

## Линейное приближение в двухпланетной задаче с произвольным наклоном орбит. Эволюция экзосистемы TOI-1130

Б.П. Кондратьев,<sup>1,2,3,\*</sup> В.С. Корноухов,<sup>1</sup> Е.Н. Киреева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Государственный астрономический институт имени П.К. Штернберга  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>3</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН. Россия, Санкт-Петербург  
(Поступила в редакцию 03.11.2024; после доработки 26.11.2024; подписана в печать 29.11.2024)

Поставлен и исследован новый вариант двухпланетной задачи, где орбиты с малыми эксцентриситетами и взаимным наклоном могут иметь произвольную ориентацию относительно главной (картинной) плоскости. Модель позволяет изучать широкий класс экзопланетных систем с углом наклона орбит, отличным от  $\pi/2$ . Для вывода уравнений вековой эволюции орбит вместо классической функции возмущений используется взаимная гравитационная энергия колец Гаусса, полученная в виде ряда с точностью до членов второго порядка малости. Разработан теоретический метод, в котором для описания каждой орбиты вместо оскулирующих элементов Лагранжа без потери информации вводится вектор, перпендикулярный к плоскости орбиты и две переменные Пуанкаре. Получена и в аналитическом виде решена замкнутая система из 10 дифференциальных уравнений. Метод применяется для исследования вековой эволюции экзопланетной системы TOI-1130.

PACS: 95.10.Ce, 96.15.De УДК: 521.1

Ключевые слова: экзопланеты, двухпланетные системы, кольца Гаусса и их взаимная энергия, вектор нормали, переменные Пуанкаре, прецессия и вековая эволюция орбит.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2520802](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2520802)

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучение систем экзопланет у других звезд требует наиболее продвинутых методов наблюдений и глубоких теоретических разработок. Примером является модель двухпланетной задачи, которая в современной небесной механике применяется не только к системам с двумя планетами вокруг центральной звезды, но и в том случае, когда планет много, но две планеты по массе заметно выделяются среди остальных. Для планет Солнечной системы второй случай реализуется на примере классической двухпланетной задачи «Солнце–Юпитер–Сатурн». Так как орбиты Юпитера и Сатурна имеют малый (не более  $2^\circ$  –  $3^\circ$ ) наклон относительно плоскости эклиптики, это позволяет (см., например, [1–3]) методом усреднения в линейном приближении получить (и в аналитическом виде решить) уравнения вековой и долгопериодической эволюции малых эксцентриситетов и наклонов орбит этих планет-гигантов. В работе [3] (см. также [4]), рассматривается алгоритм нахождения плоскости Лапласа и уточняется механизм прецессии узлов. В работах [5, 6] учитывается влияние на нодальную прецессию от величины угла между узлами круглых орбит.

С открытием планет у других звёзд новые явления коснулись и двухпланетной задачи. Здесь будем говорить об экзопланетных системах, для которых выполняются условия малости эксцентриситетов и *угла взаимного наклона орбит*. Но для экзопланет есть еще один важный геометрический параметр — угол ориентации орбит относительно картинной плоскости наблюдателя. В связи с этим заметим, что в настоящее время элементы орбит для подавляющего большинства экзопланет находят транзитным методом, когда наблюдатель видит орбиты «почти с ребра». Однако вокруг звёзд могут существовать и орбиты, более раскрытые по отношению к лучу зрения наблюдателя, поэтому при анализе наблюдательных данных приходится считаться с эффектом селекции: при проходе (транзите) планеты по диску центральной звезды наблюдаются только орбиты, почти перпендикулярные к главной (картинной) плоскости. В подавляющем большинстве именно такие орбиты, видимые почти с «ребра», и представлены в базе данных на сервисе NASA Exoplanet Archive [7].

Но с усовершенствованием методов наблюдений будут открыты (первые примеры уже есть, см. [8]) и такие двухпланетные системы, у которых *угол наклона орбит к картинной плоскости не обязательно близок к  $\pi/2$ , а может быть произвольным*. И тогда неизбежно встает вопрос: каким методом изучать вековую эволюцию системы из двух экзопланет с *произвольным углом наклона* относительно

\* E-mail: [work@boris-kondratyev.ru](mailto:work@boris-kondratyev.ru)

но картинной плоскости наблюдателя? (В литературе обсуждаются примеры двухпланетных систем [9] с большим углом взаимного наклона орбит к картинной плоскости, но для таких систем не выполняется условие квазикомпланарности орбит).

С теоретической точки зрения ставить и изучать двухпланетные задачи для таких внесолнечных систем можно двумя способами:

1°. Либо вначале делать *координатное преобразование* элементов орбит от картинной плоскости к плоскости Лапласа (или любой другой главной плоскости, квазикомпланарной плоскостям орбит планет), находить для орбит классическое решение относительно выбранной главной плоскости, а затем для этого решения выполнить обратное преобразование координат уже к картинной плоскости наблюдателя.

2°. Либо выводить *непосредственно* сами уравнения эволюции элементов орбит относительно картинной плоскости и решать уже их. Второй способ привлекателен тем, что позволяет значительно сократить объем численных расчетов и теоретических выкладок.

