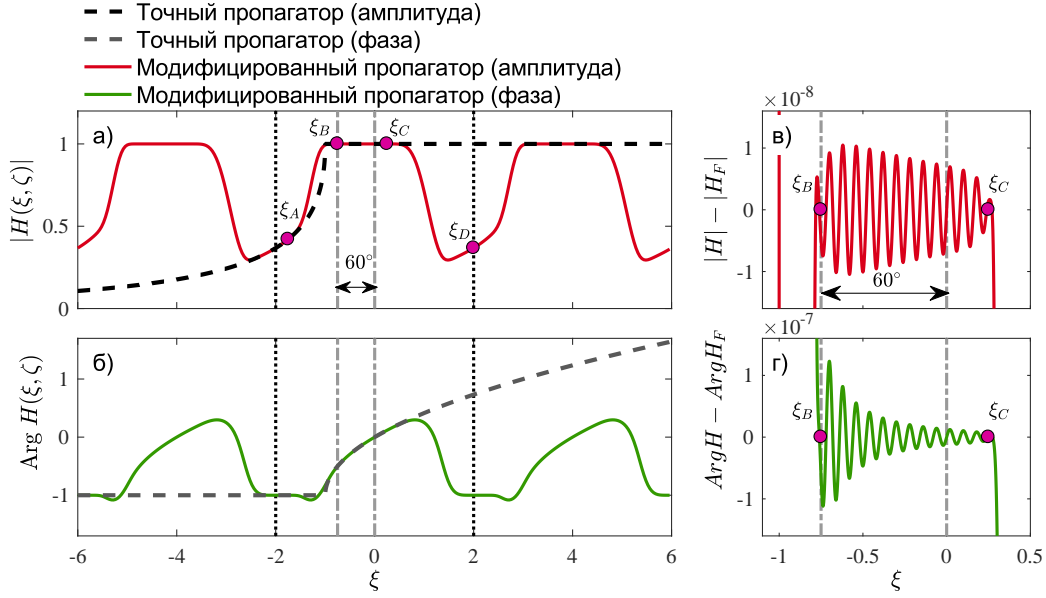


Рис. 6. Метод построения широкоугольной однонаправленной волновой модели на основе операторного ряда Фурье: *a, б* — амплитуда и фаза точного (штриховая линия) и периодически продолженного модифицированного пропагатора (сплошная линия) при Фурье-разложении в окне шириной $\xi_L = 4$ для модели с $\theta_{\max} = 60^\circ$ при $|\zeta| = 1$; *в, г* — ошибка аппроксимации по амплитуде и по фазе при разложении модифицированного пропагатора в конечный ряд Фурье с числом гармоник $2N = 100$. Вертикальные штрихпунктирные линии показывают угловой диапазон распространяющихся волн, представленных в модели. Вертикальные пунктирные линии показывают границы одного периода модифицированного пропагатора

зоваться Падэ-аппроксимации в виде суммы [7]:

$$\varphi^{m+1} = \varphi^m + \sum_{l=1}^{N_l} \frac{\bar{\alpha}_l \hat{L}}{1 + \bar{\beta}_l \hat{L}} \varphi^m, \quad (56)$$

которые приводят к необходимости решения аналогичного рода уравнений $(1 + \bar{\beta}_l \hat{L}) \tilde{\varphi}^{(l)} = \bar{\alpha}_l \hat{L} \varphi^m$, отличающихся от уравнений вида (49) только правой частью. Особенностью Падэ-аппроксимаций в виде суммы является возможность решать N_l уравнений параллельно с последующим суммированием частных решений $\tilde{\varphi}^{(l)}$.

Как уже было сказано в первом разделе статьи при описании методов решения дифракционного оператора радиально-симметричного уравнения Вествервелта, метод широкоугольного параболического уравнения эффективен в случае двумерных задач, в которых имеется выделенное направление распространения волн и только одна поперечная координата. Это объясняется тем, что в двумерной задаче уравнения вида (49) являются одномерными, содержат производные только вдоль одной поперечной координаты и поэтому хорошо решаются стандартными численными методами. Так, например, при использовании метода конечных разностей второго порядка система уравнений для значений поля давления в узлах численной сетки имеет трехдиагональную матрицу и легко решается методом прогонки [30, 143]. В трехмерных задачах, обсуждаемых в данном разделе, вопрос построения эффективной численной схемы гораздо более сложен.

Поскольку в трехмерных задачах поперечных ко-

ординат две (например, x и y в декартовой системе координат), то дифференциальный оператор \hat{L} состоит из суммы двух компонент:

$$\hat{L} = \hat{L}_x + \hat{L}_y, \quad (57)$$

каждая из которых содержит производные только по одной из этих двух координат. Например, при симметричном разбиении неоднородностей показателя преломления между \hat{L}_x и \hat{L}_y можно записать, что

$$\hat{L}_x = \frac{n_a^2 - 1}{2} + \frac{\rho}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (58)$$

и аналогичное выражение для \hat{L}_y . Вследствие этого применение даже простых конечно-разностных схем для уравнений типа (49)

$$(1 + \bar{\nu}_l (\hat{L}_x + \hat{L}_y)) \tilde{\varphi}^{(l+1)} = (1 + \bar{\mu}_l (\hat{L}_x + \hat{L}_y)) \tilde{\varphi}^{(l)}, \quad (59)$$

следующих из Падэ-аппроксимаций пропагатора (54), приводит к необходимости решения систем линейных уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами [145]. Хотя матрицы таких систем являются разреженными, они требуют более сложных методов решения, чем простые системы с трехдиагональными матрицами. Также большой проблемой является размер этих матриц, т.к. если вдоль оси x имеется N_x узлов численной сетки, а вдоль оси y — N_y узлов, то общее число уравнений составляет $N_x N_y$ с полным размером матрицы $N_x^2 N_y^2$. Например, в типовых задачах медицинского ультразвука

число уравнений $N_x N_y$ может достигать нескольких миллионов, что крайне усложняет прямое решение системы. В связи с этим разрабатываются итерационные методы решения систем уравнений данного вида [146], которые, однако, открывают дополнительные вопросы, связанные с устойчивостью схемы и скоростью сходимости, а также выбором хорошего начального приближения для поля давления [147]. В связи со сложностью итерационных методов исследуются другие подходы к построению численных схем для трёхмерного широкоугольного параболического уравнения.

