

## Обнаружение и оценка моды Шлихтера ${}_1S_1$ по деформационным данным Баксанского лазерного интерферометра после землетрясения Тохоку 2011 года

М.П. Виноградов,<sup>1,\*</sup> В.К. Милюков,<sup>1</sup> А.В. Мясников,<sup>1</sup> А.Ф. Янин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга (ГАИШ МГУ)  
Россия, 119234 Москва, Университетский пр-т, 13

<sup>2</sup>Институт ядерных исследований РАН, Баксанская нейтринная обсерватория  
Россия, 361600, Кабардино-Балкарская Республика, Эльбрусский район, п. Нейтрино  
(Поступила в редакцию 23.08.2024; после доработки 01.10.2024; подписана в печать 16.11.2024)

Мода собственных колебаний Земли  ${}_1S_1$  (мода Шлихтера) возникает при колебаниях внутреннего твердого ядра Земли относительно внешнего жидкого ядра. В работе выполнен поиск и оценка моды Шлихтера после землетрясения Тохоку 2011 года по данным Баксанского лазерного интерферометра-деформографа. Для поиска и оценки параметров моды использовался алгоритм на основе метода максимального правдоподобия (ММП). Получена наиболее вероятная оценки вырожденной частоты моды и параметров её расщепления, которая может быть связана с наличием возбуждения моды Шлихтера в исследуемых данных. Для найденного периода моды получена оценка скачка плотности между внутренним и внешним ядром Земли. Впервые выполнено сравнение потенциальных возможностей Баксанского деформографа и сверхпроводящих гравиметров сети IGETS для задачи наблюдения моды Шлихтера на примере одного и того же землетрясения. Отмечена близость найденной оценки моды по деформационным наблюдениям с полученной ранее одной из оценок по гравиметрическим наблюдениям, а также с теоретическим значением по модели PREM.

PACS: 91.35. УДК: 550.344

Ключевые слова: собственные колебания Земли, мода Шлихтера, землетрясение Тохоку, Баксанский лазерный интерферометр-деформограф, сверхпроводящий гравиметр.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2520901](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2520901)

### ВВЕДЕНИЕ

Мода Шлихтера (мода  ${}_1S_1$ ) является самой длиннопериодной модой в спектре собственных колебаний Земли (СКЗ). Причиной её возбуждения являются колебания внутреннего твёрдого ядра Земли в жидком внешнем ядре [1]. Период моды непосредственно связан с разницей в плотности между жидким и внутренним ядром, что придаёт определению этого периода важное значение для уточнения моделей внутреннего строения Земли. Альтернативный способ определения разницы плотностей в ядре связан с измерением отношения амплитуд волн РКiKP/RcP, однако этот вариант имеет слишком высокую погрешность [2].

Наиболее вероятным источником возбуждения моды Шлихтера являются крупнейшие землетрясения. Амплитуда возбуждения моды крайне мала и быстро убывает с расстоянием от ядра Земли к поверхности, поэтому даже наиболее чувствительные геофизические приборы — сверхпроводящие гравиметры — не позволяют непосредственно зарегистрировать моду Шлихтера после самых значительных землетрясений (9 Mw) за время наблюдений.

Первые попытки обнаружить моду Шлихтера были предприняты в 1990-х гг. с появлени-

ем высокочувствительных сверхпроводящих гравиметров, ныне объединённых в рамках сети International Geodynamics and Earth Tide Service (IGETS). В большинстве работ [3–18] были выделены максимумы в спектрах, которые могли бы быть связаны с присутствием моды Шлихтера, но ввиду малости амплитуды возбуждения моды (ниже чувствительности самых лучших гравиметров сети) однозначного ответа о наблюдении моды сделано не было.

Авторами данной работы был выполнен поиск моды Шлихтера по данным IGETS после землетрясения Тохоку 2011 г. в Японии с применением метода максимального правдоподобия и последующего комплексирования записей всех работавших на момент землетрясения гравиметров [19]. Были выявлены 3 максимума в достаточной статистике, которые могут быть связаны с возбуждением моды.

Ранее метод максимального правдоподобия уже применялся авторами для поиска моды Шлихтера по деформационным данным Баксанского лазерного интерферометра-деформографа ГАИШ МГУ: после землетрясения Маули в Чили 2010 г. [20], а также для проверки гипотезы постоянного возбуждения моды на долговременном 15-летнем интервале [21].

Цель данной работы — поиск моды Шлихтера по деформационным данным, полученным после землетрясения Тохоку 2011 г. в Японии (9.0 Mw)

\* E-mail: [vinogradovmp@my.msu.ru](mailto:vinogradovmp@my.msu.ru)

на Баксанском лазерном интерферометре, а также сравнение возможностей и результатов использования деформографа и сверхпроводящих гравиметров в задаче обнаружения моды Шлихтера.

## 1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДАННЫЕ

Землетрясение в Японии 11 марта 2011 г. с магнитудой 9.1 Mw (землетрясение Тохоку) на данный момент является самым мощным землетрясением по величине сейсмического момента за последние 50 лет, поэтому представляет большой интерес для обнаружения и оценки параметров моды Шлихтера.

Поиск моды осуществлялся по деформационным данным Баксанского лазерного интерферометра. Баксанский лазерный интерферометр-деформограф был создан в начале 1990-х гг. ГАИШ МГУ, является основной инструментальной базой лаборатории лазерных интерферометрических измерений. Находится в Кабардино-Балкарии, в Приэльбрусье (Баксанское ущелье) в 25 км от Эльбрусского вулканического центра. Интерферометр размещён на расстоянии 650 м от входа в главную штольню Баксанской нейтринной обсерватории ИЯИ РАН на глубине 400 м. Координаты интерферометра: широта  $43^{\circ}12'$ , долгота  $-42^{\circ}43'$ . Ориентация главного измерительного плеча относительно направления на север составляет угол  $150^{\circ}37'$ .