В работах [5, 6] в двухпланетной задаче на модели с *круговыми* кольцами Гаусса были рассмотрены оба случая 1° и 2° ориентации орбит. Роль функции возмущений там играет взаимная гравитационная энергия колец. Метод позволяет учитывать несовпадение узлов орбит планет в двух вариантах: i) с большим и ii) с малым углом между узлами. Для каждого варианта были составлены и в конечном аналитическом виде решены системы из 4 дифференциальных уравнений, описывающие вековую эволюцию орбит. В линейном приближении (в уравнениях движения сохраняются только члены, пропорциональные малым  $i'_1$  и  $i'_2$ ) в обоих случаях угол взаимного наклона орбит  $\Delta i' = i'_2 - i'_1$  при эволюции остаётся постоянным. Вариант (i) соответствует указанному выше случаю ориентации орбит 1° и проверен на примере системы «Солнце–Юпитер–Сатурн»; для него построены графики эволюции наклонов и — дополнительно по сравнению с книгой [1] — долгот восходящих узлов. Вариант (ii) разработан и применён в работах [5, 6] впервые. В этом варианте решение уравнений было получено *непосредственно* (не прибегая к координатному преобразованию) для элементов орбит относительно картинной плоскости, и в качестве примера построены графики эволюции наклонов и долгот восходящих узлов орбит планет в системе экзопланет Kepler-10.

Целью данной работы является изучение вековой эволюции колец в широком классе двухпланетных задач, где две орбиты представлены слабо сжатыми эллиптическими кольцами Гаусса с малым взаимным наклоном, которые могут иметь произвольную ориентацию относительно главной плоскости. В разделе 1 в квадратичном по малым величинам

( $e_1, e_2, \Delta i'$ ) приближении дано выражение взаимной гравитационной энергии колец Гаусса. В разделе 2 в общем виде записаны уравнения вековой эволюции в форме Лагранжа. В разделе 3 для каждой орбиты вводится набор новых переменных, состоящий из вектора, перпендикулярного к плоскости орбиты, и двух переменных Пуанкаре. Для этих переменных в линейном по ( $e_1, e_2, \Delta i'$ ) приближении были получены и решены дифференциальные уравнения эволюции орбит. В разделе 4 метод применяется для изучения медленной (вековой) эволюции системы двух экзопланет TOI-1130. В разделе 5 результаты обсуждаются.

## 1. ВЗАИМНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ КОЛЕЦ ГАУССА

Чтобы получить уравнения эволюции для системы двух колец, воспользуемся методом работы [3, 4], где возмущающая функция  $j$ -го кольца выражена через взаимную гравитационную энергию колец Гаусса

$$\bar{R}_j = -\frac{W_{mut}}{m_j}. \quad (1)$$

В [4] для системы двух колец с кеплеровскими элементами

$$(a_j, e_j, i_j, \varpi_j, \Omega_j), \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

было получено выражение взаимной энергии  $W_{mut}$  в виде ряда с точностью до членов 4-го порядка малости включительно.

**Замечание 1.** Малыми параметрами в данной задаче являются эксцентриситеты колец  $e_1, e_2$ , а также угол взаимного наклона  $\Delta i' = i'_2 - i'_1$ . Выражение взаимной энергии колец Гаусса  $W_{mut}$  представлено в виде тройного ряда Тейлора по степеням указанных трех малых параметров. Порядок малости  $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$  взаимной энергии  $W_{mut}$  определяется членами ряда  $e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2} (\Delta i')^{\nu_3}$  с наибольшим суммарным числом степеней малых параметров.

Для решения поставленной здесь задачи мы ограничимся выражением взаимной энергии колец в квадратичном по ( $e_1, e_2, \Delta i'$ ) приближении

$$W_{mut} = \frac{Gm_1m_2}{\pi a_1(1+n)} \{W_{000} + W_{200}(e_1^2 + e_2^2 - \Delta i'^2) + W_{110}e_1e_2\}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} W_{000} &= -\frac{2}{1+n}K(k); \\ W_{200} &= \frac{1}{4(1+n)} \left( \frac{1+n^2}{(1-n)^2}E(k) - K(k) \right); \\ W_{110} &= -\frac{\cos(\omega_2 - \omega_1)}{n(1+n)} \left( \frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2}E(k) - (1+n^2)K(k) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В указанном квадратичном приближении взаимная гравитационная энергия колец Гаусса имеет вид:

$$W_{mut} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1(1+n)} \left\{ \begin{array}{l} l2K(k) + \frac{[e_1^2 + e_2^2 - \Delta i'^2]}{4} \left[ \frac{1+n^2}{(1-n)^2} E(k) - K(k) \right] - \\ - \frac{e_1e_2}{\alpha} \cos \Delta \varpi \left[ \frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2} E(k) - (1+n^2) K(k) \right] \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Здесь приняты обозначения:

$$n = \frac{a_2}{a_1}, \quad k = \frac{2\sqrt{n}}{1+n}, \quad \Delta \varpi = \varpi_2 - \varpi_1, \quad \varpi = \omega + \Omega. \quad (6)$$