Стоит отметить, что метод разделения переменных для уравнения (59) не работает напрямую, т.к. в левой части уравнения на неизвестное поле $\tilde{\varphi}^{(l+1)}$ действует оператор $\hat{L}_x + \hat{L}_y$, содержащий сумму производных вдоль взаимно перпендикулярных осей x и y , что приводит к появлению ошибки нулевого порядка при попытке разделения операторов. Для компенсации этой ошибки непосредственно в уравнении (59) известна итерационная схема с корректирующими слагаемыми, которая, однако, несвободна от недостатков и при некоторых значениях параметров сетки и Падэ-аппроксимаций является неустойчивой [148]. Поэтому в основном методы решения трёхмерного широкоугольного параболического уравнения опираются на использование идеи расщепления операторов. Так, часто встречается разложение точного пропагатора в виде трех пропагаторов [149]:

$$\hat{H} \approx \exp \left[\zeta \left(\hat{Q}_x - 1 \right) \right] \exp \left[\zeta \left(\hat{Q}_y - 1 \right) \right] \times \exp \left[\zeta \left(1 + \hat{Q} - \hat{Q}_x - \hat{Q}_y \right) \right]. \quad (60)$$

Здесь введены обозначения пседифференциальных операторов $\hat{Q}_x = \sqrt{1 + \hat{L}_x}$ и $\hat{Q}_y = \sqrt{1 + \hat{L}_y}$, действующих отдельно вдоль осей x и y . Расчет первых двух операторов производится с использованием метода дробных шагов Падэ и не представляет трудностей, т.к. каждый из них является однонаправленным пропагатором двумерной задачи и содержит только одномерные дифференциальные операторы вдоль отдельных направлений x и y . Оставшийся третий оператор с целью явного вычисления обычно раскладывается в ряд Тейлора до заданного порядка с образованием множества перекрестных операторов вида $\hat{L}_x^a \hat{L}_y^b$, где $a > 0$, $b > 0$ — целочисленные степени. При этом в перекрестных членах, вообще говоря, нужно следить за порядком операторов \hat{L}_x и \hat{L}_y в произведении, поскольку они не коммутируют друг с другом в неоднородной среде произвольного вида. Поскольку ряд Тейлора имеет ограниченный радиус сходимости, то в данной схеме дополнительно требуется реализация пространственных фильтров для подавления искусственно созданных растущих компонент волнового поля. Существуют и другие, похожие варианты расщепления точного пропагатора, отличающиеся представлением перекрестной части разложения [133, 150]. Таким образом, схемы расщепле-

ния являются довольно сложными в реализации и обычно требуют рассмотрения большого числа различных операторных слагаемых.

5.2. Новый метод аппроксимации пропагатора однонаправленного волнового уравнения на основе рядов Фурье

В связи с описанными выше трудностями вычислительного характера, возникающими в теории трёхмерных широкоугольных параболических уравнений, в лаборатории LIMU в настоящее время развиваются альтернативные методы построения широкоугольных параболических моделей, которые в некотором отношении проще имеющихся аналогов.

Основная идея нового метода состоит в отказе от традиционных Падэ-аппроксимаций пропагатора (54) и в использовании вместо них разложения функции пропагатора в конечный ряд Фурье в некотором конечном окне на оси собственных значений ξ [151]:

$$H(\xi, \zeta) \approx \sum_{k=-N}^N A_k e^{i B_k \xi}. \quad (61)$$

Здесь A_k — комплексные амплитуды фурье-разложения, а $B_k = 2\pi k / \xi_L$ — соответствующие «частоты» дискретного спектра для окна шириной ξ_L . Числа B_k не являются ни пространственными, ни временными частотами, а просто представляют собой набор безразмерных чисел, отстоящих друг от друга на заданный шириной окна разложения шаг $2\pi / \xi_L$. Замена ξ обратно на оператор \hat{L} позволяет получить представление пропагатора однонаправленного уравнения в виде операторного ряда Фурье [152]:

$$\hat{H} \approx \hat{H}_F = \sum_{k=-N}^N A_k e^{i B_k \hat{L}}. \quad (62)$$

В отмеченной выше работе [151] разложение пропагатора в ряд Фурье было промежуточным этапом для выполнения сглаживания функции пропагатора с последующим построением явной схемы на основе ряда Тейлора. За счет этого с одной стороны достигалась удовлетворительная аппроксимация спектров как распространяющихся, так и нераспространяющихся волн, а с другой стороны пропагатор сглаживался в окрестности точки $\xi = -1$. Здесь же основная выгода от использования такой формы представления пропагатора заключается в том, что каждый член ряда Фурье является простым экспоненциальным пропагатором