Деформограф представляет собой классический двухпородный неравноплечий интерферометр Майкельсона, принцип работы которого состоит в сравнении оптической длины большого измерительного плеча ( $L_0 = 75$  м) и короткого опорного плеча фиксированной длины (30 см). Инструмент характеризуется очень высокой чувствительностью (инструментальная разрешающая способность к измерениям деформаций порядка  $2 \times 10^{-13}$  стрейн), широким частотным диапазоном (от сверхнизких частот до 1 кГц) и практически неограниченным динамическим диапазоном. Здесь и далее под стрейном понимается внесистемная единица измерения относительной деформации (1 стрейн =  $\delta L/L_0$ , где  $\delta L$  — измеряемое смещение).

$$\begin{aligned}
 s_{xi} &= \frac{S(\varphi_i, \theta_i)}{\omega^2} [A_{\Theta i} \sin \Phi_i + A_{\Phi i} \cos \Phi_i], & s_{yi} &= \frac{S(\varphi_i, \theta_i)}{\omega^2} [A_{\Theta i} \cos \Phi_i + A_{\Phi i} \sin \Phi_i], \\
 A_{\Theta i} &= V_r \{-A_0 \sin \Theta_i + (A_1 \cos \Phi_i + B_1 \sin \Phi_i) \cos \Theta_i\}, \\
 A_{\Phi i} &= V_r \{-A_1 \sin \Phi_i + B_1 \cos \Phi_i\}, \\
 S(\varphi_i, \theta_i) &= 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{\omega t}{2Q}} \left\{ \sin \varphi_i \cos((1+a-b+c)\omega t - \theta_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_i \cos((1+a)\omega t) - \sin \varphi_i \cos((1+a+b+c)\omega t - \theta_i) \right\}, \\
 A_0 &= -V_s (M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi}) r_s^{-1}, \\
 A_1 &= [M_{r\theta} (\dot{V}_s - r_s^{-1} V_s)], \\
 B_1 &= [M_{r\phi} (\dot{V}_s - r_s^{-1} V_s)],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где:  $\Theta, \Phi$  — эллицентрическое расстояние и азимут источника землетрясения по отношению к месту на-

База данных Баксанского лазерного интерферометра включает 2-секундные деформационные данные, запись которых осуществляется в режиме постоянного мониторинга с ноября 2004 г.

Как и в работе [19], нами был выбран интервал с 11 марта 2011 по 9 июля 2012 г., что составило около 486 суток после даты начала землетрясения Тохоку. Перед последующей обработкой данные были прорежены до 10-минутного интервала (70 тысяч отсчетов) и пропущены через фильтр с полосой пропускания от 3 до 8 ч.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ МОДЫ ШЛИХТЕРА

Для теоретического расчёта возбуждения моды Шлихтера после землетрясения использовалась модель Земли PREM [22] и подход, изложенный в [23].

В отличие от гравиметра, регистрирующего только вертикальную компоненту ускорения в точке, деформограф измеряет относительную горизонтальную деформацию, т.е. изменение относительного расстояния между концами его основного плеча. Поэтому расчёт возбуждения моды Шлихтера является более сложным — необходимо учитывать две компоненты моды, а также длину и ориентацию измерительного плеча.

Регистрируемое деформографом изменение относительной длины плеча можно записать в виде:

$$\delta L = \left\{ \left[ (L_0 \sin \alpha + s_{x2} - s_{x1})^2 + (L_0 \cos \alpha + s_{y2} - s_{y1})^2 \right]^{-1/2} - L_0 \right\} / L_0, \tag{1}$$

где  $L_0$  — длина измерительного плеча;  $\alpha$  — азимут прибора (угол между ориентацией измерительного плеча и направлением на север);  $s_{x1}, s_{x2}, s_{y1}$  и  $s_{y2}$  — смещения концов деформографа в горизонтальной плоскости в прямоугольных координатах (ось  $y$  совпадает с направлением на север), вызываемые модой Шлихтера.

Следуя изложенной в [23] теории возбуждения мод СКЗ, для данных смещений можно получить следующие выражения:

блюдения в полярной сферической системе координат;  $V$  и  $\dot{V}$  — горизонтальная собственная функция моды Шлихтера и её производная по радиусу Земли; индексы « $s$ » и « $r$ » означают, что значение функции вычисляется в источнике землетрясения и в точке наблюдения (приёмник) соответственно;  $M_{\theta\theta}$ ,  $M_{\phi\phi}$ ,  $M_{r\theta}$  и  $M_{r\phi}$  — компоненты в полярной сферической системе координат тензора сейсмического момента в источнике землетрясения;  $\varphi_i$ ,  $\theta_i$  — географические координаты (коширота и долгота) концов измерительного плеча деформографа ( $i = 1, 2$ );  $\omega = 2\pi f_d$  — круговая вырожденная частота моды Шлихтера;  $Q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — добротность и параметры расщепления моды.

Временная зависимость теоретически регистрируемой Баксанским деформографом деформации для моды Шлихтера после землетрясения Тохoku, рассчитанная по формулам (1)–(2) для модели PREM, показана на рис. 1. Сложная глубоко модулированная форма сигнала связана с наличием расщепления моды на три синглета с близкими частотами из-за вращения и несферичности Земли и зависит от параметров расщепления моды.

Как видно из рисунка, максимальная деформация должна составить около  $1.5 \times 10^{-13}$  стрейн. Это примерно в полтора раза ниже предельной разрешающей способности деформографа, что исключает прямое наблюдение моды, однако делает возможным её обнаружение с использованием оптимальных методов приёма сигналов.

