

Дуальная симметрия эффективных моделей квантовой хромодинамики

Р. Н. Жохов,¹ К. Г. Клименко,^{2,*} Т. Г. Хунджуа³¹Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова
Россия, 142092, Московская обл., Троицк²ГНЦ Российской Федерации «Институт физики высоких энергий им. А. А. Логанова»
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
Россия, 142281, Московская обл., Протвино³Институт математики им. А. Размадзе, Грузинская академия наук, отделение теоретической физики
Грузия, GE-0193, Тбилиси

(Поступила в редакцию 09.12.2024; после доработки 11.02.2025; подписана в печать 23.02.2025)

В работе исследованы свойства симметрии фазовой диаграммы плотной кварковой материи, состоящей из u и d трехцветных кварков, в рамках безмассовых $(3+1)$ -мерных моделей Намбу–Йона–Лазинио и квантовой хромодинамики. Оказывается, что при наличии барионного μ_B , изоспинового μ_I , кирального μ_5 и кирального изоспинового μ_{I5} химических потенциалов лагранжианы этих моделей инвариантны относительно так называемого дуального преобразования. Следовательно, полные термодинамические потенциалы этих моделей дуально симметричны. Это означает, что на полных $(\mu_B, \mu_I, \mu_5, \mu_{I5})$ -фазовых портретах этих моделей фазы со спонтанным нарушением киральной симметрии и конденсации заряженных пионов дуально сопряжены (симметричны) друг другу.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz УДК: 530.145

Ключевые слова: дуальная симметрия, модели Намбу–Йона–Лазинио, квантовая хромодинамика.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.80.2530103

ВВЕДЕНИЕ

Ранее на основе некоторых $(1+1)$ - и $(2+1)$ -мерных безмассовых моделей квантовой теории поля с четырехфермионными взаимодействиями (и расширенными кварковым μ и киральным μ_5 химическими потенциалами) было установлено, что в плотной барионной материи, описываемой в рамках этих низкоразмерных моделей, существует дуальность (или симметрия) между явлениями спонтанного нарушения киральной симметрии (СНКС) и сверхпроводимости [1–5]. Как оказалось (см., например, в работах [3, 5]), это дуальное соответствие основано на инвариантности модельного лагранжиана относительно (i) так называемых преобразований Паули–Гюрши спинорных полей $\psi(x)$ [6, 8], и (ii) одновременно выполняемых перестановок значений констант связи в каналах кварк–антикваркового и сверхпроводящего взаимодействий, а также значений химических потенциалов, $\mu \leftrightarrow \mu_5$. При Паули–Гюрши преобразовании члены лагранжиана вида $(\bar{\psi}\psi)^2$ и $(\bar{\psi}\psi)^2$, отвечающие соответственно за кварк–антикварковое и сверхпроводящее взаимодействия, преобразуются друг в друга. Кроме того, лагранжиановы члены $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ и $\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$ (которые отвечают за кварковую и киральную плотности в системе), соответствующие химическим потенциалам μ и μ_5 модели, также преобразуются друг в друга. Благодаря этому факту, дуальная инвариантность

лагранжиана приводит к полной (μ, μ_5) -фазовой диаграмме модели, на которой сверхпроводящая и СНКС фазы дуально сопряжены друг другу, т.е. они расположены зеркально симметрично относительно линии $\mu = \mu_5$ фазовой диаграммы. Кроме того, многие характеристики плотной среды, вычисленные в одной из фаз, легко экстраполируются на дуально сопряженную фазу материи. Таким образом, дуальная симметрия модели значительно упрощает исследования ее термодинамических свойств.

Затем возможность дуальной симметрии между другими физическими явлениями была исследована в рамках безмассовой $(3+1)$ -мерной модели Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ) [9], состоящей из N_c -цветных u и d кварков. Эта простейшая модель НЙЛ описывает явления, связанные только с каналами взаимодействия кварк–антикварк. Кроме того, лагранжиан модели был расширен барионным μ_B , изоспиновым μ_I и киральным изоспиновым μ_{I5} химическими потенциалами, а ее термодинамический потенциал (ТДП) был вычислен в ведущем порядке разложения по большому N_c (или в приближении среднего поля) [10, 11] и на этой основе была изучена фазовая структура плотной кварковой материи с ненулевыми барионной, изоспиновой и киральной изоспиновой плотностями. Как было показано в [9], в этом приближении ТДП модели обладает симметрией относительно перехода параметров порядка фаз СНКС и заряженной пионной конденсации (ПК) друг в друга, а также одновременного преобразования $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$. В силу этой симметрии ТДП, которую мы называем дуальной

* E-mail: kklm@ihep.ru

симметрией между фазами СНКС и заряженной ПК, оказывается, что при каждом фиксированном значении μ_B фазы СНКС и заряженной ПК располагаются зеркально симметрично относительно линии $\mu_I = \mu_{I5}$ на соответствующей (μ_I, μ_{I5}) -фазовой диаграмме модели. Это означает, что, зная фазу (и ее свойства) модели при, например, $\mu_I < \mu_{I5}$, можно определить, какая фаза (и ее свойства) реализуется при $\mu_I > \mu_{I5}$. Следовательно, в приближении среднего поля в упомянутой выше простейшей модели НЙЛ существует дуальность между явлениями СНКС и заряженной ПК. Она является следствием вышеупомянутой дуальной симметрии ТДП, вычисленного в приближении среднего поля. (В предлагаемой статье рассматриваются дуальные свойства только некоторых $(3+1)$ -мерных моделей, но различные аспекты дуальности между явлениями СНКС и заряженной ПК исследовались также и в $(1+1)$ -мерных моделях теории поля [15, 16].) После этого в работе [12] было показано, что дополнительный киральный химический потенциал μ_5 не портит эту дуальность. Однако следует иметь в виду, что дуальность между фазами с заряженной ПК и СНКС является точной (в приближениях среднего поля или большого значения N_c) только в киральном пределе, т.е. когда голая масса кварка m_0 равна нулю. При $m_0 \neq 0$ дуальность между явлениями СНКС и заряженной ПК является лишь приблизительной [13].