Входящий в выражение (5) взаимный наклон  $\Delta i'$  колец через кеплеровские элементы орбиты (2) выражается формулой

$$\cos \Delta i' = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta \Omega, \quad (7)$$

где разность долгот восходящих узлов равна

$$\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1. \quad (8)$$

## 2. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Усреднённая методом колец Гаусса возмущающая функция (1) используется при записи уравнений эволюции Лагранжа [10, 11]. Для  $j$ -го кольца система уравнений Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{de_j}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{e_j n_j a_j^2} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial \varpi_j}, \\ \frac{di_j}{dt} &= -\frac{\tan \frac{i_j}{2}}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial \varpi_j} - \frac{1}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2} \sin i_j} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial \Omega_j}, \\ \frac{d\varpi_j}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{e_j n_j a_j^2} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial e_j} + \frac{\tan \frac{i_j}{2}}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial i_j}, \\ \frac{d\Omega_j}{dt} &= \frac{1}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2} \sin i_j} \frac{\partial \bar{R}_j}{\partial i_j}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\bar{R}_j$  дано в (1) и (3), а  $n_j$  — среднее орбитальное движение  $j$ -го тела.

## 3. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ В НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вместо классических оскулирующих элементов орбит двух планет  $j = 1, 2$  вводим новые функции от времени: единичный вектор, перпендикулярный к плоскости каждой орбиты,

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i_j \sin \Omega_j \\ -\sin i_j \cos \Omega_j \\ \cos i_j \end{pmatrix}, \quad (10)$$

и переменные Пуанкаре

$$p_j = e_j \cos \varpi_j; \quad q_j = e_j \sin \varpi_j, \quad (11)$$

где

$$\varpi_j = \omega_j + \Omega_j. \quad (12)$$

Для переменных (10) и (11) в линейном приближении из уравнений Лагранжа (9) получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -A_1 q_1 + B_1 q_2; & \frac{dq_1}{dt} &= A_1 p_1 - B_1 p_2; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -A_2 q_2 + B_2 q_1; & \frac{dq_2}{dt} &= A_2 p_2 - B_2 p_1; \end{aligned} \quad (13)$$

кроме того, для векторов нормали  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  имеем два векторных уравнения:

$$\frac{d\mathbf{R}_1}{dt} = A_1 [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2]; \quad \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} = A_2 [\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_1], \quad (14)$$

объединяющих шесть дифференциальных уравнений движения. Вывод уравнений (14) дан в Приложении. Здесь использованы обозначения для коэффициентов

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{n_1 m_2}{2M} A; & B_1 &= \frac{n_1 m_2}{2M} B; \\ A_2 &= \frac{n_2 m_1 n}{2M} A; & B_2 &= \frac{n_2 m_1 n}{2M} B, \end{aligned} \quad (15)$$

которые имеют размерность частот колебаний и получены с учетом отношения полуосей орбит планет и третьего закона Кеплера

$$n = \frac{a_2}{a_1}; \quad GM = n_1^2 a_1^3 = n_2^2 a_1^3 n^3. \quad (16)$$

В (15) входят комбинации полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi(1+n)} \left[ \frac{1+n^2}{(1-n)^2} E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) \right]; \\ B &= \frac{2}{\pi n(1+n)} \left[ \frac{1-n^2+n^4}{(1-n)^2} E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (1+n^2) K\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Решения уравнений (13) и (14) имеют вид:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= D(C_1 \cos(g_1 t) + C_2 \sin(g_1 t)) + B_1(C_3 \cos(g_2 t) + C_4 \sin(g_2 t)); \\ p_2(t) &= B_2(C_1 \cos(g_1 t) + C_2 \sin(g_1 t)) - D(C_3 \cos(g_2 t) + C_4 \sin(g_2 t)); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} q_1(t) &= D(C_1 \sin(g_1 t) - C_2 \cos(g_1 t)) + B_1(C_3 \sin(g_2 t) - C_4 \cos(g_2 t)); \\ q_2(t) &= B_2(C_1 \sin(g_1 t) - C_2 \cos(g_1 t)) - D(C_3 \sin(g_2 t) - C_4 \cos(g_2 t)); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(t) &= \mathbf{C}_1^0 + A_1 \cdot (\mathbf{C}_5 \cos(gt) + \mathbf{C}_6 \sin(gt)); \\ \mathbf{R}_2(t) &= \mathbf{C}_2^0 - A_2 \cdot (\mathbf{C}_5 \cos(gt) + \mathbf{C}_6 \sin(gt)), \end{aligned} \quad (20)$$