$$\hat{H}_E = e^{i B_k \hat{L}}, \quad (63)$$

который по своей структуре полностью аналогичен пропагатору стандартного параболического уравнения (45):

$$\hat{H}_P = e^{\zeta / 2 \hat{L}}. \quad (64)$$

Отличие заключается лишь в коэффициентах, стоящих при операторе \hat{L} : $\zeta/2$ для параболического уравнения и iB_k для экспонент в операторном ряде Фурье. Заметим также, что k -я положительная или отрицательная экспонента ряда может быть вычислена путем повторения k раз вычисления экспоненты для первой частоты спектра $B_{\pm 1}$:

$$e^{iB_k \hat{L}} = \left(e^{iB_1 \hat{L}} \right)^k. \quad (65)$$

Поэтому весь операторный ряд (62) может быть полностью вычислен за N повторяющихся вычислений экспоненты с положительной частотой B_1 и такого же числа для экспоненты с отрицательной частотой B_{-1} :

$$\varphi^{m+1} = \sum_{k=-N}^N A_k \tilde{\varphi}_k, \quad (66)$$

где начальное поле $\tilde{\varphi}_0 = \varphi^m$, промежуточные поля $\tilde{\varphi}_k = \exp(iB_{\pm 1} \hat{L}) \tilde{\varphi}_{k \mp 1}$ с B_1 для $k > 0$ и B_{-1} для $k < 0$.

Для вычисления экспоненциальных пропагаторов (63) в трехмерной задаче могут использоваться различные схемы расщепления операторов, которые обладают достаточно простой структурой. Так, если необходимо разделить операторы \hat{L}_x и \hat{L}_y , то применимы схемы расщепления первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} e^{iB_1 \hat{L}_x + iB_1 \hat{L}_y} &\approx e^{iB_1 \hat{L}_x} e^{iB_1 \hat{L}_y}, \\ e^{iB_1 \hat{L}_x + iB_1 \hat{L}_y} &\approx e^{iB_1/2 \hat{L}_x} e^{iB_1 \hat{L}_y} e^{iB_1/2 \hat{L}_x}. \end{aligned} \quad (67)$$

Далее каждая экспонента с отдельным оператором \hat{L}_x или \hat{L}_y может быть разложена с использованием аппроксимаций Падэ различного порядка [153], которые позволяют получить уравнения вида:

$$\begin{aligned} (1 + \nu_{l,x} \hat{L}_x) \tilde{\varphi}_1 &= (1 + \mu_{l,x} \hat{L}_x) \tilde{\varphi}_0, \\ (1 + \nu_{l,y} \hat{L}_y) \tilde{\varphi}_2 &= (1 + \mu_{l,y} \hat{L}_y) \tilde{\varphi}_1, \end{aligned} \quad (68)$$

где $\tilde{\varphi}_0$ — известное поле для данного шага, $\tilde{\varphi}_1$ — промежуточное поле, $\tilde{\varphi}_2$ — поле, которое необходимо вычислить, а $\nu_{l,x}$, $\mu_{l,x}$, $\nu_{l,y}$, $\mu_{l,y}$ — соответствующие наборы коэффициентов Падэ-аппроксимаций. Так, например, применение схемы расщепления первого порядка совместно с диагональной аппроксимацией Падэ (1, 1) для экспоненты (64) лежит в основе стандартной схемы переменных направлений (ADI) для узкоугольного параболического уравнения:

$$\varphi^{m+1} = \left(\frac{1 + \zeta/4 \hat{L}_x}{1 - \zeta/4 \hat{L}_x} \right) \left(\frac{1 + \zeta/4 \hat{L}_y}{1 - \zeta/4 \hat{L}_y} \right) \varphi^m, \quad (69)$$

которая применима и для пропагатора $\exp(iB_{\pm 1} \hat{L})$.

Другой способ вычисления операторных экспонент состоит в разделении в операторе \hat{L} дифференциальных операторов и функций, описывающих неоднородности [154]. Так, например, для среды с постоянной плотностью, но с неоднородностями показателя преломления можно записать:

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + n_a^2 - 1, \quad (70)$$

где оператор лапласа $k_0^2 \hat{L}_0 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ содержит только производные по поперечным координатам. Тогда для операторной экспоненты схема расщепления первого порядка выглядит так:

$$e^{iB_1(\hat{L}_0 + n_a^2 - 1)} \approx e^{iB_1 \hat{L}_0} e^{iB_1(n_a^2 - 1)}. \quad (71)$$

Первая экспонента, подобно методу углового спектра, может быть вычислена в пространственном спектре с использованием алгоритма БПФ, а вторая экспонента входит в расчет как скалярная функция пространственных координат. Данный метод широко известен в литературе как split-step-Fourier (SSF) и неоднократно использовался для решения стандартного параболического уравнения в неоднородных средах [132]. Здесь так же, как и при разделении операторов \hat{L}_x и \hat{L}_y , возможны схемы расщепления более высокого порядка, чем первый [155].

Основная проблема представления пропагатора операторным рядом Фурье (62) состоит в том, что функция $H(\xi, \zeta)$ не является периодической в каком-либо конечном окне на оси ξ , а также имеет особенность с неограниченными производными в точке $\xi = -1$, которая является границей между спектром распространяющихся волн и спектром нераспространяющихся волн. Поэтому если не предпринимать никаких мер, то ряд Фурье сходится медленно и сильно проявляется эффект осцилляций Гиббса, который делает всю схему неустойчивой, поскольку тогда на оси ξ присутствуют области, где $|H(\xi, \zeta)|$ превышает единицу настолько, что обеспечивается достаточно большая скорость роста соответствующих компонент углового спектра при пошаговом применении пропагатора вдоль оси z . В связи с этим было предложено сначала построить достаточно гладкий модифицированный пропагатор, который затем разлагается в быстросходящийся ряд Фурье с пренебрежимо малой амплитудой осцилляций Гиббса.