И совсем недавно более сложная модель НЙЛ с дополнительным дикварковым каналом взаимодействия и расширенная членами с μ_B , μ_I и μ_{I5} химическими потенциалами была исследована на предмет появления в ней дуальных симметрий [14]. В этой работе в киральном пределе и в приближении среднего поля было показано, что, несмотря на наличие фазы с цветовой сверхпроводимостью, на (μ_B, μ_I, μ_{I5}) фазовом портрете модели также имеется дуальная симметрия только между фазами с заряженной ПК и СНКС (фаза с цветовой сверхпроводимостью при таком дуальном преобразовании переходит сама в себя). Таким образом, мы видим, что две различные модели НЙЛ, которые эффективно описывают (в общем случае разные) низкоэнергетические области КХД, имеют термодинамические потенциалы, которые в приближении среднего поля инвариантны относительно одного и того же дуального преобразования, связывающего явления СНКС и заряженной ПК.

Таким образом, возникают, естественно, два вопроса. 1) Присуща ли дуальность между явлениями СНКС и заряженной ПК упомянутым выше моделям НЙЛ в целом, а не только их приближениям среднего поля. Кроме того, 2) можно поставить вопрос еще шире и попытаться прояснить ситуацию с дуальной симметрией и исходного лагранжиана КХД, чьи свойства эффективным образом описывают упомянутые выше модели НЙЛ. Рассмотрению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

1. ДУАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ МЕЖДУ ЯВЛЕНИЯМИ СНКС И ЗАРЯЖЕННОЙ ПК В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЙЛ

1.1. Случай простейшей модели НЙЛ

В недавней работе [12] исследовалась фазовая структура плотной кварковой материи, образованной u и d кварками и находящейся в термодинамическом равновесии при нулевой температуре ($T = 0$). При этом свойства кварковой среды рассматривались в приближении среднего поля (или в ведущем порядке разложения $1/N_c$) в рамках безмассовой модели НЙЛ с четырехфермионным лагранжианом следующего вида:

$$L_{NJL} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^0\mathcal{M}\psi + G\left\{(\bar{\psi}\psi)^2 + (i\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi)^2\right\}, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{M} = \frac{\mu_B}{3} + \frac{\mu_I}{2}\tau_3 + \frac{\mu_{I5}}{2}\gamma^5\tau_3 + \mu_5\gamma^5, \quad (2)$$

а $\psi \equiv \psi(x)$ — дублет трехцветных u и d кварков, т.е. $\psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$, τ_k ($k = 1, 2, 3$) — 2×2 матрицы Паули. Кроме того, лагранжиан (1) содержит барионный μ_B , изоспиновый μ_I , киральный изоспиновый μ_{I5} и киральный μ_5 химические потенциалы. Здесь мы продолжаем изучение данной модели, которая призвана описывать свойства кварковой материи с ненулевыми барионной $n_B = (n_u + n_d)/3$ и изоспиновой $n_I = (n_u - n_d)/2$ плотностями (n_u и n_d — плотности u и d кварков соответственно). Эти величины термодинамически сопряжены с барионным и изоспиновым химическими потенциалами μ_B и μ_I . Мы также предполагаем, что в плотной кварковой материи может быть ненулевой и разность плотностей n_R и n_L всех правых и всех левых кварков. Следовательно, киральная плотность системы, т.е. величина $n_5 \equiv n_R - n_L$, и термодинамически сопряженный ей киральный химический потенциал μ_5 в нашем случае отличны от нуля. Наконец, возможна и более общая ситуация, когда киральные плотности u и d кварков, т.е. величины n_{u5} и n_{d5} , не равны друг другу. Это означает, что киральная изоспиновая плотность $n_{I5} \equiv n_{u5} - n_{d5}$ системы может быть отличной от нуля (заметим, что $n_5 = n_{u5} + n_{d5}$). Эта величина термодинамически сопряжена с киральным изоспиновым химическим потенциалом μ_{I5} кварковой материи.

Величины n_B , n_I и n_{I5} являются плотностями сохраняющихся зарядов, которые соответствуют инвариантности лагранжиана (1) относительно абелевых групп $U_B(1)$, $U_{I3}(1)$ и $U_{AI3}(1)$, где ¹

$$\begin{aligned} U_B(1) : \psi &\rightarrow \exp(i\alpha/3)\psi; \\ U_{I3}(1) : \psi &\rightarrow \exp(i\alpha\tau_3/2)\psi; \\ U_{AI3}(1) : \psi &\rightarrow \exp(i\alpha\gamma^5\tau_3/2)\psi. \end{aligned} \quad (3)$$

¹ Для дальнейшего напомним, что $\exp(i\alpha\tau_3) = \cos\alpha + i\tau_3\sin\alpha$, $\exp(i\alpha\gamma^5\tau_3) = \cos\alpha + i\gamma^5\tau_3\sin\alpha$.

Подчеркнем, что лагранжиан (1) инвариантен относительно каждого из преобразований в (3) и что в этом случае внешние параметры системы, т.е. химические потенциалы, константы связи и т. д., остаются неизменными. Поэтому из (3) следует, что $n_B = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle / 3$, $n_I = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau^3 \psi \rangle / 2$ и $n_{I5} = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \tau^3 \psi \rangle / 2$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по основному состоянию (или состоянию термодинамического равновесия (см. [17]) системы. Можно также отметить, что в дополнение к (3) лагранжиан (1) инвариантен и относительно электромагнитной группы преобразований $U_Q(1)$: $\psi \rightarrow \exp(iQ\alpha)\psi$, где $Q = \text{diag}(2/3, -1/3)$. Однако киральный химический потенциал μ_5 не соответствует сохраняющейся величине модели (1). Обычно его вводят для описания системы на временных масштабах, когда в системе завершены все процессы изменения киральности, и она находится в состоянии термодинамического равновесия с некоторым фиксированным значением киральной плотности n_5 [18].

Наконец, прежде чем перейти к более детальному рассмотрению модели НЙЛ (1), следует отметить, что в ядрах нейтронных звезд может существовать холодная плотная кварковая материя с изоспиновой асимметрией. Обычно (см., например, в работах [17, 19–22]) такая кварковая среда изучается с помощью эффективных моделей, включающих всего два химических потенциала, μ_B и μ_I . Но этого может быть недостаточно для описания ее реальных свойств. Дело в том, что нейтронные звезды обладают очень сильными магнитными полями, благодаря которым в плотной кварковой среде на основе кирального магнитного [23] и кирального сепарационного [24] эффектов может генерироваться ненулевая киральная n_5 и киральная изоспиновая n_{I5} плотности (см. соответствующее обсуждение в работах [13, 25]). Поэтому мы считаем, что в рамках модели (1) с четырьмя химическими потенциалами можно получить более адекватное описание свойств реальной плотной кварковой материи.