куда входят следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} K^e &= (A_1 - A_2)^2 + 4B_1 B_2; \quad \kappa = \sqrt{K^e}; \quad \sigma = A_1 + A_2; \\ g_1 &= \frac{\sigma - \kappa}{2}; \quad g_2 = \frac{\sigma + \kappa}{2}; \\ D &= \frac{A_2 - A_1 + \kappa}{2} = A_2 - g_1 = -(A_1 - g_2); \quad D^2 + B_1 B_2 = \frac{\kappa^2 + (A_2 - A_1)\kappa}{2} = \kappa D; \\ C_1 &= \frac{Dp_{10} + B_1 p_{20}}{\kappa D}; \quad C_2 = -\frac{Dq_{10} + B_1 q_{20}}{\kappa D}; \\ C_3 &= \frac{B_2 p_{10} - Dp_{20}}{\kappa D}; \quad C_4 = -\frac{B_2 q_{10} - Dq_{20}}{\kappa D}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$g = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (\mathbf{R}_{10} \cdot \mathbf{R}_{20})}. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^0 &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{R}_{10}) \mathbf{C}; \quad \mathbf{C}_2^0 = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{R}_{20}) \mathbf{C}; \quad \mathbf{C} = \frac{A_1 \mathbf{R}_{20} + A_2 \mathbf{R}_{10}}{g}; \\ \mathbf{C}_5 &= \frac{1}{g} [\mathbf{C} \times [\mathbf{R}_{10} \times \mathbf{R}_{20}]]; \quad \mathbf{C}_6 = \frac{1}{g} [\mathbf{R}_{10} \times \mathbf{R}_{20}]. \end{aligned} \quad (23)$$

Решения (18–20) представляют десять независимых переменных в данной задаче.

**Замечание 2.** Входящие в уравнения (14) величины  $A_1 \mathbf{R}_2$  и  $A_2 \mathbf{R}_1$  можно рассматривать как угловые скорости вращения орбит (кольца Гаусса):

$$\mathbf{\Omega}_1 = A_1 \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{\Omega}_2 = A_2 \mathbf{R}_1, \quad (24)$$

поэтому (14) можно записать в классическом виде

$$\frac{d\mathbf{R}_1}{dt} + [\mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{R}_1] = 0; \quad \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} + [\mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{R}_2] = 0. \quad (25)$$

Уравнения (25) аналогичны уравнениям движения жидкого эллипсоида с внутренними течениями, полученным ранее в книге [12].

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА К СИСТЕМЕ TOI-1130

С целью сравнения результатов теории и наблюдений рассмотрим двухпланетную задачу для внесолнечной системы TOI-1130. Данные о ней из статьи Borsato et al. [13] приведены в табл. 1.

Кроме малых эксцентриситетов и малого взаимного наклона орбит, характерным для этой экзопланетной системы являются: близость системы к резонансу орбитальных периодов  $T_c/T_b \approx 2.05$ , совпа-

дение узлов и некоторое ( $\sim 2.5^\circ$ ) отклонение углов наклона орбит от нормали к картинной плоскости.

Периоды основных частот решений (18)–(20)

$$T_{g_1} = \frac{2\pi}{g_1}; \quad T_{g_2} = \frac{2\pi}{g_2}; \quad T_\kappa = \frac{2\pi}{\kappa}; \quad T_g = \frac{2\pi}{g} \quad (26)$$

представлены в табл. 2.

Расчёты по формулам (18)–(20) представлены на шести рисунках. На рис. 1, 2 и 3 показаны графики вековой эволюции переменных  $p$ ,  $q$  и  $R$ .

Из решений (18) и (19) получаем эксцентриситеты и долготы перицентров, графики которых даны на рис. 4 и 5.

Эксцентриситеты обеих орбит колеблются с периодом  $T_\kappa \approx 18.12$  лет, а наклоны и долготы восходящих узлов — с периодом  $T_g \approx 17.39$  лет. Долгота перицентра орбиты планеты  $b$  имеет, как видно по левому графику на рис. 5, период векового оборота  $T_{g_2} \approx 17.75$  лет, а планеты  $c$  — период векового оборота  $T_{g_1} \approx 864$  лет. На правом графике рис. 5 представлены также долготы перицентров за вычетом вековой составляющей:

$$\Delta\varpi_1 = \varpi_1 - g_2 t - \varpi_{10}; \quad \Delta\varpi_2 = \varpi_2 - g_1 t - \varpi_{20}. \quad (27)$$

Результаты расчетов эволюции наклонов и узлов орбит в TOI-1130 представлены на рис. 6.

Таблица 1. Данные из статьи [13] о внесолнечной системе TOI-1130. Масса звезды  $M = 0.722^{+0.042}_{-0.037} M_{\odot}$ , компонента  $b$  является нептунopodobной планетой, а компонента  $c$  — юпитерopodobной

Planet	$m, mEarth$	$a, au$	$e$	$i, deg$	$\omega, deg$	$\Omega, deg$
TOI-1130 <b>b</b>	$19.8^{+0.2}_{-0.3}$	$0.0453^{+0.0001}_{-0.0002}$	$0.052162^{+0.000956}_{-0.000002}$	$87.49^{+0.02}_{-0.08}$	$141.11^{+0.47}_{-0.09}$	180
TOI-1130 <b>c</b>	$336^{+2}_{-5}$	$0.0731^{+0.0002}_{-0.0003}$	$0.0398^{+0.0009}_{-0.0002}$	$87.61^{+0.04}_{-0.04}$	$182.5^{+0.4}_{-0.5}$	$179.99^{+0.03}_{-0.10}$