Идея построения модифицированного пропагатора $H_M(\xi, \zeta)$ состоит в том, что сначала выбирается некоторый интервал спектра $[\xi_B, \xi_C]$, в котором модифицированный пропагатор представлен точно. То есть в этом интервале функция $H_M(\xi, \zeta)$, описывающая модифицированный пропагатор, в точности равна $H(\xi, \zeta)$. Левая граница интервала $-1 < \xi_B < 0$, находящаяся в области спектра распространяющихся волн, задает угловой диапазон широкоугольной модели согласно $\theta_{\max} = \arcsin \sqrt{-\xi_B}$. Правая граница интервала $\xi_C > 0$ находится в области, необходимой для

описания случаев с неоднородностями показателя преломления $n_a > 1$. Вне интервала $[\xi_B, \xi_C]$, но внутри периодического окна $[-\xi_L/2, \xi_L/2]$ шириной ξ_L располагаются другие точки, например $-\xi_L/2 < \xi_A < \xi_B$ и $\xi_D = \xi_L/2$, в которых сшиваются значения и производные точного и модифицированного пропагаторов. В промежутке между парами точек ξ_C и ξ_D , ξ_A и ξ_B производится двухточечная интерполяция Эрмита заданного порядка, которая позволяет сохранять непрерывными не только значения функции, но и её производных до соответствующего номера $N_d \geq 1$. Таким образом, в периодическом окне $[-\xi_L/2, \xi_L/2]$ модифицированный пропагатор и его производные вплоть до заданного N_d оказываются непрерывными функциями, что сильно увеличивает скорость сходимости ряда Фурье. При этом в интервале $[\xi_B, \xi_C]$ соблюдены необходимые точные значения пропагатора, а вне этого интервала $|H_M(\xi, \zeta)| < 1$, что обеспечивает затухание нежелательных компонент пространственного спектра поля давления. На рис. 6, а, б показан пример модифицированного пропагатора (амплитуда и фаза) для $|\zeta| = 1$ с максимальными углом $\theta_{\max} = 60^\circ$ при разложении в окне шириной $\xi_L = 4$. Здесь изображены три последовательно идущих периода, из которых период в интервале $[-2, 2]$, ограниченный вертикальными пунктирными линиями на рисунке, покрывает интересующую область значений ξ точного пропагатора. В примере использовалась интерполяция Эрмита с $N_d = 5$, что позволило снизить амплитуду осцилляций Гиббса при числе гармоник $2N = 100$ до уровня 10^{-8} (рис. 6, в). Ошибка по фазе при этом несколько больше и составляет 10^{-7} (рис. 6, г). На практике такая малая амплитуда осцилляций не позволяет схеме разойтись даже при моделировании поля на расстояниях до тысяч длин волн. Кроме того, модифицированный пропагатор можно строить различными способами, например сшивая отдельно амплитуду и фазу, и варьировать свободные параметры с целью уменьшения числа фурье-гармоник при заданном уровне ошибки аппроксимации [156]. Важно отметить, что ввиду периодичности фурье-разложения пропагатора некоторые компоненты пространственного спектра с высокими частотами из области нераспространяющихся волн имеют коэффициент передачи такой же, как и в области распространяющихся волн, т.е. равный единице (за вычетом эффекта осцилляций Гиббса). Если требуется гашение данных компонент, то могут дополнительно применяться пространственные фильтры нижних частот [157].

Таким образом, в новых теоретических работах, выполняемых в лаборатории LIMU по теме численного моделирования распространения волн в неоднородных средах идет развитие альтернативных методов широкоугольного параболического уравнения, направленных на получение однонаправленных трехмерных моделей, к которым применимы достаточно простые численные схемы, избавляющие от необходимости решения систем линейных

уравнений с большими разреженными матрицами или от вычисления большого числа комбинаций перекрестных операторов с учетом их коммутативных свойств. Предложенный метод модификации точного пропагатора с последующим разложением в конечный ряд Фурье позволяет строить различные варианты численных схем с использованием как методов конечных разностей или конечных элементов, так и методов расщепления экспоненциальных операторов с возможностью реализации вычислений в пространственном спектре на основе алгоритма БПФ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящий обзор включено описание основных численных алгоритмов, развиваемых на протяжении последних трех десятилетий в Лаборатории медицинского и промышленного ультразвука МГУ для решения нелинейных задач распространения дифрагирующих акустических волн и ограниченных пучков в поглощающих и неоднородных средах. Теоретической основой для алгоритмов являются классические эволюционные уравнения нелинейной акустики, такие как уравнение Бюргера, уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК), однонаправленное уравнение Вестервелта и их обобщения для различных законов поглощения и дисперсии, а также неоднородных сред. Даны примеры результатов, полученных в численных экспериментах для различных практических задач нелинейной акустики в области медицинского ультразвука, аэроакустики и при анализе нелинейных параметрических взаимодействий интенсивных волн накачки близких частот, демонстрирующие возможности представленных методов. Приведено описание нового метода построения широкоугольной параболической модели, пригодной для описания однонаправленного распространения волн в трехмерных неоднородных средах.