Для упрощения исследования фазовой структуры модели НЙЛ (1) обычно используют вспомогательный лагранжиан $\tilde{L}_{NJL}$,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{NJL} = & \bar{\psi} \left[\gamma^0 i \partial_t + \mu \gamma^0 + \mu_5 \gamma^0 \gamma^5 + \nu \tau_3 \gamma^0 + \right. \\ & \left. + \nu_{I5} \tau_3 \gamma^0 \gamma^5 - \sigma - i \gamma^5 \pi_a \tau_a \right] \psi - \frac{1}{4G} [\sigma^2 + \pi^2], \quad (4) \end{aligned}$$

где $\mu = \mu_B/3$, $\nu = \mu_I/2$, $\nu_5 = \mu_{I5}/2$ и

$$\sigma(x) = -2G(\bar{\psi}\psi), \quad \pi_a(x) = -2G(\bar{\psi}i\gamma^5\tau_a\psi). \quad (5)$$

Составное бозонное поле $\pi_3(x)$ из (5) обычно отождествляется с физическим полем $\pi^0(x)$ -мезона, тогда как физические поля $\pi^\pm(x)$ -мезона являются следующими комбинациями составных полей, $\pi^\pm(x) = (\pi_1(x) \mp i\pi_2(x))/\sqrt{2}$. Очевидно, что вспомогательный лагранжиан $\tilde{L}_{NJL}$ эквивалентен исходному лагранжиану (1) при использовании уравнений движения (5). Кроме того, из соотношений (3)

и сноски 1 ясно, что составные бозонные поля (5) преобразуются под действием изоспиновой $U_{I_3}(1)$ и аксиальной изоспиновой $U_{AI_3}(1)$ групп следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{I_3}(1) : & \quad \sigma \rightarrow \sigma; \quad \pi_3 \rightarrow \pi_3; \\ & \quad \pi_1 \rightarrow \cos(\alpha)\pi_1 + \sin(\alpha)\pi_2; \\ & \quad \pi_2 \rightarrow \cos(\alpha)\pi_2 - \sin(\alpha)\pi_1; \\ U_{AI_3}(1) : & \quad \pi_1 \rightarrow \pi_1; \quad \pi_2 \rightarrow \pi_2; \\ & \quad \sigma \rightarrow \cos(\alpha)\sigma + \sin(\alpha)\pi_3; \\ & \quad \pi_3 \rightarrow \cos(\alpha)\pi_3 - \sin(\alpha)\sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (6) следует, что комбинации полей $(\pi_1^2 + \pi_2^2)$ и $(\sigma^2 + \pi_3^2)$ инвариантны относительно преобразований $U_{I_3}(1)$ и $U_{AI_3}(1)$ групп соответственно. Исходя из вспомогательного лагранжиана (4), в принципе, возможно получить производящий функционал $\Gamma(\sigma, \pi)$ одночастично-неприводимых функций Грина полей $\sigma(x)$ и $\pi(x)$ (см., например, в [26]). Обычно $\Gamma(\sigma, \pi)$ также называют эффективным действием модели, что позволяет ввести величину $\Omega(\sigma, \pi)$, которая называется полным термодинамическим потенциалом (ТДП) модели (но при нулевых химических потенциалах ее обычно называют полным эффективным потенциалом модели),

$$\Omega(\sigma, \pi) \int d^4x \equiv -\Gamma(\sigma, \pi) \Big|_{\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3 = \text{const}}. \quad (7)$$

Интегрирование в левой стороне интеграла ведет к по всем переменным 4-пространства (в данной работе рассматриваются конденсаты, не зависящие от координат, поэтому интегрирование превращается в объем). Координаты точки глобального минимума (ГМ) ТДП $\Omega(\sigma, \pi)$ являются средними значениями $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \pi_a \rangle$ вспомогательных бозонных полей (5) по основному состоянию системы, которые к тому же являются параметрами порядка, поведение которых относительно химических потенциалов определяет фазовую структуру модели. Следовательно, если, например, в точке ГМ мы имеем $\langle \sigma \rangle \neq 0$ и/или $\langle \pi_3 \rangle \neq 0$, но $\langle \pi_{1,2} \rangle = 0$, то, как ясно из уравнения (6), киральная симметрия $U_{AI_3}(1)$ спонтанно нарушается и в кварковой материи реализуется фаза СНКС. Если $\langle \sigma \rangle = 0$, $\langle \pi_3 \rangle = 0$, но $\langle \pi_{1,2} \rangle \neq 0$, то изоспиновая $U_{I_3}(1)$ инвариантность модели спонтанно нарушается и там наблюдается фаза заряженной ПК и т.д. Поэтому исследование ТДП $\Omega(\sigma, \pi)$ на наименьшее значение по переменным σ и π является очень важной задачей, помогающей понять фазовую структуру модели. Чтобы упростить ее решение, можно использовать тот факт, что лагранжиан (4) инвариантен относительно преобразований симметрии (3) и (6). Как следствие, те же свойства симметрии справедливы и для полного ТДП $\Omega(\sigma, \pi)$ модели и, как видно из (6), при каждом фиксированном наборе значений μ, μ_I, μ_{I5} и μ_5 химических потенциалов ТДП $\Omega(\sigma, \pi)$ на самом деле является функцией только двух комбинаций полей, $\Sigma \equiv \sqrt{\sigma^2 + \pi_3^2}$ и $\Pi \equiv \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2}$, т.е.

$$\Omega(\sigma, \pi) \equiv \Omega(\Sigma, \Pi). \quad (8)$$

В этом случае для нахождения фазовой структуры модели достаточно найти (для каждого фиксированного набора химических потенциалов) точку ГМ функции $\Omega(\Sigma, \Pi)$ по переменным Σ и Π . Так, если в точке ГМ функции (8) мы имеем $(\Sigma \neq 0, \Pi = 0)$, то в системе реализуется фаза со спонтанным нарушением киральной симметрии $U_{A13}(1)$. Если точка ГМ ТДП (8) выглядит как $(\Sigma = 0, \Pi \neq 0)$, то это означает, что в модели наблюдается фаза с конденсацией заряженных пионов (при этом изоспиновая симметрия $U_{I3}(1)$ спонтанно нарушается) и, наконец, точка ГМ вида $(\Sigma = 0, \Pi = 0)$ соответствует симметричной фазе модели, в которой ни одна из групп симметрии (3) спонтанно не нарушается.²