Таблица 2. Периоды основных частот колебаний решений двухпланетной задачи в линейном приближении

$T_{g_1}$ , ГОДЫ	$T_{g_2}$ , ГОДЫ	$T_{\kappa}$ , ГОДЫ	$T_g$ , ГОДЫ
864	17.75	18.12	17.39

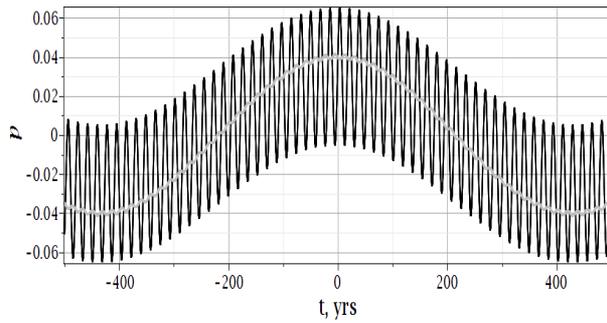


Рис. 1. Эволюция орбитального элемента  $p$  на интервале 1000 лет для компонентов системы TOI-1130 ( $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

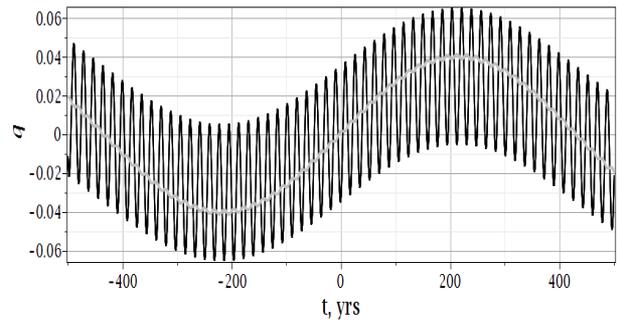


Рис. 2. Эволюция орбитального элемента  $q$  на интервале 1000 лет для компонентов системы TOI-1130 ( $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

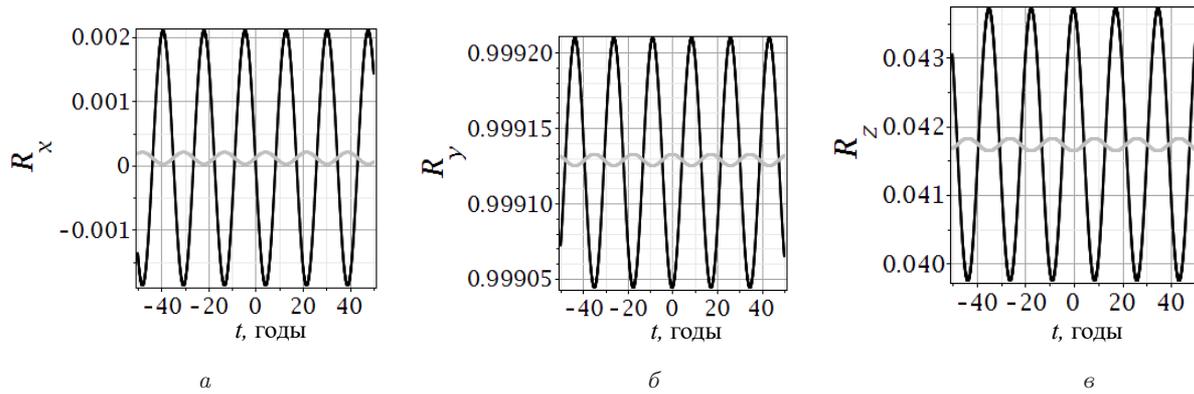


Рис. 3. Эволюция трех компонент вектора нормали  $\mathbf{R}$  на интервале 100 лет для компонентов системы TOI-1130 ( $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

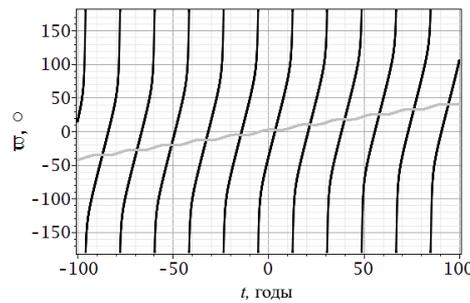


Рис. 4. Эволюция эксцентриситетов на интервале 100 лет для компонентов системы TOI-1130 (планета  $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