Следует отметить, что для гравиметров величина теоретического сигнала составляет 0.05 нГал или 1/10 от предельной чувствительности. Однако для корректного сравнения эффективности приборов необходимо учитывать уровень шумов при регистрации моды (см. разд. Обсуждение результатов)

Ранее нами было показано [24], что параметры расщепления  $a$ ,  $b$  и  $c$  зависят друг от друга. В частности, параметр  $a$  может быть выражен через  $b$  и  $c$  следующим образом:

$$a = \frac{1}{3} \left( 1 - 2b \frac{f_d}{\Omega} \right) \left( \frac{\Omega}{f_d} \right)^2 - \frac{2}{3}c, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — частота вращения Земли (в Гц). Таким образом, частоты триплета в рассматриваемом приближении латерально однородной модели Земли полностью определяются тремя параметрами: вырожденной частотой  $f_d$  (или периодом  $T_d = 1/f_d$ ) и двумя параметрами расщепления  $b$  и  $c$ .

Расчёт теоретических значений периода моды Шлихтера и параметров её расщепления был выполнен нами в [19], в табл. 1 приводятся найденные значения для модели Земли PREM.

### 3. АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ

Для обработки и анализа деформационных данных был применён оптимальный алгоритм на основе метода максимального правдоподобия (ММП),

который был разработан нами ранее [25] и который, в различных модификациях, уже неоднократно применялся для оценки параметров СКЗ. В частности, с использованием этого алгоритма была выполнена проверка гипотезы постоянного возбуждения моды Шлихтера по долговременных наблюдений Баксанского лазерного интерферометра-деформографа [21], поиск моды Шлихтера по деформационным данным после землетрясения 2010 года в Чили [20], по гравиметрическим данным после землетрясения 2011 г. в Японии [19], а также при оценке параметров обертонов моды Шлихтера  ${}_2S_1$  и  ${}_3S_1$  [24, 26].

ММП обеспечивает наиболее эффективное обнаружение сигнала в соответствии с выбранным критерием оптимальности Неймана–Пирсона (максимизирует отношение сигнал/шум на выходе), а также позволяет, одновременно с обнаружением, выполнить оценку неизвестных параметров сигнала (в данном случае — периода моды и параметров её расщепления).

Детально применение ММП было описано нами в [25], здесь мы ограничимся кратким описанием метода. Его суть заключается в построении отношения правдоподобия [27], т.е. отношения плотности вероятности в присутствии полезного сигнала к плотности вероятности в его отсутствии. Логарифм этого отношения называется достаточной статистикой, т.к. содержит всю необходимую информацию о наблюдаемом процессе, который является смесью шума и возможного полезного сигнала. В случае применения критерия Неймана–Пирсона решение о наличии сигнала принимается, если достаточная статистика  $Z$  превышает пороговое значение  $h$ , которое определяется вероятностью ложной тревоги, вычисляемой по плотности распределения наблюдаемого процесса в отсутствие полезного сигнала.

Можно показать, что для гауссовского шума оптимальный приёмник представляет собой согласованный фильтр или коррелятор, его характеристики определяются формой полезного сигнала.

ММП позволяет достаточно просто реализовать оценку параметров сигнала в случае, если они являются неизвестными, но детерминированными величинами (именно это мы имеем при оценке параметров моды Шлихтера). В этом случае согласованный фильтр оптимального приёмника делается многоканальным, т.е. каждый раз настраивается на заданное значение параметра из диапазона возможных значений. Число каналов определяется величиной этого диапазона и уровнем дискретизации.

Полученные в каждом из каналов значения достаточной статистики сравниваются и выбирается наибольшее из них — то значение параметра, при котором достигается максимум статистики, и является наиболее вероятной оценкой параметра с точки зрения ММП.

Таким образом, в случае моды Шлихтера мы имеем три неизвестных параметра: вырожденная частота  $f_d$  (или период) и параметры расщепления

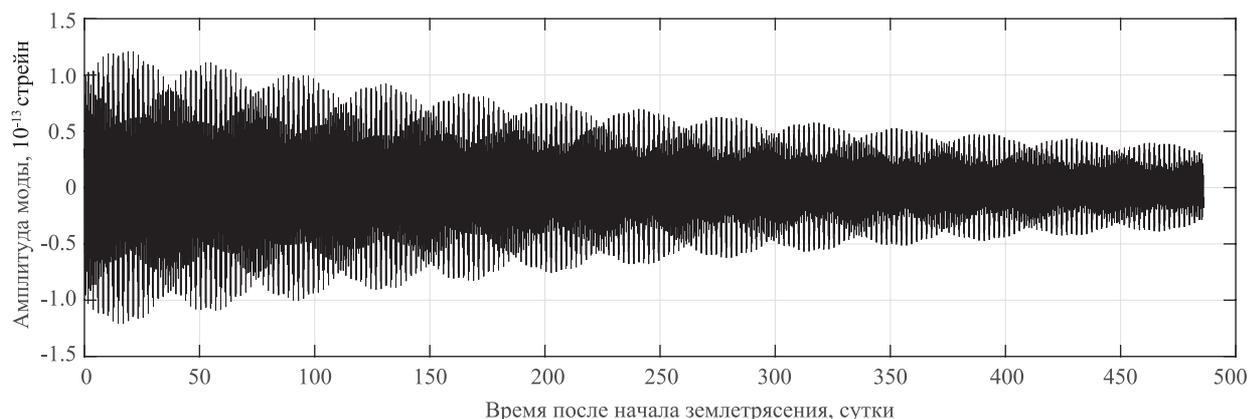


Рис. 1. Рассчитанный сигнал моды Шлихтера, возбужденный землетрясением Тохоку для Баксанского деформографа. Значения вырожденной частоты и параметров расщепления выбраны в соответствии с табл. 1

Таблица 1. Теоретические значения параметров расщепления и периодов синглетов моды Шлихтера

Параметры расщепления, $10^{-3}$			Период вырожденной моды, ч	Периоды синглетов, ч		
$a$	$b$	$c$	$T_d$	$T_{-1}$	$T_0$	$T_{+1}$
15.704	115.003	-3.347	5.209	5.805	5.128	4.621

$b$  и  $c$ . Оставшийся параметр расщепления  $a$  может быть определён через  $b$  и  $c$  по формуле (3).