В недавней работе [12] ТДП (8) модели НЙЛ (1) был исследован в приближении среднего поля (в этом случае мы используем для него обозначение $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi)$). Более того, там было показано, что $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi)$ является величиной, инвариантной относительно преобразования

$$\tilde{\mathcal{D}}: \Sigma \longleftrightarrow \Pi, \quad \mu_I \longleftrightarrow \mu_{I5}. \quad (9)$$

Благодаря этому свойству ТДП в приближении среднего поля, в работе [12] было показано, что существует симметрия (дуальность) между явлениями СНКС и заряженной ПК (поэтому мы называем $\tilde{\mathcal{D}}$ (9) дуальным преобразованием). Это означает, что при фиксированных μ и μ_5 (μ_I, μ_{I5})-фазовый портрет (полученный в рамках приближения среднего поля) модели НЙЛ (1) симметричен относительно одновременных переобозначений «фаза СНКС» $\leftrightarrow$ «фаза заряженной ПК» и $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$. Действительно, предположим, например, что при некоторых фиксированных частных значениях химических потенциалов $\mu, \mu_5, \mu_I = A$ и $\mu_{I5} = B$ глобальный минимум ТДП $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi)$ лежит в точке вида $(\Sigma = \Sigma_0 \neq 0, \Pi = 0)$. В этом случае в модели реализуется фаза СНКС. Тогда из инвариантности ТДП относительно преобразования дуальности $\tilde{\mathcal{D}}$ (9) следует, что при $\mu_I = B$ и $\mu_{I5} = A$ (и неизменных значениях μ и μ_5) глобальный минимум ТДП $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi)$ располагается в точке $(\Sigma = 0, \Pi = \Sigma_0)$, которая соответствует фазе заряженной ПК (и наоборот). Следовательно, знания фазы модели (1) при некоторых фиксированных значениях $\mu, \mu_I, \mu_{I5}, \mu_5$ достаточно для того, чтобы понять, какая фаза (мы называем ее дуально сопряженной) реализуется при переставленных значениях $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$ и фиксированных μ

и μ_5 . Более того, различные физические параметры кварковой среды, такие как конденсаты, плотности и т.д., характеризующие как исходную фазу, так и дуально сопряженную, связаны преобразованием дуальности $\tilde{\mathcal{D}}$. Например, зная киральный конденсат исходной фазы СНКС при некотором фиксированном $\mu, \mu_I, \mu_{I5}, \mu_5$, можно простой перестановкой $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$ получить выражение для конденсата заряженных пионов в дуально сопряженной фазе. Зная выражение для плотности частиц $n_q(\mu_I, \mu_{I5})$ в исходной фазе СНКС как функцию химических потенциалов μ_I, μ_{I5} , можно найти плотность частиц в дуально сопряженной фазе заряженной ПК, поменяв местами μ_I и μ_{I5} в выражении $n_q(\mu_I, \mu_{I5})$ и т.д.

Таким образом, симметрия ТДП безмассовой модели НЙЛ (1) относительно дуального преобразования (9) позволяет существенно упростить изучение свойств плотной ($\mu_B \neq 0$) кварковой материи с изоспиновой ($\mu_I \neq 0$) и киральной изоспиновой ($\mu_{I5} \neq 0$) асимметриями. Однако стоит еще раз подчеркнуть, что полученная дуальность между явлениями СНКС и заряженной ПК была установлена в [12] только на основе ТДП, вычисленного в рамках приближения среднего поля (или в ведущем порядке приближения больших N_c). Присуще ли это свойство дуальности *полному* фазовому портрету модели НЙЛ, а не только его приближению среднего поля, остается формально неясным.

В настоящей работе мы показываем, что (i) существует дискретное преобразование типа Паули–Гюрши кварковых полей³, которое преобразует члены лагранжиана (1), ответственные за канал СНКС, в члены лагранжиана, ответственные за конденсацию заряженных пионов (и наоборот). Кроме того, (ii) в этом случае члены лагранжиана (1), являющиеся оператором плотности изоспинового заряда и оператором плотности кирального изоспинового заряда, преобразуются друг в друга (другие члены лагранжиана НЙЛ (1) остаются неизменными). Следовательно, (iii) если одновременно с Паули–Гюрши выполнить преобразование $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$, то лагранжиан (1) не изменится. В результате будет видно, что дуальная симметрия (9) присуща и полному термодинамическому потенциалу $\Omega(\Sigma, \Pi)$ системы, а не только его приближению среднего поля $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi)$.

Введем следующее преобразование дублета спинорных полей $\psi(x)$ (как ясно из дальнейшего рассмотрения, это действительно преобразование Паули–Гюрши),

$$\begin{aligned} PG: \quad \psi_R &\rightarrow \psi_R, \quad \psi_L \rightarrow i\tau_1 \psi_L, \\ \text{or } \overline{\psi_R} &\rightarrow \overline{\psi_R}, \quad \overline{\psi_L} \rightarrow \overline{\psi_L}(-i)\tau_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\psi = \psi_L + \psi_R$ и $\psi_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2}\psi$, $\overline{\psi_L} = \overline{\psi} \frac{1+\gamma^5}{2}$,

² Действительно, если, например, в точке ГМ ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi)$ мы имеем $(\Sigma \neq 0, \Pi = 0)$, то это означает, что в этом случае существуют ненулевые значения $\sigma = \langle \sigma \rangle$ и/или $\pi_3 = \langle \pi_3 \rangle$, соответствующие наименьшему значению ТДП как функции σ и π , т.е. выражения $\Omega(\sigma, \pi)$. Поскольку величины $\langle \sigma \rangle$ и/или $\langle \pi_3 \rangle$ не инвариантны относительно преобразований из группы $U_{A13}(1)$ (как следует из (6)), то в этом случае спонтанно нарушается киральная симметрия, и т.д.

³ Наиболее общее определение преобразования Паули–Гюрши приведено ниже (см. (15)).