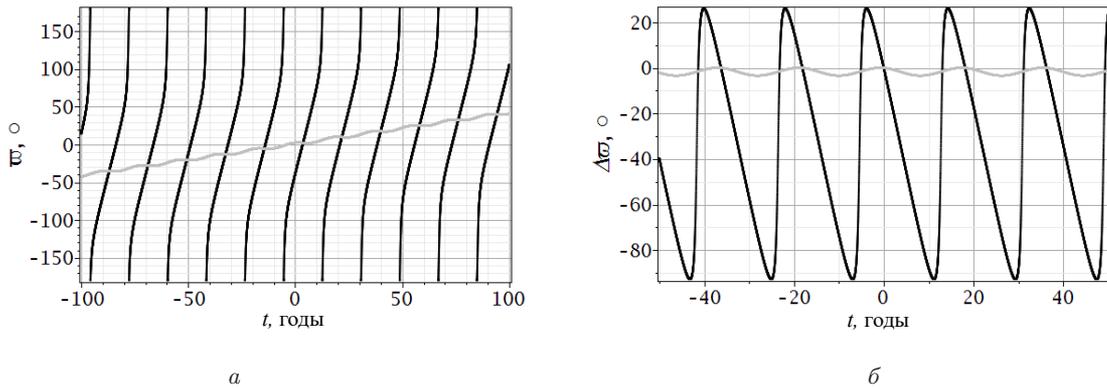


Рис. 5. Эволюция долгот перигентов — слева на интервале 200 лет и долгот перигентов за вычетом вековой составляющей на интервале 100 лет для компонентов системы TOI-1130 (планета  $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

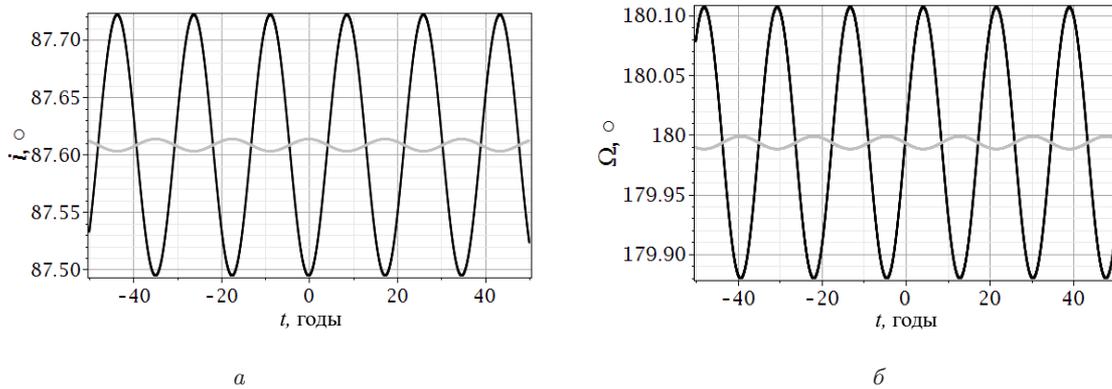


Рис. 6. Эволюция наклонов орбит — слева и долгот восходящих узлов — справа на интервале 100 лет для компонентов системы TOI-1130 (планета  $b$  — чёрным цветом,  $c$  — серым цветом)

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Математическое содержание работы сводится к выводу и решению системы дифференциальных уравнений (13) и (14) эволюции орбит в новых переменных «вектор, перпендикулярный к плоскости орбиты, две переменные Пуанкаре». Подчёркнём, что указанная замена классических элементов Лагранжа на новые переменные не приводит к потере информации об эволюции системы двух планет: и в том и в другом случае мы имеем систему из десяти дифференциальных уравнений. Вместе с тем запись шести (из 10) уравнений движения в виде двух уравнений в векторной форме делает всю систему уравнений более компактной и удобной для анализа.

Данный метод применяется к системе двух экзопланет TOI-1130. Здесь на наглядном примере показано, что решение уравнений в случае  $2^\circ$  (см. Введение) действительно можно получить непосредственно, не прибегая к координатному преобразованию для элементов орбит относительно картинной плоскости.

Характерными для системы TOI-1130 являются: малые эксцентриситеты и малый взаимный наклон орбит компонент, близость обеих планет к цен-

тральной звезде ( $a_b \approx 0.0453$  а.е. и  $a_c \approx 0.0731$  а.е.), совпадение узлов орбит, близость орбитальных периодов планет к резонансу  $T_c/T_b \approx 2.05$ , а также некоторое ( $\sim 2.5^\circ$ ) отклонение углов наклона орбит от нормали к картинной плоскости. Следствием указанных особенностей физических свойств системы TOI-1130 является то, что все периоды колебаний в ней, в том числе и период нодальной прецессии, оказываются весьма короткими (см. табл. 2).

Эволюция элементов  $p$  и  $q$  для компонентов системы TOI-1130 (рис. 1 и 2) рассмотрена на интервале 1000 лет; здесь два периода долгопериодической эволюции: короткий (около 18 лет) и сравнительно длинный — 864 лет. Различие в амплитудах обеих кривых объясняется большой разницей масс планет  $m_c/m_b \approx 17$ .

Эволюция компонент вектора нормали  $\mathbf{R}$  для планет TOI-1130 (рис. 3) рассмотрена на интервале 100 лет; колебания компонент этого вектора для обеих орбит происходят также быстро ( $T_g \approx 17.39$  лет) и строго в противофазе. Последнее свидетельствует о тонкой подстройке эволюционирующих орбит и указывает на сохранение полного углового момента в системе.