Интересующий нас диапазон частот соответствует периодам от 4 до 6 ч. Интервал возможных значений по параметрам расщепления  $b$  и  $c$ , а также их дискретизация были выбраны те же, что при поиске моды Шлихтера по гравиметрическим данным [19]:

$$\begin{aligned}
 f_d &\in [4.630 \times 10^{-5}, 6.944 \times 10^{-5}] \text{ Гц}, \\
 b &\in [50 \times 10^{-3}, 150 \times 10^{-3}], \Delta b = 0.1 \times 10^{-3}, \\
 c &\in [-5 \times 10^{-3}; 0], \Delta c = 0.2 \times 10^{-3}, \\
 \Delta f &= 7.5 \times 10^{-9} \text{ Гц}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

В дальнейшем мы вместо вырожденной частоты  $f_d$  будем иногда использовать соответствующее ей значение вырожденного периода  $T_d$ .

Точное решение задачи оптимального приёма (оно реализуется через согласованную фильтрацию) возможно лишь в случае, если шум имеет гауссовское распределение. Как было показано ранее [20], сейсмический шум деформографа не является гауссовским, а его распределение, как и в случае со сверхпроводящими гравиметрами, хорошо описывается нестандартизированным распределением Стьюдента. Поэтому перед вычислением достаточной статистики входные данные преобразуются с помощью безынерционного нелинейного преобразователя, характеристика которого зависит от параметров распределения шума. Назначение преобразователя состоит в увеличении вклада в статистику сигналов слабой амплитуды (которые более вероятно связаны с полезным сигналом) и в ограничении сигналов больших амплитуд, имеющих шумовую природу.

Из-за значительной неопределённости в возможных значениях периода моды Шлихтера поиск моды осуществляется в широком частотном диапазоне, что приводит к попаданию в исследуемый диапазон значительного числа периодических сигналов, не связанных с модой. Их появление может иметь разные причины: прежде всего это приливные гармоники (в диапазоне периодов от 4 до 6 ч их насчитывается 27), а также техногенные сигналы (для Баксанской станции они могут быть связаны с периодическими работами, ведущимися в штольне, в которой находится деформограф). Такие помехи называются когерентными, т. к. имеют схожую с полезным сигналом структуру.

Чтобы исключить ложное принятие шума за полезный сигнал, в алгоритм обработки были добавлены две процедуры для исключения когерентных помех — на стадии предварительной обработки и на стадии постобработки.

На предварительной стадии определяются спектральные максимумы, превышающие средний уровень сигнала на  $3\sigma$ , которые затем удаляются посредством режекторных фильтров. Подробно эта процедура была прописана в [19]. Удаление шумов на стадии постобработки заключалось в сравнении найденных оценок периодов триплета моды Шлихтера с известными значениями периодов приливных гармоник. Те оценки, у которых период хотя бы одного синглета совпадал со значением приливной гармоники, отбрасывались.

Из найденной таким образом достаточной статистики удалялась частотная зависимость, связанная с «окраской» шума, т. е. она «отбеливалась» (исходный сейсмический шум имеет характерную зависимость от частоты по закону  $1/f$ ).

Структура обработки данных для поиска и оценки моды Шлихтера по деформационным данным приведена на рис. 2. Ключевым блоком обработки является многоканальный согласованный фильтр, который формирует теоретическую модель полезного сигнала (триплета) для трёх неизвестных параметров  $f_d$ ,  $b$ ,  $c$  в вышеуказанных диапазонах возможных значений этих параметров. Более подробно согласованная фильтрация в рамках ММП описана в наших предыдущих работах [24–26].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Как уже было указано ранее, при использовании критерия Неймана–Пирсона решение о наличии сигнала принимается в случае превышения порога  $h$ , который определяется по вероятности ложной тревоги. Вероятность ложной тревоги определяется плотностью вероятности шума в отсутствии сигнала. Для расчёта вероятности ложной тревоги использовался тот же подход, который был применён нами в [19]. При гауссовском шуме (а достаточная статистика является гауссовской) плотность распределения величины абсолютного максимума описывается экспоненциальным распределением [28]:

$$W(h_m) = \sqrt{\alpha} e^{\alpha - h_m \sqrt{\alpha}} e^{-e^{\alpha - h_m \sqrt{\alpha}}}, \quad (5)$$

где  $\alpha = 2 \ln \left( \frac{1}{2\pi} N \sqrt{-R_0''} \right)$ ;  $N$  — число отсчётов (длительность сигнала);  $R_0''$  — значение второй производной автокорреляционной функции в нуле;  $h_m = h / \sigma_{\text{вых}}$  — значение порога обнаружения, нормированное на стандартное отклонение среднего на выходе приёмника. Тогда вероятность превышения статистикой заданного порога  $h_m$  (вероятность ложной тревоги  $F$ ) будет определяться следующей формулой:

$$F(h_m) = 1 - \int_{-\infty}^{h_m} W(x) dx. \quad (6)$$

Для расчёта автокорреляционных функций статистики  $Z(T_d, b, c)$  сначала вычислялись их эмпирические зависимости, затем они аппроксимировались методом наименьших квадратов функциями вида  $R(\tau) = (1 + \beta |\tau|) e^{-\beta |\tau|}$ . Так как  $-R_0'' = \beta^2$ , а  $\beta = 1/\tau_0$ , где  $\tau_0$  — интервал корреляции, то произведение  $N \sqrt{-R_0''} = N\beta$  представляет собой число независимых отсчётов исходной гауссовской статистики  $N_{eff}$ .