Изложенные в обзоре численные модели и их программные реализации допускают дальнейшее развитие и обобщение на более широкий круг задач. Так, одним из недостатков существующих алгоритмов является относительно низкая скорость расчетов в трехмерных задачах при сильном проявлении нелинейных эффектов. Здесь одним из возможных решений является использование преимуществ параллельных вычислений на графических процессорах. При этом основная трудность заключается в том, что, в отличие от способов распараллеливания на центральных процессорах, например с использованием расширений кода, предоставляемых стандартом OpenMP, в области вычислений на видеокартах пока отсутствует единый стандарт, который мог бы использоваться без нарушения совместимости с существующей кодовой базой, а относительно готовые решения предлагаются только одним известным производителем графических чипов, что создает опасность привязки к одному по-

ставщику проприетарных программных и аппаратных решений. В плане самих физических задач, для которых разрабатываются данные модели, все более востребованы приложения, в которых существенное влияние на распространение волн оказывают неоднородности среды. Например, в настоящий момент большое внимание уделяется исследованиям по реализации методов неинвазивной ультразвуковой хирургии для разрушения опухолей абдоминальных органов (печень, почка, поджелу-

дочная железа), когда на пути к фокусу присутствуют неоднородные слои тканей брюшной стенки, создающие сильные искажения (абберации) ультразвукового пучка. Здесь развитие однонаправленных моделей на основе широкоугольного параболического приближения для исследования данных процессов и возможностей коррекции аббераций является весьма актуальной областью исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 23-22-00220).

- [1] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* // Теория волн. Линейные и нелинейные волны. М.: Ленанд, 2019.
- [2] *Treeby B.E., Cox B.T.* // *J. Biomed. Opt.* **15**, N 2. 021314 (2010).
- [3] *Руденко О.В., Солуян С.И.* // Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
- [4] *Заболотская Е.А., Хохлов Р.В.* // Акуст. журн. **15**, № 1. 40 (1969).
- [5] *Westervelt P.J.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **35**, N 4. 535 (1963).
- [6] *Ostashev V.E., Wilson D.K., Muhlestein M.B.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **147**, N 6. 3969 (2020).
- [7] *Katakura T., Nomura H., Clement G.T.* // *Ultrasonics*. **53**, N 2. 432 (2013).
- [8] *Тыщенко А.Г., Козицкий С.Б., Казак М.С., Петров П.С.* // Акуст. журн. **69**, № 5. 620 (2023).
- [9] *Трофимов М.Ю.* // Акуст. журн. **48**, № 6. 822 (2002).
- [10] *Авилов К.В., Мальцев Н.Е.* // Акуст. журн. **27**, № 3. 335 (1981).
- [11] *Collins M.D., Siegmund W.L.* // *J. Theor. Comput. Acoust.* **29**, N 2. 2130003 (2021)..
- [12] *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2021.
- [13] *Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* // Акуст. журн. **8**, № 1. 107 (1962).
- [14] *Lee Y.S., Hamilton M.F.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **97**, N 2. 906 (1995).
- [15] *McLachlan R.I., Quispel G.R.W.* // *Acta Num.* **11**. 341 (2002).
- [16] *Кашеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* и др. // Акуст. журн. **46**, № 2. 211 (2000).
- [17] *Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* и др. // Акуст. журн. **42**, № 3. 412 (1996).
- [18] *Kurganov A., Tadmor E.* // *J. Comp. Phys.* **160**, N 1. 241 (2000).
- [19] *Кочнова Е.О., Хохлова В.А., Юлдашев П.В.* // Акуст. журн. **69**, № 1. 13 (2023).
- [20] *Tjøtta J.N., Tjøtta S., Vefring E.H.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **89**, N 3. 1017 (1991).
- [21] *Thomson D., Chapman N.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, N 6. 1848 (1983).
- [22] *Soneson J.E.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **131**, N 6. EL481 (2012).
- [23] *Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, N 4. 2061 (1998).
- [24] *Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S.C.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, N 1. 139 (2003).
- [25] *Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А.* // Акуст. журн. **52**, № 4. 560 (2006).
- [26] *Goodman J. W.* // Introduction to Fourier optics. The McGraw-Hill companies, Inc., New York, 1996.
- [27] *Blackmore J., Cleveland R.O., Mobley J.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **144**, N 5. 2947 (2018).
- [28] *Christopher P., Parker K.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **90**, N 1. 507 (1991).
- [29] *Авилов К.В.* // Акуст. журн. **41**, № 1. 5 (1995).
- [30] *Юлдашев П.В., Мездрогин И.С., Хохлова В.А.* // Акуст. журн. **64**, № 3. 318 (2018).
- [31] *Brooke H., Thomson D.J., Ebbeson G.R.* // *J. Comput. Acoust.* **9**, N 1. 69 (2001).
- [32] *Collins M.D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **93**, N 4. 1736 (1993).
- [33] *Yevick D., Thomson D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **108**, N 6. 2784 (2000).
- [34] *Кочнова Е.О., Хохлова В.А., Юлдашев П.В.* // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, № 6. 811 (2021).
- [35] *Гаврилов Л.П.* Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. М.: Фазис, 1967.
- [36] *Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А.* и др. // Акуст. журн. **49**, № 4. 437 (2003).
- [37] *Hill C.R., Bamber J.C., ter Haar G.R.* // *Physical Principles of Medical Ultrasonics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [38] *Crum L.A., Canney M., Bailey M.* et al. // *Med. Phys.* **38**, N 6. 3811 (2011).
- [39] *Maxwell A., Sapozhnikov O., Bailey M.* et al. // *Acoustics Today*. **8**. 24 (2012).
- [40] *Bessonova O.V., Wilkens V.* // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **60**, N 2. 290 (2013).
- [41] *Khokhlova T.D., Canney M.S., Khokhlova V.A.* et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **130**, N 5. 3498 (2011).
- [42] *Филоненко Е.А., Хохлова В.А.* // Акуст. журн. **47**, № 4. 541 (2001).
- [43] *Canney M.S., Bailey M.R., Crum L.A.* et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **124**, N 4. 2406 (2008).
- [44] *Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A.* et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. **60**, N 8. 1683 (2013).
- [45] *Юлдашев П. В., Хохлова В. А.* // Акуст. журн. **57**, № 3. 337 (2011).
- [46] *Ponomarchuk E. M., Yuldashev V., Nikolaev D. A.* et al. // *Acoust. Phys.* **69**, N 4. 459 (2023).
- [47] *Sapozhnikov O.A., Tsysar S.A., Khokhlova V.A., Kreider, W.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **138**, N 3. 1515 (2015).
- [48] *Цысарь С.А., Синельников Е.Д., Сапожников О.А.* // Акуст. журн. **57**, № 1. 104 (2011).
- [49] *Сапожников О.А., Пономарев А.Е., Смагин М.А.*