Рассчитана эволюция всех элементов орбит. Установлено, что колебания величин  $(e, i, \Omega)$  для орбит

обеих планет (рис. 4, 5, 6) происходят строго в противофазе. Эксцентриситеты орбит имеют период колебаний  $T_\kappa \approx 18.12$  лет. Обратим внимание, что на рис. 4 графики колебаний эксцентриситета для орбит планет отличаются друг от друга: в то время как кривая  $e_c$  для эксцентриситета орбиты более массивной планеты является плавной, кривая колебаний  $e_b$  для лёгкой планеты имеет в точках минимума острые концы. Мы полагаем, что наличие острых пиков на кривой эволюции  $e_b$  — это артефакт, причиной которого являются используемые здесь переменных Пуанкаре.

Отметим также, что отношение периодов орбитального движения компонент системы здесь равно  $T_c/T_b \approx 2.05$  и система TOI-1130 находится в окрестности резонанса 2:1. Однако это заметно будет сказываться лишь на эволюции эксцентриситета лёгкой планеты. Этот вывод мы аргументируем сравнением системы TOI-1130 с другой двухпланетной системой TOI 2202 (данные наблюдений о ней см. в [14]), имеющей близкое к TOI-1130 отношение орбитальных периодов  $T_c/T_b \approx 2.07$ . Действительно, прямая проверка численным методом для двухпланетной системы TOI-2202 показала, что расчёт по методу колец даёт удовлетворительные результаты для всех величин, кроме эксцентриситета. Напомним, что на практике важной является мера отклонения в системе от острого резонанса, поэтому об особенностях эволюции  $e_b$  в системе TOI-1130 мы рассуждаем по аналогии с TOI 2202.

Наклоны орбит и долготы восходящих узлов изменяются с периодом  $T_g \approx 17.39$  лет. Долгота перигея орбиты компоненты  $b$  имеет, как видно по левому графику на рис. 5, период векового оборота  $T_{g2} \approx 17.75$  лет, а у компоненты  $c$  период векового оборота совершенно другой  $T_{g1} \approx 864$  лет. Установлено, что движение линии апсид происходит сложным образом.

Заметим, что недавно была открыта ещё одна

двупланетная система HD206893 (см. [8]), эволюция орбит в которой также представляет большой интерес для астрофизики и небесной механики. Эта уникальная система экзопланет требует отдельного изучения и будет рассмотрена нами в другой работе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставлен и исследован новый вариант двухпланетной задачи, где орбиты с малыми эксцентриситетами и взаимным наклоном могут иметь произвольную ориентацию относительно главной (картинной) плоскости. Такая модель двухпланетной задачи позволяет изучать экзопланетные системы, открытые нетранзитным способом. Для вывода уравнений вековой эволюции орбит вместо классической функции возмущений используется взаимная гравитационная энергия колец Гаусса, полученная здесь в виде тройного ряда Тейлора с точностью до членов второго порядка малости ( $e_1, e_2, \Delta i'$ ). Разработан метод, в котором для каждой орбиты вместо оскулирующих элементов Лагранжа вводится вектор, перпендикулярный к плоскости орбиты и пара переменных Пуанкаре. В этих переменных получена и в аналитическом виде решена система из 10 дифференциальных уравнений. Метод используется для изучения вековой эволюции системы экзопланет TOI-1130. Отмечены достоинства и недостатки метода колец.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ (14)

Исходим из уравнений Лагранжа. Для краткости, запишем здесь четыре из них:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= A_1 \cdot \sin i_2 \sin \Delta\Omega; & \frac{d\Omega_1}{dt} &= -A_1 \cdot \frac{\sin i_1 \cos i_2 - \cos i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega}{\sin i_1}; \\ \frac{di_2}{dt} &= A_2 \cdot \sin i_1 \sin \Delta\Omega; & \frac{d\Omega_2}{dt} &= -A_2 \cdot \frac{\sin i_2 \cos i_1 - \cos i_2 \sin i_1 \cos \Delta\Omega}{\sin i_2}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  даны в (15) и (17). Компоненты векторов  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ , согласно (10), равны

$$\begin{aligned} R_{1x} &= \sin i_1 \sin \Omega_1, & R_{2x} &= \sin i_2 \sin \Omega_2, \\ R_{1y} &= -\sin i_1 \cos \Omega_1, & R_{2y} &= -\sin i_2 \cos \Omega_2, \\ R_{1z} &= \cos i_1, & R_{2z} &= \cos i_2. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Рассмотрим, например, вывод уравнения движения для компоненты  $R_{1x}$ . Дифференцируя указанное выражение по  $t$ , имеем

$$\frac{dR_{1x}}{dt} = \cos i_1 \sin \Omega_1 \frac{di_1}{dt} + \sin i_1 \cos \Omega_1 \frac{d\Omega_1}{dt}. \quad (\text{П.3})$$

Подставляя в (П.3) уравнения из (П.1), после элементарных преобразований и сокращений, в итоге получим выражение

$$\frac{dR_{1x}}{dt} = -A_1 (\sin i_1 \cos i_2 \cos \Omega_1 - \cos i_1 \sin i_2 \cos \Omega_2). \quad (\text{П.4})$$