Так как достаточная статистика зависит от трёх переменных  $(T, b, c)$ , то среднее число независимых отсчётов можно записать в виде  $N_{eff} = N_T \beta_T \cdot N_b \beta_b \cdot N_c \beta_c$ , где  $N_T, N_b, N_c$  — количество каналов приёмника по каждой неизвестной переменной (они определяются формулами (4));  $\beta_T, \beta_b, \beta_c$  — обратные значения автокорреляций по соответствующим переменным, которые рассчитывались по статистике  $Z(T_d, b, c)$  и имеют следующие

значения:  $\beta_T = 0.88$ ,  $\beta_b = 0.26$  и  $\beta_c = 1.21$ . Таким образом, среднее число независимых отсчётов  $N_{eff}$  примерно в 3.6 раза меньше общего числа значений статистики. При этом учитывалось, что распределение значений автокорреляции в пространстве значений  $(T, b, c)$  неоднородно, поэтому для каждой «тройки» неизвестных параметров необходимо учитывать соответствующее ей значение  $\beta(T, b, c)$ . Поэтому плотности распределения вероятностей, рассчитанные по формуле (5), также будут незначительно отличаться друг от друга для разных значений оцениваемых параметров.

Из более чем 80 миллионов значений достаточной статистики для деформографических данных после землетрясения Тохоку, вычисляемых многоканальным приёмником в пространстве значений параметров (4), всего лишь 8 значений имели вероятность ложной тревоги менее 99%. Однако 7 из них были отброшены блоком исключения когерентных помех из-за совпадения найденных максимумов с известными шумовыми гармониками, т.к. как минимум один из периодов триплета, соответствующего оценке, совпадал в пределах погрешности с периодом известных приливных гармоник (как правило, с 4- или с 6-часовой). Единственный максимум, который не мог быть объяснён совпадением с известными приливными гармониками, имеет амплитуду 5.3 и соответствующую ему вероятность ложной тревоги 0.68. Общий вид статистики  $Z(T_d, b)$  для значения  $c = -0.8 \times 10^{-3}$ , при котором этот максимум достигается, приведён на рис. 3, а. На графике также видно несколько локальных максимумов меньшей величины, однако даже второй по величине локальный максимум  $Z_2$ , имеющий амплитуду 5.0, из-за существенной нелинейности связи между достаточной статистикой и вероятностью ложной тревоги (см. рис. 3, б) имеет вероятность ложной тревоги 0.993.

Соответствующие абсолютному максимуму значения вырожденной частоты и параметров расщепления приведены в табл. 2. С точки зрения ММП они являются наиболее вероятной (достоверной) оценкой параметров моды Шлихтера по результатам анализа деформационных данных после землетрясения Тохоку. Здесь и далее под достоверностью мы понимаем величину, равную  $1 - F$ .

#### 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате обработки деформационных данных после землетрясения Тохоку был выявлен только один максимум достаточной статистики, который имеет отличную от нуля достоверность, и не может быть связан с приливными гармониками. Вероятность того, что он может быть вызван возбуждением моды Шлихтера, составляет 32%.

Для расчёта скачка плотности между внутренним и внешним ядром Земли использовались теория, изложенная в [29]. Можно показать, что связь между периодом моды Шлихтера и разницей

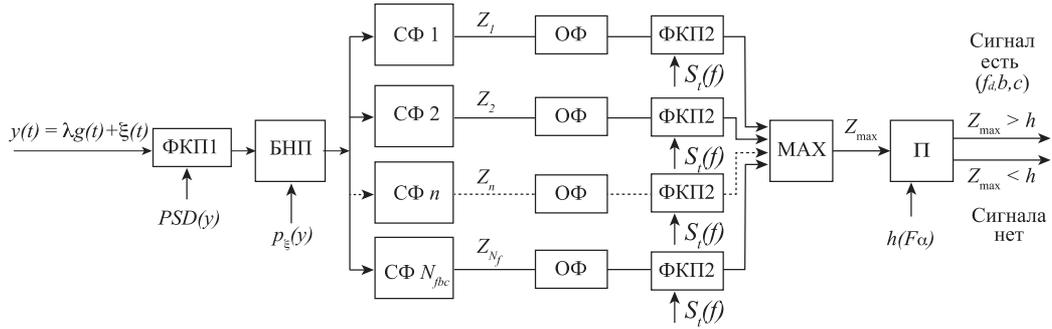


Рис. 2. Схема алгоритма обработки деформационных данных для оптимальной оценки параметров моды Шлихтера использованием ММП.  $y(t)$  — деформационный сигнал, представляющий смесь возможного полезного сигнала (моды Шлихтера)  $g(t)$  и сейсмического шума  $\xi$ ; ФКП1 — блок определения когерентных помех по спектру и их фильтрации режекторными фильтрами; БНП — безынерционный нелинейный преобразователь; СФ — многоканальный согласованный фильтр; ОФ — обеляющий фильтр; МАХ — выбор параметров, максимизирующих статистику; ФКП2 — блок определения и исключения когерентных помех по совпадению найденных максимумов с известными шумовыми гармониками (приливными); П — пороговое устройство