- // Акуст. журн. **52**, №3. 385 (2006).
- [50] Сапожников О.А., Пицальников Ю.А., Морозов А.В. // Акуст. журн. **49**, №3. 416 (2003).
- [51] Цысарь С.А., Николаев Д.А., Сапожников О.А. // Акуст. журн. **67**, №3. 328 (2021).
- [52] Калоев А. З., Николаев, Д.А., Хохлова, В.А. и др. // Акуст. журн. **68**, №1. 83 (2022).
- [53] Николаев Д.А., Цысарь С.А., Сапожников О.А. // Изв. РАН. Сер. физ. **85**, №6. 854 (2021).
- [54] Nartov F.A., Williams R.P., Khokhlova V.A. // *J. Acoust. Phys.* **70**, N1. 165 (2024).
- [55] Tsysar S., Kreider W., Sapozhnikov O. // *Proceedings of Meetings on Acoustics.* **19**. 055015 (2013).
- [56] Tsysar S.A., Rosnitskiy P.B., Asfandiyarov S.A. et al. // *Acoust. Phys.* **70**, N1. 82 (2024).
- [57] Nikolaev D.A., Tsysar S.A., Khokhlova V.A. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **149**, N1. 386 (2021).
- [58] Maxwell A.D., Yuldashev P.V., Kreider W. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **64**, N10. 1542 (2017).
- [59] Bawiec C.R., Khokhlova T.D., Sapozhnikov O.A. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **68**, N5. 1496 (2021).
- [60] Karzova M.M., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **141**, N4. 2327 (2017).
- [61] Karzova M.M., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **68**, N9. 2930 (2021).
- [62] Williams R.P., Karzova M.M., Yuldashev P.V. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **70**, N7. 693 (2023).
- [63] Rosnitskiy P.B., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **146**, N3. 1786 (2019).
- [64] Yuldashev P.V., Shmeleva S.M., Piyin S.A. et al. // *Phys. Med. Biol.* **58**, N8. 2537 (2013).
- [65] Yuldashev P.V., Karzova M.M., Kreider W. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **68**, N9. 2837 (2021).
- [66] Perez C., Chen H., Matula T.J. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **134**, N2 (Pt.2). 1663 (2013).
- [67] Мусатов А.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А. // Акуст. журн. **38**, №3. 502 (1992).
- [68] Наугольный К.А., Романенко Е.В. // Акуст. журн. **5**, №2. 191 (1959).
- [69] Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р. и др. // Акуст. журн. **55**, №4-5. 445 (2009).
- [70] Руденко О.В. // УФН. **174**, №9. 973 (1995).
- [71] Карзова М.М., Аверьянов М.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. // Акуст. журн. **58**, №1. 93 (2012).
- [72] Росницкий П.Б., Юлдашев П.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. **61**, №3. 325 (2015).
- [73] Росницкий П.Б., Юлдашев П.В., Высоканов Б.А., Хохлова В.А. // Акуст. журн. (2016). **62**, №2. 153 (2016).
- [74] Rosnitskiy P.B., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **64**, N2. 374 (2017).
- [75] Khokhlova V.A., Yuldashev P.V., Rosnitskiy P.B. et al. // *Physics procedia.* **87**. 132 (2016).
- [76] Карзова М.М., Юлдашев П.В., Росницкий П.Б., Хохлова В.А. // Изв. РАН. Сер. физ. **81**, №8. 1028 (2017).
- [77] Росницкий П.Б., Гаврилов Л.Р., Юлдашев П.В. и др. // Акуст. журн. **63**, №5. 489 (2017).
- [78] Крохмаль А.А., Николаев Д.А., Цысарь С.А., Сапожников О.А. // Акуст. журн. **66**, №5. 475 (2020).
- [79] Sturtevant B., Kulkarny V.A. // *J. Fluid Mech.* **73**, N4. 651 (1976).
- [80] Karzova M.M., Khokhlova V.A., Salze E. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **137**, NEL436. 436 (2015).
- [81] Руденко О.В., Маков Ю.Н. // Акуст. журн. **67**, №1. 3 (2021).
- [82] Feder T. // *Physics Today.* **60**, N4. 24 (2007).
- [83] Pierce A., Maglieri D. // *J. Acoust. Soc. Am.* **51**, N2 (Pt.3). 702 (1972).
- [84] Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
- [85] Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. **42**, №5. 623 (1996).
- [86] Hamilton M.F., Khokhlova V.A., Rudenko O.V. // *J. Acoust. Soc. Am.* **101**, N3. 1298 (1997).
- [87] Юлдашев П.В., Брысева Н.А., Аверьянов М.В. и др. // Акуст. журн. **56**, №2. 179 (2010).
- [88] Coullouvat F. // *Wave Motion.* **49**, N1. 50 (2012).
- [89] Carr A.N., Lonza J.B., Miller S.A.E. // *J. Sound Vib.* **571**. 118118 (2024).
- [90] Аверьянов М.В., Хохлова В.А., Сапожников О.А. и др. // Акуст. журн. **52**, №6. 725 (2006).
- [91] Averiyanov M., Blanc-Benon P., Cleveland R.O., Khokhlova V. // *J. Acoust. Soc. Am.* **129**, N4. 1760 (2011).
- [92] Yuldashev P.V., Ollivier S., Karzova M.M. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **142**, N6. 3402 (2017).
- [93] Averiyanov M., Ollivier S., Khokhlova V., Blanc-Benon P. // *J. Acoust. Soc. Am.* **130**, N6. 3595 (2011).
- [94] Salze E., Yuldashev P., Ollivier S. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **136**, N2. 556 (2014).
- [95] Юлдашев П.В., Аверьянов М.В., Хохлова В.А. и др. // Акуст. журн. **54**, №1. 40 (2008).
- [96] Luquet D., Marchiano R., Coullouvat F. // *J. Comp. Phys.* **379**. 237 (2019).
- [97] Юлдашев П.В., Карзова М.М., Хохлова В.А., Блан-Бенон Ф. // Акуст. журн. **67**, №1. 31 (2021).
- [98] Lee R.A., Downing J.M. // *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, N2. 768 (1996).
- [99] Yuldashev P., Ollivier S., Averiyanov M. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **128**, N6. 3321 (2010).
- [100] Karzova M.M., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **137**, N6. 3244 (2015).
- [101] Yuldashev P.V., Karzova M.M., Khokhlova V.A. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **137**, N6. 3314 (2015).
- [102] Zhou Z.J., Rufer L., Salze E. et al. // *Micromechanics and Microengineering.* **23**, N10. 105006 (2013).
- [103] Карзова М.М., Юлдашев П.В., Хохлова В.А. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. **79**, №10. 1452 (2015).
- [104] Desjoux C., Ollivier S., Marsden O. et al. // *Phys. of Fluids.* **28**. 027102 (2016).
- [105] Karzova M.M., Lechat T., Ollivier S. et al. // *J. Acoust. Soc. Am.* **145**, N1. 26 (2019).
- [106] Зверев В.А. // Акуст. журн. **45**, №5. 685 (1999).
- [107] Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Ленинград Судостроение, 1981.
- [108] Zhou H., Huang S.H., Li W. // *Sensors.* **20**, N7. 2148 (2020).
- [109] Gan W.-S., Yang J., Katakura T. // *Applied Acoustics.* **73**, N12. 1211 (2012).
- [110] Chiou S.-Y., Forsberg F., Fox T.B., Needleman L. // *J. Ultrasound Med.* **26**, N11. 1557 (2007).