$\psi_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$, $\overline{\psi}_R = \overline{\psi}\frac{1-\gamma^5}{2}$. Альтернативно его можно представить в следующем виде:

$$PG: \psi \rightarrow \psi_R + i\tau_1\psi_L, \quad \text{i.e.} \\ PG\psi \equiv PG \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{uR} + i\psi_{dL} \\ \psi_{dR} + i\psi_{uL} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Используя формулы (10)–(11), легко выяснить, как преобразуются простейшие кварк–антикварковые структуры лагранжиана (1) под действием преобразования типа Паули–Гюрши PG ,

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R \xrightarrow{PG} \\ \xrightarrow{PG} \overline{\psi}_R i\tau_1\psi_L - \overline{\psi}_L i\tau_1\psi_R = -i\overline{\psi}\gamma^5\tau_1\psi, \quad (12)$$

$$i\overline{\psi}\gamma^5\tau_1\psi = i(-\overline{\psi}_R\tau_1\psi_L + \overline{\psi}_L\tau_1\psi_R) \xrightarrow{PG} \\ \xrightarrow{PG} -i\overline{\psi}_R\tau_1 i\tau_1\psi_L - i\overline{\psi}_L i\tau_1\tau_1\psi_R = \overline{\psi}\psi. \quad (13)$$

Аналогично нетрудно показать, что

$$i\overline{\psi}\gamma^5\tau_2\psi \xrightarrow{PG} i\overline{\psi}\gamma^5\tau_3\psi, \\ i\overline{\psi}\gamma^5\tau_3\psi \xrightarrow{PG} -i\overline{\psi}\gamma^5\tau_2\psi. \quad (14)$$

Это означает, что четырехфермионные структуры лагранжиана (1), отвечающие за СНКС и заряженную ПК, преобразуются друг в друга под действием PG -преобразования (10)–(11), т. е.

$$(\overline{\psi}\psi)^2 + (i\overline{\psi}\gamma^5\tau_3\psi)^2 \xleftrightarrow{PG} (i\overline{\psi}\gamma^5\tau_1\psi)^2 + (i\overline{\psi}\gamma^5\tau_2\psi)^2. \quad (15)$$

(Заметим, что в работах [6, 7] преобразование Паули–Гюрши связывает четырехфермионные структуры низкоразмерных лагранжианов, ответственные за каналы СНКС и сверхпроводимости (см. также в работах [3–5, 8]). В настоящей работе мы рассматриваем более общую ситуацию и называем **любое преобразование спинорных полей, связывающее между собой кварковые структуры различных каналов взаимодействия, преобразованием типа Паули–Гюрши.**) Поскольку свободный член $i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ лагранжиана (1) остается неизменным под действием преобразования PG (10)–(11), то из соотношения (15) ясно, что при нулевых химических потенциалах исходный лагранжиан НЙЛ (1) также инвариантен относительно этого преобразования типа Паули–Гюрши. Однако при ненулевых химических потенциалах PG больше не является преобразованием симметрии модели НЙЛ. Действительно, под действием PG величины $\overline{\psi}\gamma^0\psi$ и $\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$ не изменяются, но

$$\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\tau_3\psi = (\overline{\psi}_R\gamma^0\tau_3\psi_R - \overline{\psi}_L\gamma^0\tau_3\psi_L) \\ \xleftrightarrow{PG} (\overline{\psi}_R\gamma^0\tau_3\psi_R + \overline{\psi}_L i\tau_1\gamma^0\tau_3 i\tau_1\psi_L) = \\ = (\overline{\psi}_R\gamma^0\tau_3\psi_R + \overline{\psi}_L\gamma^0\tau_3\psi_L) = \overline{\psi}\gamma^0\tau_3\psi. \quad (16)$$

Это означает, что плотности изоспинового и кирального изоспинового зарядов, т. е. величины

$\overline{\psi}\gamma^0\tau_3\psi$ и $\overline{\psi}\gamma^0\gamma^5\tau_3\psi$ в соотношении (16), переходят друг в друга и, как следствие, при $\mu_I \neq 0$ и $\mu_{I5} \neq 0$ лагранжиан НЙЛ (1) не инвариантен относительно преобразования PG (10)–(11). Следовательно, при ненулевых $\mu_I \neq 0$ и $\mu_{I5} \neq 0$ дискретное преобразование PG уже не является преобразованием симметрии модели. Но очевидно, что если одновременно с преобразованием полей (10)–(11) произвести перестановку химических потенциалов, $\mu_I \longleftrightarrow \mu_{I5}$, то лагранжиан НЙЛ останется инвариантным. **Преобразования, при которых изменяются не только полевые переменные лагранжиана, но одновременно с ними и некоторые внешние параметры (к которым мы относим химические потенциалы, константы связи и т. д.), мы будем называть в дальнейшем дуальными преобразованиями.** Таким образом, модель НЙЛ (1) инвариантна (или симметрична) относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$, где

$$\mathcal{D}: \psi \rightarrow \psi_R + i\tau_1\psi_L, \quad \mu_I \longleftrightarrow \mu_{I5}. \quad (17)$$

Поскольку в этом случае кварковые структуры каналов взаимодействия СНКС и заряженной ПК переходят друг в друга (см., например, уравнение (15)), то будем говорить, что каждый из этих каналов $\mathcal{D}$ дуален другому, или что явления СНКС и заряженной ПК дуально $\mathcal{D}$ сопряжены друг другу в рамках модели НЙЛ (1).

Напомним, что полный ТДП (7)–(8) модели мы получаем на основе лагранжиана (4) со вспомогательными бозонными полями $\sigma(x)$ и $\pi_a(x)$. Давайте посмотрим, как преобразуются эти величины под действием PG или $\mathcal{D}$. Из (5) ясно, что в этом случае мы имеем:

$$PG, \mathcal{D}: \sigma(x) \rightarrow -\pi_1(x), \quad \pi_1(x) \rightarrow \sigma(x), \\ \pi_2(x) \rightarrow \pi_3(x), \quad \pi_3(x) \rightarrow -\pi_2(x). \quad (18)$$

Следовательно, в этом случае величины Σ и Π (см. определение перед формулой (8)) преобразуются друг в друга, $\Sigma \leftrightarrow \Pi$. Более того, из (18) следует, что член вспомогательного лагранжиана НЙЛ (4), пропорциональный $(\sigma^2 + \pi^2)$, остается инвариантным при PG и $\mathcal{D}$ преобразованиях. Кроме того, принимая во внимание правила преобразований (10) и (18), нетрудно заметить, что член типа Юкавы $\overline{\psi}(\sigma + i\gamma^5\pi_a\tau_a)\psi$ этого лагранжиана, а также его свободный член $i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ остаются неизменными при действии PG . Так что при нулевых химических потенциалах лагранжиан $\tilde{L}_{NJL}$ (4) симметричен относительно действия PG (однако это не так, когда μ_I и μ_{I5} не равны нулю). Наконец, учитывая соотношения (16) и (18), легко понять, что при ненулевых химических потенциалах вспомогательный лагранжиан (4) в целом симметричен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17), при котором необходимо также учитывать и преобразование скалярного и псевдоскалярного полей (18).