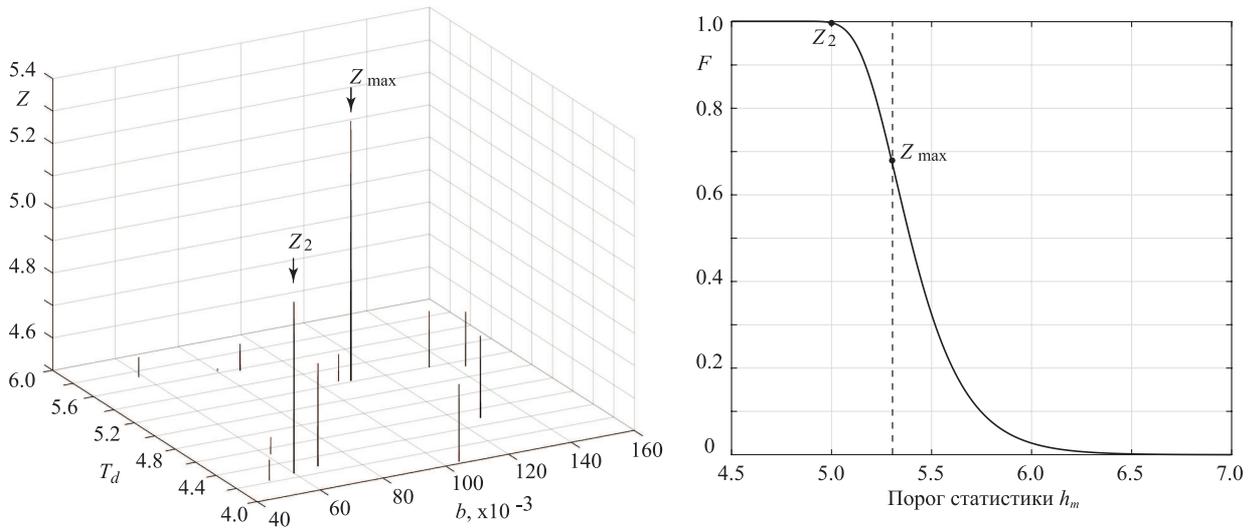


Рис. 3. Максимальные значения достаточной статистики  $Z(T_d, b)$ , достигаемые при  $c = -0.8 \times 10^{-3}$ , по результатам обработки деформационных данных после землетрясения Тохоку (а) и зависимость вероятности ложной тревоги от величины достаточной статистики (см. формулы (5)–(6))

в плотности описывается формулой [19]:

$$\Delta\rho = \frac{1 + \alpha}{\left(\frac{GT_d^2}{3\pi} - 1/\rho_0\right)}, \quad (7)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная;  $\rho_0$  — плотность внутреннего ядра. Параметр  $\alpha$  сложным нелинейным образом зависит от параметров, связанных со скоростью вращения Земли, радиусов и плотностей внешнего и внутреннего ядра, при этом его возможные значения не выходят за границы диапазона от 0.4 до 0.5.

Наиболее вероятная оценка соответствует значению скачка плотности  $\Delta\rho = 596 \text{ кг/м}^3$  (значение по PREM равно  $597 \text{ кг/м}^3$ ).

Полученные результаты оценки вырожденной частоты и частот синглетов моды Шлихтера представлены в табл. 3 вместе с теоретическими результатами для разных модификаций моделей PREM

и с экспериментальными данными, полученными нами по данным сети IGETS также после землетрясения Тохоку.

Найденная оценка периодов триплета моды Шлихтера очень близка к одной из возможных оценок (№ 3), полученных нами в результате анализа гравиметрических данных сети IGETS после того же землетрясения Тохоку [19]. Также следует обратить внимание на то, что обе эти оценки достаточно близки к теоретическому значению по модели PREM для скачка плотности  $\Delta\rho = 600 \text{ кг/м}^3$ .

Использование одного и того же алгоритма при анализе различных видов данных (гравиметрических и деформационных) после одного и того же события (землетрясения Тохоку) делает возможным сравнение используемых приборов для оценки моды Шлихтера. Лазерный деформограф имеет более высокую чувствительность в диапазоне моды Шлихтера (для периодов 4–6 ч), однако записи де-

Таблица 2. Максимумы достаточной статистики и соответствующие им параметры моды Шлихтера

Максимум статистики	$Z_{max}$	Параметры расщепления, $10^{-3}$			$T_d$ , ч	Достоверность
		$a$	$b$	$c$		
Эксперимент	5.30	15.8	109.4	-0.8	5.215	32.1%
PREM	-	15.7	115.0	-3.4	5.209	-

Таблица 3. Полученные оценки моды Шлихтера и их сравнение с теоретическими значениями

№ п/п	Автор/Источник	$T_{-1}$	$T_0$	$T_{+1}$	$T_d$
Теоретические модели (PREM)					
1	Dziewonski and Anderson, 1981 [22]	4.6776	5.1814	5.7991	5.2384
2	Register, 2003 [30]	4.7700	5.3090	5.9910	5.4200
3	Rosat et al., 2006, Method 1 (для $\Delta\rho = 600$ кг/м <sup>3</sup> ) [9]	4.761	5.297	5.977	н.д.
4	Rosat et al., 2006, Method 2 (для $\Delta\rho = 600$ кг/м <sup>3</sup> ) [9]	4.691	5.184	5.851	н.д.
Виноградов и Милуков, 2024 [19]					
5	Оценка №1 (достоверность 77%)	4.0125	4.5567	5.2935	4.613
6	Оценка №2 (достоверность 70%)	4.1319	4.5767	5.1654	4.634
7	Оценка №3 (достоверность 16%)	4.6085	5.1849	5.9692	5.269
Данная работа					
8	Оценка №1 (достоверность 32%)	4.638	5.134	5.759	5.215

Примечание: н.д. означает отсутствие оценки вырожденной частоты.

формаций в данном спектральном диапазоне имеют существенно более высокие шумы, чем записи ускорения силы тяжести, сделанные на сверхпроводящих гравиметрах.