С другой стороны, согласно первой формуле (14),

$$\frac{d\mathbf{R}_1}{dt} = A_1 \begin{vmatrix} i & j & k \\ R_{1x} & R_{1y} & R_{1z} \\ R_{2x} & R_{2y} & R_{2z} \end{vmatrix}, \quad (\text{П.5})$$

и для производной от компоненты  $R_{1x}$  имеем

$$\frac{dR_{1x}}{dt} = A_1 (R_{1y}R_{2z} - R_{2y}R_{1z}). \quad (\text{П.6})$$

Подставляя в (П.6) компоненты векторов  $R_{1y}, R_{2z}, R_{2y}, R_{1z}$  из (П.2), приводим (П.6) к уравнению (П.4), что и требуется доказать. Доказательство двух других уравнений,

$$\frac{dR_{1y}}{dt} = A_1 (R_{2x}R_{1z} - R_{1x}R_{2z});$$

$$\frac{dR_{1z}}{dt} = A_1 (R_{1x}R_{2y} - R_{2x}R_{1y}), \quad (\text{П.7})$$

делается по той же схеме. Складывая (П.6) и (П.7), получим первое из уравнений (14).

- 
- [1] Мюррей К., Дермотт С. // Динамика Солнечной системы. 2009.
- [2] Холшевников К. В., Кузнецов Э. Д. // Астрономический вестник. **41**, № 4. 291 (2007).
- [3] Кондратьев Б.П. // Астрономический вестник. **48**, № 5. 366 (2014). (*Kondratyev B.P.* // *Solar System Research*. **48**, N 5. 396 (2014)).
- [4] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. // Астрономический журнал **97**, № 5. 408 (2020). (*Kondratyev B.P., Kornoukhov V.S.* // *Astronomy Reports*. **64**, № 5. 434 (2020)).
- [5] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. // Астрономический журнал. **100**, № 6. 524 (2023). (*Kondratyev B.P., Kornoukhov V.S.* // *Astronomy Reports*. **67**, N 6. 596 (2023)).
- [6] Кондратьев Б.П., Корноухов В.С., Басова Е.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. **78**, № 5. 2350801 (2023). (*Kondratyev B.P., Kornoukhov V.S., Basova E.V.* // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **78**, N 5. 681 (2023)).
- [7] <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>
- [8] Hinkley S., Lacour S., Marleau G.-D. et al. // *Astron. Astrophys.* **671**, L5 (2023).
- [9] Mastroianni R., Efthymiopoulos Ch. // *Proceedings IAU Symposium No. 364*. 2022.
- [10] Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. 1968.
- [11] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. 1975.
- [12] Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва-Ижевск: РХД, 2003.
- [13] Borsato D., Degen A., Leleu A. et al. // *A&A*, **A52** (2024).
- [14] Trifonov Tr., Brahm R., Espinoza N. et al. // *AJ*. **162**. 283T. (2021).

## Linear approximation in the two-planet problem with arbitrary orbital inclination. Evolution of the TOI-1130 system

**B.P. Kondratyev<sup>1,2,3,a</sup>, V.S. Kornoukhov<sup>2</sup>, E.N. Kireeva<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Department of Celestial Mechanics, Astrometry and Gravimetry, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

<sup>2</sup>*P.K. Sternberg State Astronomical Institute (GAISH MSU). Moscow, 119991, Russia*

<sup>3</sup>*Main (Pulkovo) Astronomical Observatory RAS. St. Petersburg, Russia*  
E-mail: <sup>a</sup>[work@boris-kondratyev.ru](mailto:work@boris-kondratyev.ru)

A new version of the two-planet problem is formulated and investigated, where orbits with small eccentricities and mutual inclinations can have an arbitrary orientation relative to the main (picture) plane. The model allows studying a wide class of exoplanetary systems with an orbital inclination angle different from  $\pi/2$ . To derive the equations of the secular evolution of orbits, the mutual gravitational energy of Gaussian rings obtained as a series accurate to terms of the second order of smallness is used instead of the classical perturbation function. A method has been developed in which a vector perpendicular to the plane of the orbit and Poincaré variables are introduced to describe each orbit instead of Lagrange elements without loss of information. A closed system of 10 differential equations is obtained and solved analytically for these unknowns. The method is applied to study the secular evolution of the TOI-1130 exoplanetary system.

PACS: 95.10.Ce, 96.15.De, 96.12.De.

*Keywords:* exoplanets, two-planet systems, Gaussian rings and their mutual energy, orbital normal vector, Poincaré variables, precession and secular evolution of orbits.

*Received 03 November 2024.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. 2. Pp. .

### Сведения об авторах

- Кондратьев Борис Петрович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: [work@boris-kondratyev.ru](mailto:work@boris-kondratyev.ru).
- Корноухов Вадим Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: [vs.kornoukhov@physics.msu.ru](mailto:vs.kornoukhov@physics.msu.ru).
- Киреева Екатерина Николаевна — канд. физ.-мат. наук, инженер; e-mail: [rfnz51@yandex.ru](mailto:rfnz51@yandex.ru).