Таким образом, не только вспомогательный лагранжиан $\tilde{L}_{NJL}$, но и построенные на его ос-

нове полное эффективное действие $\Gamma(\sigma, \pi)$ и полный ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi)$ (8) модели будут инвариантны относительно того же дискретного дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17)–(18). Однако последнее свойство, т.е. симметрия $\mathcal{D}$ термодинамического потенциала, есть не что иное, как его инвариантность относительно дуального преобразования $\tilde{\mathcal{D}}$ (9), когда $\Sigma \leftrightarrow \Pi$ и $\mu_I \leftrightarrow \mu_{I5}$ (см. также замечание сразу после формулы (18)). Поэтому дуальная симметрия между такими явлениями, как СНКС и заряженная ПК, на самом деле является подлинным свойством плотной кварковой материи, описываемой безмассовой моделью НЙЛ (1). Дуальность (симметрия) между этими явлениями должна наблюдаться и на полной $(\mu, \mu_I, \mu_{I5}, \mu_5)$ -фазовой диаграмме этой модели (а не только в приближении среднего поля [12]), поскольку она является следствием инвариантности микроскопического лагранжиана НЙЛ (1) относительно преобразования $\mathcal{D}$ (17).

1.2. Случай модели НЙЛ с дополнительным дикварковым каналом взаимодействия

Напомним, что в недавней работе [14] исследована фазовая структура четырехфермионной модели, лагранжиан которой L_{CSC} ,

$$L_{CSC} = L_{NJL} + H \sum_{A=2,5,7} [\bar{\psi}^c i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi] [\bar{\psi} i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi^c], \quad (19)$$

отличается от выражения (1) дополнительным членом с дикварковым взаимодействием. В (19) λ_A ($A = 2, 5, 7$) — 3×3 матрицы Гелл-Манна, действующие в трехмерном фундаментальном представлении цветовой группы $SU(3)_c$; $\psi^c = C \bar{\psi}^T$, $\bar{\psi}^c = \psi^T C$ — зарядово-сопряженные спиноры, где $C = i \gamma^2 \gamma^0$ — матрица зарядового сопряжения (символ T обозначает операцию транспонирования). Остальные обозначения те же, что и для лагранжиана L_{NJL} . Как и в случае с более простой моделью НЙЛ (1) из предыдущего подраздела, при рассмотрении фазовой структуры модели (19) также удобно иметь дело с ее вспомогательным лагранжианом $\tilde{L}_{CSC}$,

$$\tilde{L}_{CSC} = \tilde{L}_{NJL} - \frac{1}{4H} \Delta_A^* \Delta_A - \frac{\Delta_A^*}{2} [\bar{\psi}^c i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi] - \frac{\Delta_{A'}}{2} [\bar{\psi} i \gamma^5 \tau_2 \lambda_{A'} \psi^c], \quad (20)$$

где $\tilde{L}_{NJL}$ — вспомогательный лагранжиан (4). В дополнение к спинорным полям $\psi(x)$ и составным бозонным полям $\sigma(x), \pi(x)$ (см. (5)) $\tilde{L}_{CSC}$ содержит три составных бозонных дикварковых поля $\Delta_A(x) = -2H [\bar{\psi}^c i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi]$, где $A = 2, 5, 7$. Их средние значения по основному состоянию системы являются параметрами порядка так называемой цве-

товой сверхпроводящей (ЦСП) фазы.⁴ На основе микроскопического вспомогательного лагранжиана (20) гораздо проще формально построить полный ТДП $\Omega(\sigma, \pi_a, \Delta_A)$ модели (19), который является функцией постоянных скалярных полей σ, π_i, Δ_A . Если в точке глобального минимума этого полного ТДП хотя бы одна из величин Δ_A не равна нулю, то в модели спонтанно нарушается цветовая $SU(3)_c$ -симметрия, происходит спаривание дикварков и в кварковой среде реализуется ЦСП-фаза. Добавим, что из-за абелевых $U_{I3}(1)$ и $U_{AI3}(1)$ симметрий (3) лагранжиана (19), а также его инвариантности относительно группы $SU(3)_c$, полный ТДП этой модели в действительности зависит только от величин Σ и Π (они определены перед формулой (8)), а также от $\Delta \equiv \sqrt{\Delta_2^* \Delta_2^* + \Delta_5^* \Delta_5^* + \Delta_7^* \Delta_7^*}$, т.е. $\Omega(\sigma, \pi_a, \Delta_A) \equiv \Omega(\Sigma, \Pi, \Delta)$.

Наконец, отметим, что в [14] исследован не полный ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi, \Delta)$ модели (19)–(20), а только его приближение среднего поля $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi, \Delta)$. И в рамках этого подхода обнаружена инвариантность функции $\Omega_{mf}(\Sigma, \Pi, \Delta)$ относительно дуального преобразования $\tilde{\mathcal{D}}$ (9) (при этом преобразовании параметр Δ остается неизменным). Таким образом, было установлено (в приближении среднего поля), что в кварковой материи с достаточно высокой плотностью барионов, т.е. когда следует учитывать явление ЦСП, явления СНКС и заряженной ПК дуальны друг другу. В настоящей работе мы показываем, что этот вид дуальной симметрии является неотъемлемой чертой кварковой материи, динамика которой описывается лагранжианом (19)–(20). Это означает, что исходный четырехфермионный лагранжиан (19) инвариантен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17), а полный ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi, \Delta)$ системы симметричен относительно преобразования $\tilde{\mathcal{D}}$ (9).