Отношение «сигнал–шум» на выходе оптимального приёмника на основе ММП для дискретного сигнала можно записать в виде [27]:

$$SNR_{сф} = \frac{E}{\sigma_0^2} N, \quad (8)$$

где  $E$  — энергия полезного сигнала,  $\sigma_0^2$  — дисперсия шума,  $N$  — длительность наблюдения (число отсчётов).

Измеренная дисперсия шума для деформационных данных  $5.26 \times 10^{-19}$  стрейн<sup>2</sup> в полосе периодов 4–6 ч, а расчетная (теоретическая) энергия сигнала моды Шлихтера  $3.7 \times 10^{-23}$  стрейн<sup>2</sup>. Таким образом, при обработке деформационных данных длительностью  $N = 70000$  отношение сигнал–шум на выходе оптимального приёмника, согласно (8), будет  $SNR_{сф} = 2.2$ . При помощи характеристических кривых обнаружения [27] можно найти вероятность правильного обнаружения для этого значения сигнал–шум; она составляет 99.6%.

При обработке длительных записей как для сверхпроводящих гравиметров [19], так и деформографа, отношения сигнал–шум на выходе оптимальных приёмников в несколько раз превышают единицу, что практически исключает вероятность пропуска полезного сигнала. То есть если полезный сигнал в данных действительно есть, то в достаточной статистике обязательно будет максимум,

ему соответствующий. В этом случае достоверность определения моды будет определяться вероятностью ложной тревоги (т.е. вероятностью того, что в статистике, наряду с соответствующим полезному сигналу максимумом, наблюдаются другие максимумы, связанные с шумом). Найденная вероятность ложной тревоги для обоих экспериментов оказалась сравнимой.

Таким образом, по совокупности полученных результатов обработки деформационных (в данной работе) и гравиметрических данных (в работе [19]) после землетрясения Тохоку можно предположить, что наиболее вероятной оценкой вырожденного периода моды Шлихтера является значение, находящееся в интервале 5.2–5.3 ч, а соответствующий скачок плотности между внешним и внутренним ядром — в диапазоне 580–600 кг/м<sup>3</sup>.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнены поиск и оценка параметров (вырожденного периода и параметров расщепления) моды Шлихтера по 486-суточным деформационным данным, полученным на Баксанском лазерном интерферометре после землетрясения Тохоку 2011 г. в Японии (9.0 Mw).

Для обнаружения и оценки моды использован алгоритм на основе метода максимального правдоподобия, который ранее применялся авторами для поиска моды по гравиметрическим и деформографическим наблюдениям, а также при оценке параметров обертонов моды Шлихтера.

Алгоритм учитывает особенности теоретического возбуждения моды (в частности, взаимную связь между параметрами расщепления и вырожденной частоты, а также более широкий возможный диапазон параметров расщепления). Для снижения влияния и учёта помех различной природы (в том числе когерентных, связанных с многочисленными приливными гармониками) алгоритм дополнен процедурами режекторной фильтрации, безынерционным нелинейным преобразователем входных данных, блоком обеления достаточной статистики и блоком исключения когерентных помех по совпадению найденных максимумов с известными шумовыми гармониками (приливными). При оценке достоверности учитывались корреляционные свойства вычисляемой достаточной статистики.

Для удобства сравнения результатов все исходные параметры в данной работе (в частности, диапазоны возможных значений периода моды и параметров расщепления, интервалы их дискретизации, длительность наблюдения) были выбраны такими же, как при поиске моды Шлихтера по гравиметрическим данным сети IGETS [19]. При этом, разумеется, учитывались особенности используемых данных: различие в форме предполагаемого возбуждения моды, различные статистические свойства шумов и т. п.

Определена наиболее вероятная оценка периода моды Шлихтера и параметров расщепления: вычислены периоды триплета моды, а также значение скачка плотности на границе внутреннего и внешнего ядра Земли. Найденные значения на основе анализа деформационных данных Баксанского лазерного интерферометра-деформографа оказались близкими к одной из вероятных оценок моды, полученной при анализе данных сверхпроводящих гравиметров после того же землетрясения Тохоку, а совместно они достаточно близки к теоретическому значению модели Земли PREM со значением скачка плотности  $600 \text{ кг/м}^3$ .

Следует отметить, что, несмотря на относительно небольшие вероятности связи полученных результатов с модой Шлихтера в каждом из экспериментов отдельно (32% для деформографа и 16% для гравиметров), совпадение двух оценок, полученных на разных приборах после одного и того же события, а также практически равные единице вероятности правильного обнаружения позволяют говорить о значительной достоверности полученного итогового результата.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-27-00237).