- [111] *Moffett M.B., Mellen R.H., Konrad W.L.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **63**, N 5. 1326 (1978).
- [112] *Kamakura T., Hamada N., Aoki K., Kumamoto Y.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **85**, N 6. 2331 (1989).
- [113] *Tjøtta J.N., Tjøtta S., Vefring E.H.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **88**, N 6. 2859 (1990).
- [114] *Averkiou M.A., Lee Y.-S., Hamilton M.F.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **94**, N 5. 2876 (1993).
- [115] *Zhong J., Kirby R., Qiu X.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **149**, N 3. 1524 (2021).
- [116] *Červenka M., Bednařík M.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **146**, N 4. 2163 (2019).
- [117] *Kamakura T., Tani M., Kumamoto Y., Breaz-eale M.A.* // *Acustika.* **80**. 332 (1994).
- [118] *Kvashennikova A.V., Yuldashev P.V., Khokhlova V.A., Esipov I.B.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **155**, N 3. 1682 (2024).
- [119] *Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А.* // *Акуст. журн.* **69**, № 1. 22 (2023).
- [120] *Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А.* // *Акуст. журн.* **68**, № 2. 152 (2022).
- [121] *Сергеева М.С., Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Хохлова В.А.* // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. **4**. 2240101 (2022).
- [122] *Есипов И.Б., Попов О.Е., Воронин В.А., Тарасов С.П.* // *Акуст. журн.* **55**, № 1. 56 (2009).
- [123] *Varslot T., Taraldsen G.* // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr.* **52**, N 9. 1473 (2005).
- [124] *Mast T.D.* // *Acoustics Research Letters Online* **1**, N 2. 37 (2000).
- [125] *Бобина, А.С., Росницкий, П.Б., Хохлова, Т.Д. и др.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* **85**, № 6. 875 (2021).
- [126] *Peek A.T., Thomas G.P.L., Leotta D.F. et al.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **151**, N 5. 3007 (2022).
- [127] *Lee D., Pierce A.D., Shang E.-C.* // *J. Comput. Acoust.* **8**, N 4. 527 (2000).
- [128] *Jensen F., Kuperman W., Porter M., Schmidt H.* // *Computational ocean acoustics.* Springer, New York, 2011.
- [129] *Salomons E.M.* *Computational atmospheric acoustics.* Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2001.
- [130] *Ozgun O., Araydin G., Kuzuoglu M., Sevgi L.* // *Comput. Phys. Commun.* **182**, N 12. 2638 (2011).
- [131] *Kolesik M.* *Computational optics: beam propagation methods.* Nova Science Publishers, Inc., New York, 2017.
- [132] *Thomson D.J., Chapman N.R.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, N 6. 1848 (1983).
- [133] *Lin Y.-T., Collis J.M., Duda T.F.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, N 5. EL364 (2012).
- [134] *Collins M.D., Westwood E.K.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **89**, N 3. 1068 (1991).
- [135] *Collins M.D., Siegmann W.L.* *Parabolic wave equations with applications.* Springer, New York, 2019.
- [136] *Siegmann W.L., Kriegsmann G.A., Lee D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, N 2. 659 (1985).
- [137] *McDaniel S.T.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **58**, N 6. 1178 (1975).
- [138] *Halpern L., Trefethen L.N.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, N 4. 1397 (1988).
- [139] *Bamberger A., Engquist B., Halpern L., Joly P.* // *SIAM J. Appl. Math.* **48**, N 1. 129 (1988).
- [140] *Collins M.D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, N 3. 1097 (1989).
- [141] *Collins M.D., Cederberg R.J., King D.B., Chin-Bing S.A.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, N 1. 178 (1996).
- [142] *Lu Y.Y.* // *Appl. Numer. Math.* **27**, N 2. 141 (1998).
- [143] *Gilbert K.E., White M.J.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **85**, N 2. 630 (1989).
- [144] *Collins M.D.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **93**, N 4. 1736 (1993).
- [145] *Lee K., Seong W., Na Y.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **146**, N 3. 2050 (2019).
- [146] *Khodr C., Azarpeyvand M., Green D.N.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **148**, N 2. 1089 (2020).
- [147] *Hadley G.R.* // *J. Comp. Phys.* **203**, N 1. 358 (2005).
- [148] *Bekker E.V., Sewell Ph., Benson T.M., Vukovic A.* // *J. Lightwave Technol.* **27**, N 14. 2595 (2009).
- [149] *Lee K., Seong W., Na Y.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **146**, N 3. 2041 (2019).
- [150] *Ivansson S.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **146**, N 3. 2030 (2019).
- [151] *Balkenohl A., Schulz D.* // *J. Lightwave Technol.* **32**, N 23. 3917 (2014).
- [152] *Юлдашев П.В., Коннова Е.О., Хохлова В.А.* // *Труды XXXV Сессии Российского акустического общества, ГЕОС Москва. 2023.* 521.
- [153] *Moler C., Van Loan Ch.* // *SIAM Review.* **45**, N 1. 3 (2003).
- [154] *Lin Y.-T., Duda T.F.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **132**, N 2. EL61 (2012).
- [155] *Hermansson B., Yevick D.* // *Opt. Lett.* **16**, N 6. 354 (1991).
- [156] *Коннова Е.О., Юлдашев П.В., Хохлова В.А.* *Труды XXXIV Всероссийской школы-семинара «Волновые явления: физика и применение» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2023»).* Секция «Математические задачи волновой физики». МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 2023. 8.
- [157] *Cederberg R.J., Collins M.D., Schmidt H., Siegmann W.L.* // *J. Acoust. Soc. Am.* **101**, N 5. 2518 (1997).