Для проверки этого утверждения докажем сначала инвариантность лагранжиана (19) относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17). Действительно, как ясно из ранее изложенного, первый член L_{NJL} в правой части уравнения (19) инвариантен относительно действия $\mathcal{D}$. Инвариантность второго слагаемого является результатом следующих простых преобразований (см. также (10)–(11)),

$$\begin{aligned} \Delta_A(x) &\sim \bar{\psi}^c i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi = \psi^T C i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi = \\ &= \psi_R^T C i \tau_2 \lambda_A \psi_R - \psi_L^T C i \tau_2 \lambda_A \psi_L \xrightarrow{\mathcal{D}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} \psi_R^T C i \tau_2 \lambda_A \psi_R - \psi_L^T i \tau_1 C i \tau_2 \lambda_A i \tau_1 \psi_L = \\ &= \psi_R^T C i \tau_2 \lambda_A \psi_R - \psi_L^T C i \tau_2 \lambda_A \psi_L = \bar{\psi}^c i \gamma^5 \tau_2 \lambda_A \psi. \end{aligned} \quad (21)$$

Кроме того, необходимо также учесть справедливость аналогичного соотношения,

$$\Delta_{A'}^*(x) \sim \bar{\psi} i \gamma^5 \tau_2 \lambda_{A'} \psi^c \xrightarrow{\mathcal{D}} \bar{\psi} i \gamma^5 \tau_2 \lambda_{A'} \psi^c. \quad (22)$$

⁴ Детали построения вспомогательного лагранжиана $\tilde{L}_{CSC}$ описаны как в статье [14], так и в более ранних обзорах, посвященных явлению ЦСП [27].

Следовательно, L_{CSC} инвариантен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17).

Более того, легко видеть, что и вспомогательный лагранжиан (20) также обладает этим свойством. Это следует из того, что составные поля $\Delta_A(x)$ и $\Delta_A^*(x)$, из которых, в частности, строится вспомогательный лагранжиан $\tilde{L}_{CSC}$, остаются инвариантными относительно операции $\mathcal{D}$ (см. соотношения (21)–(22)). Далее, если учесть преобразования (18) составных $\sigma(x)$ и $\pi_a(x)$ полей (5) под действием $\mathcal{D}$, то нетрудно заключить, что вспомогательный лагранжиан $\tilde{L}_{CSC}$ (а следовательно, и полный ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi, \Delta)$ модели) также инвариантен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$. Кроме того, ясно, что в терминах величин Σ, Π и Δ дуальное преобразование $\mathcal{D}$ выглядит как $\tilde{\mathcal{D}}$ (9) (и при неизменном значении Δ). Таким образом, полный ТДП $\Omega(\Sigma, \Pi, \Delta)$ остается инвариантным под действием $\tilde{\mathcal{D}}$. Как следствие, в кварковой материи, которая описывается микроскопическим лагранжианом (19)–(20), существует дуальность между явлениями СНКС и заряженной ПК (детали проявления этого эффекта изложены в предыдущем разделе, а также в работах [9, 12–15]).

2. ДУАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ЛАГРАНЖИАНА ПЛОТНОЙ КХД

В предыдущем разделе было показано, что две различные безмассовые модели НЙЛ (1) и (19), которые тем не менее эффективно описывают физические процессы КХД в соответствующих областях низких энергий и плотностей, обладают дуальной симметрией $\mathcal{D}$ (17) между явлениями СНКС и заряженной ПК. Из этого факта напрашивается вывод, что лагранжиан безмассовой плотной КХД также должен быть инвариантен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$. Именно это свойство лагранжиана КХД и доказывается в предлагаемом разделе.

Так как дуальное преобразование $\mathcal{D}$ не действует на глюонные поля, то достаточно рассмотреть только кварковый сектор лагранжиана плотной КХД, расширенный барионным μ_B -, изоспиновым μ_I -, киральным μ_5 - и киральным изоспиновым μ_{I5} химическими потенциалами,

$$L_{QCD} = i\bar{\psi}\gamma^\nu\nabla_\nu\psi + \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi + \mu_5\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi + \nu\bar{\psi}\gamma^0\tau_3\psi + \nu_5\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\tau_3\psi, \quad (23)$$

где, как и в предыдущем разделе, $\psi(x)$ — дублет u и d кварков, $\nu = \mu_I/2$, $\nu_5 = \mu_{I5}/2$ и $\mu = \mu_B/3$. Кроме того, символ ∇_ν в этом выражении означает ковариантную $SU(3)_c$ производную, т.е. $\nabla_\nu = \partial_\nu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\nu^a(x)$, где λ_a ($a = 1, \dots, 8$) — это 3×3 матрицы Гелл–Манна, g — константа связи кварк-глюонного взаимодействия, $A_\nu^a(x)$ — векторное калибровочное поле. Лагранжиан (23) описывает свойства плотной кварковой материи с изоспиновой и киральной асимметриями. Здесь мы собираемся показать, что дуальная симметрия $\mathcal{D}$

(17), характерная для безмассовых моделей НЙЛ (1) и (19), присуща также и безмассовому лагранжиану КХД (23).

Действительно, из рассмотрения предыдущего раздела ясно, что сумма всех членов с химическими потенциалами этого лагранжиана инвариантна относительно $\mathcal{D}$. Более того, первый член в уравнении (23) также инвариантен относительно действия $\mathcal{D}$. Это верно, потому что

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\nu\nabla_\nu\psi &= i\bar{\psi}_R\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_L \xrightarrow{\mathcal{D}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{D}} i\bar{\psi}_R\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_R + i\bar{\psi}_L(-i\tau_1)\gamma^\nu\nabla_\nu i\tau_1\psi_L = \\ &= i\bar{\psi}_R\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\nu\nabla_\nu\psi_L = i\bar{\psi}\gamma^\nu\nabla_\nu\psi. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, и в целом лагранжиан КХД (23) симметричен относительно дуального преобразования $\mathcal{D}$ (17).