- [1] *Slichter L.B.* // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **47**. 186 (1961).
- [2] *Овчинников В.М., Краснощечков Д.Н.* // *Физика Земли*. № 2. 3 (2021). (*Ovtchinnikov V.M., Krasnoshechekov D.N.* // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. **57**, N 2. 141 (2021)).
- [3] *Smylie D.E.* // Science. **255**. 1678 (1992).
- [4] *Crossley D.J., Hinderer J., Legros H.* // Phys. Earth Planet. Int. **68**. 97 (1992).
- [5] *Hinderer J., Crossley D., Jensen O.* // Phys. Earth Planet. Int. **90**. 183 (1995).
- [6] *Smylie D.E., McMillan D.G.* // *Phys. Earth Planet. Inter.* **117**. 71 (2000).
- [7] *Courtier N., Ducarme B., Goodkind J. et al.* // Phys. Earth Planet. Inter. **117**. 3 (2000).
- [8] *Rosat S., Hinderer J., Crossley D.J., Rivera L.* // Phys. Earth Planet. Int. **140**, N 13. 183 (2003).
- [9] *Rosat S., Rogister Y., Crossley D., Hinderer, J.* // J. of Geodyn. **41**. 296 (2006).
- [10] *Guo J. Y., Dierks O., Neumeyer J., Shum C.K.* // Geophys. J. Int. **168**. 507 (2007).
- [11] *Xu J.Q., Sun H.P., Zhou J.C.* // Chin. Sci. Bull. **55**, N 3. 276 (2010).
- [12] *Rosat S., Rogister Y.* // Phys. Earth Planet. Inter. **190-191**. 25 (2012).
- [13] *Shen W. B., Ding H.* // J. Earth Sci. **24**. 725 (2013).
- [14] *Jiang Y., Xu J., Sun H.* // *Journal of Earth Science*. **24**, N 5. 750 (2013).
- [15] *Shen W.B., Luan W.* Feasibility // *Geodesy and Geodynamics*. **6**, N 5. 307 (2015).
- [16] *Ding, H., Shen W.-B.* // *J. Geophys. Res. Solid Earth*. **118**. 5018 (2013).
- [17] *Ding H., Chao B.F.* // *J. Geophys. Res.: Solid Earth*. **48**. 7261 (2015).
- [18] *Luan W., Shen W., Ding H., Zhang T.* // *SurvGeophys*. **40**. 1129 (2019).
- [19] *Виноградов М.П., Миллюков В.К.* // *Физика Земли*. № 1 (2025).
- [20] *Миллюков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П., Мясников А.В.* // *Физика Земли*. № 6. 11 (2020). (*Milyukov V.K., Vinogradov M.P., Mironov A.P., Myasnikov A.V.* // *Izv. Physics of the Solid Earth*. **56**, N 6. 737 (2020)).
- [21] *Миллюков В.К., Виноградов М.П., Миронов А.П., Мясников А.В.* // *Геофизические процессы и биосфера*. **19**, № 4. 143 (2020). (*Milyukov V. K., Vinogradov M. P., Mironov A. P., Myasnikov A. V.* // *Izv. Atmospheric and Oceanic Physics*. **56**, N 11. 1447 (2020)).
- [22] *Dziewonski A.M., Anderson D.L.* // Phys. Earth Planet. Int. **25**. 297 (1981).
- [23] *Dahlen F., Tromp J.* Theoretical Global Seismology. U.S., Princeton, New Jersey: Princeton University Press. 1998.
- [24] *Виноградов М.П., Миллюков В.К.* // *Физика Земли*. № 2. 3 (2024). (*Vinogradov M.P., Milyukov V.K.* // *Izv. Physics of the Solid Earth*. **60**, N 2. 236 (2024).)
- [25] *Виноградов М.П., Миллюков В.К., Миронов А.П., Мясников А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 2. 89 (2019). (*Vinogradov M.P., Milyukov V.K., Mironov A.P., Myasnikov A.V.* // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **74**, N 2. 205 (2019)).
- [26] *Milyukov V.K., Vinogradov M.P.* // *Pure Appl. Geophys.* **180**. 735 (2023).

- [27] *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радиоисвязь, 1992.
- [28] *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
- [29] *Busse F.H.* // Journal of Geophysical Research. **79**, N 5. 753 (1974).
- [30] *Rogister Y.* // Phys. Earth Planet. Inter. **140**. 169 (2003).

## Detection and evaluation of Slichter ${}_1S_1$ mode based on Baksan laser interferometer strain data after the 2011 Tohoku earthquake

**М.Р. Vinogradov<sup>1,a</sup>, V.K. Milyukov<sup>1</sup>, A.V. Myasnikov<sup>1</sup>, A.F. Yanin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Sternberg Astronomical Institute, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

<sup>2</sup>*Baksan Neutrino Observatory, Institute for Nuclear Research, RAS  
Russia, 361600, Republic of Kabardino-Balkaria, Elbrusdistrict, p. Neutrino*

*E-mail: <sup>a</sup>vinogradovmp@my.msu.ru*

The  ${}_1S_1$  mode of the Earth's free oscillations (Slichter mode) arises from the oscillations of the Earth's inner solid core relative to the outer liquid core. The search and evaluation of the Slichter mode after the 2011 Tohoku earthquake using data from the Baksan laser interferometer-strainmeter are presented in this paper. An algorithm based on the Maximum Likelihood Method (MLM) was used to search and for estimate the mode parameters. The most likely estimates of the degenerate mode frequency and its splitting parameters associated with the presence of Slichter mode excitation in the studied data are obtained. An estimate of the density jump between the inner and outer core of the Earth is obtained for the found mode periods. For the first time, the potential capabilities of the Baksanstrainmeter and the superconducting gravimeters of the IGETS network have been compared for the problem of Slichter mode observation after the same earthquake. The similarity of the found estimate of the mode from strain observations with the previously obtained estimate from gravimetric observations, as well as with the theoretical value from the PREM model, is noted.

PACS: 91.35.

*Keywords:* Earth's free oscillations, Slichter mode, Tohoku earthquake, Baksan laser interferometer-strainmeter, superconducting gravimeter.

*Received 23 August 2024.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. 2. Pp. .

### Сведения об авторах

1. Виноградов Михаил Петрович — вед. инженер ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: [vinogradovmp@my.msu.ru](mailto:vinogradovmp@my.msu.ru).
2. Милуков Вадим Константинович — доктор физ.-мат. наук, зав. лабораторией; e-mail: [vmilyukov@yandex.ru](mailto:vmilyukov@yandex.ru).
3. Мясников Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: [andrey0405@mail.ru](mailto:andrey0405@mail.ru).
4. Янин Алексей Федорович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; e-mail: [yanin@yandex.ru](mailto:yanin@yandex.ru).