Numerical models of nonlinear acoustic waves propagation in problems of medical ultrasound and in some applications of aero- and underwater acoustics

P. V. Yuldashev^{1,a}, O. A. Sapozhnikov³, M. M. Karzova¹, S. A. Tsysar², A. V. Kvashennikova¹, E. O. Konnova^{1,b}, V. A. Khokhlova³

¹Department of General Physics and Condensed Matter Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University

²Department of Photonics and Microwave Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University

³Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia

E-mail: ^a petr@acs366.phys.msu.ru, ^b helen.7aprel@gmail.com

The paper provides a review of numerical algorithms developed in the Laboratory for industrial and medical ultrasound of the Moscow State University and used to solve one-way wave propagation equations of nonlinear acoustics, such as the Burgers equation, the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) equation, and the Westervelt equation. The main results obtained using the developed numerical models in studying the propagation of intense acoustic waves in various media are presented. In particular, examples of solving problems in medical ultrasound, nonlinear aeroacoustics, and nonlinear underwater acoustics are considered. The generalization of one-way models to the case of the presence of inhomogeneities of the propagation medium using wide-angle parabolic approximation methods in three-dimensional problems is discussed.

PACS: 43.20.Bi, 43.20.El, 43.25.-x, 43.28.Mw, 43.28.Lv, 43.25.Cb, 43.25.Lj, 43.25.Zx, 43.28.-g, 43.58.Ta, 43.80.Vj.

Keywords: numerical modeling, Burgers equation, KZK equation, Westervelt equation, medical ultrasound, nonlinear acoustic waves, inhomogeneous media, parametric array, wide-angle parabolic equation.

Received 16 September 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Юлдашев Петр Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-20-03, e-mail: petr@acs366.phys.msu.ru.
2. Сапожников Олег Анатольевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru.
3. Карзова Мария Михайловна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-20-03, e-mail: masha@acs366.phys.msu.ru.
4. Цысарь Сергей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: sergey@acs366.phys.msu.ru.
5. Квашенникова Анастасия Валерьевна — аспирант; физик; тел.: (495) 939-20-03, e-mail: kvashennikovaav@my.msu.ru.
6. Коннова Елена Олеговна — аспирант, мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-20-03, e-mail: helen.7aprel@gmail.com.
7. Хохлова Вера Александровна — доктор физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: vera@acs366.phys.msu.ru.