Доказанная выше дуальная симметрия безмассового лагранжиана плотной КХД должна вполне определенным образом отражаться и на свойствах симметрии ее полного ТДП и симметрии ее полной фазовой диаграммы. Это означает, что на полном $(\mu, \mu_I, \mu_{I5}, \mu_5)$ -фазовом портрете КХД фазы СНКС и заряженной ПК должны быть дуально сопряжены друг другу. Дуальную симметрию $\mathcal{D}$ (17) можно рассматривать как фундаментальное свойство безмассовой КХД, которое должно проявляться в рамках любого приближения к ее фазовой диаграмме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой работе показано, что лагранжианы безмассовых моделей НЙЛ (1) и (19), построенные из трехцветных u и d кварков и расширенные членами с химическими потенциалами μ_B, μ_I, μ_{I5} и μ_5 , обладают так называемой дуальной симметрией $\mathcal{D}$ (17) между каналами взаимодействия, в которых происходит спонтанное нарушение киральной симметрии и конденсация заряженных пионов соответственно (см. в разделе 2). Это означает, что в каждой из этих моделей полный ТДП как функция указанных выше химических потенциалов и параметров порядка Σ и Π фаз СНКС и заряженной ПК симметричен относительно преобразований $\tilde{\mathcal{D}}$ (9). В результате на *полной* фазовой диаграмме каждой из этих моделей должна реализовываться дуальность между упомянутыми выше фазами. Иными словами, при фиксированных μ_B и μ_5 на полном (μ_I, μ_{I5}) -фазовом портрете каждой из моделей фазы СНКС и заряженной ПК должны быть расположены зеркально симметрично относительно линии $\mu_I = \mu_{I5}$. Таким образом дуальная симметрия между явлениями СНКС и заряженной ПК является неотъемлемым свойством безмассовых моделей НЙЛ (1) и (19) в целом (а не только их приближений среднего поля, как это было установлено ранее в работах [9, 14]).

Далее, в разделе 2, мы доказываем, что дуальная симметрия $\mathcal{D}$ (17) присуща и более фундаментальному лагранжиану плотной КХД с безмассо-

выми трехцветными u - и d -кварками. Однако мы считаем, что в реальных ситуациях, когда кварки массивны, следы дуальной симметрии безмассового фазового портрета плотной КХД должны в какой-то степени сохраняться. В качестве подтверждения

можно сослаться на фазовый портрет, рассчитанный в приближении среднего поля в массивной модели ННЛ [13], в которой дуальная симметрия между фазами СНКС и заряженной ПК является лишь приближительной.

- [1] Thies M. // *Phys. Rev. D* **68**, 047703 (2003).
- [2] Thies M. // *Phys. Rev. D* **90**, N 10, 105017 (2014).
- [3] Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.C. // *Phys. Rev. D* **90**, N 4, 045021 (2014).
- [4] Cao G., He L., Zhuang P. // *Phys. Rev. D* **90**, N 5, 056005 (2014).
- [5] Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V. C. // *Phys. Rev. D* **93**, N 10, 105022 (2016).
- [6] Pauli W. // *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957).
- [7] Gursey F. // *Nuovo Cimento* **7**, 411 (1957).
- [8] Ojima I., Fukuda R. // *Prog. Theor. Phys.* **57**, 1720 (1977).
- [9] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *Phys. Rev. D* **97**, N 5, 054036 (2018).
- [10] 't Hooft G. // *Nucl. Phys. B* **72**, 461 (1974).
- [11] Coleman S. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*, Cambridge University Press, 1985, Chapter 8.
- [12] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *Phys. Rev. D* **98**, N 5, 054030 (2018).
- [13] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *Eur. Phys. J. C* **79**, N 2, 151 (2019).
- [14] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *Phys. Rev. D* **108**, N 12, 125011 (2023).
- [15] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *Phys. Rev. D* **100**, N 3, 034009 (2019).
- [16] Thies M. // *Phys. Rev. D* **101**, N 1 014010 (2020).
- [17] Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.C. // *Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1250162 (2012).
- [18] Andrianov A.A., Andrianov V.A., Espriu D. // *Particles* **3**, N 1, 15 (2020).
- [19] Son D.T., Stephanov M.A. // *Phys. Atom. Nucl.* **64**, 834 (2001).
- [20] He L., Jin M., Zhuang P. // *Phys. Rev. D* **71**, 116001 (2005).
- [21] Andersen J.O., Brauner T. // *Phys. Rev. D* **78**, 014030 (2008).
- [22] Ayala A., Bandyopadhyay A., Farias R.L.S. et al. // *Phys. Rev. D* **107**, N 7, 074027 (2023).
- [23] Fukushima K., Kharzeev D.E., Warringa H.J. // *Phys. Rev. D* **78**, 074033 (2008).
- [24] Metlitski M.A., Zhitnitsky A.R. // *Phys. Rev. D* **72**, 045011 (2005).
- [25] Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // *JHEP* **06**, 006 (2019).
- [26] Iliopoulos J., Itzykson C., Martin A. // *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165 (1975).
- [27] Buballa M. // *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).

Dual symmetry of effective dense QCD models

R. N. Zhokhov¹, K. G. Klimenko^{2,a}, T. G. Khunjua³

¹Russian Academy of Sciences, Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radio Wave Propagation Moscow, , Russia

²State Research Center of Russian Federation – Institute for High Energy Physics, NRC «Kurchatov Institute» Protvino, 142281, Moscow Region, Russia

³Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, Department of Theoretical Physics Tbilisi, GE-0193, Georgia
E-mail: ^a kklim@ihep.ru

In this paper, we study the symmetry properties of the phase diagram of dense quark matter consisting of u and d three-color quarks within the framework of massless (3+1)-dimensional Nambu-Jona-Lasinio models and quantum chromodynamics. It turns out that in the presence of baryon μ_B , isospin μ_I , chiral μ_5 and chiral isospin μ_{I5} chemical potentials, the Lagrangians of these models are invariant under the so-called dual transformation. Consequently, the total thermodynamic potentials of these models are dually symmetric. This means that in the full $(\mu_B, \mu_I, \mu_5, \mu_{I5})$ -phase portraits of these models, the phases with spontaneous breaking of chiral symmetry and condensation of charged pions are dually conjugate (symmetric) to each other.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

Keywords: dual symmetry, Nambu-Jona-Lasinio models, quantum chromodynamics.

Received 09 December 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2025. **80**, No. 3. Pp. .

Сведения об авторах

1. Жохов Роман Николаевич — канд. физ.-мат. наук, науч сотрудник; e-mail: zhokhovr@gmail.com.
2. Клименко Константин Григорьевич — докт. физ.-мат. наук, гл науч сотрудник; тел.: (496) 774-11-98, e-mail: kklim@ihep.ru.
3. Хунджуа Тамаз Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; тел.: +995 (558) 987-826, e-mail: t.khunjua@ug.edu.ge.