

Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем в двумерной системе быстрого и медленного уравнений реакция–диффузия–адвекция с KPZ-нелинейностями

А. О. Орлов^{1, *}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 27.12.2024; после доработки 12.03.2025; подписана в печать 14.03.2025)

В работе рассматривается краевая задача для сингулярно возмущённой эллиптической системы быстрого и медленного уравнений, которую принято называть системой тихоновского типа. Особенностью задачи является наличие в уравнениях квадратичных по градиенту неизвестной функции слагаемых (KPZ-нелинейностей). Построена погранслоевая асимптотика решения в случае граничного условия Дирихле, доказано существование решения с построенной асимптотикой и исследована его асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Доказательство теорем проведено с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv. УДК: 517.9.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, KPZ-нелинейности, уравнения реакция–диффузия–адвекция, пограничные слои, асимптотическое приближение, дифференциальные неравенства, устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.80.2530104

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача о существовании и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарного решения с пограничным слоем системы быстрого и медленного уравнений реакция–диффузия–адвекция в двумерном случае. Особенностью задачи является наличие квадратичных по градиенту адвективных членов в первом и втором уравнениях (KPZ-нелинейностей [1]). Исследование решений задач с KPZ-нелинейностями является важной составляющей математического моделирования процессов горения [2], роста свободной поверхности полимеров [3], размножения популяций [4]. Отметим и теоретический интерес к таким нелинейностям: вторая степень градиента неизвестной функции является максимальным показателем, при котором выполнены условия Бернштейна на рост нелинейности (см. [5, 6]) и возможно применение метода дифференциальных неравенств [7, 8].

Настоящая статья продолжает цикл работ [9]–[13] по исследованию сингулярно возмущенных систем тихоновского типа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений, описывающую стационарные решения соответствующей парабо-

лической системы реакция–диффузия–адвекция в двумерном случае:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_u(u, v) &:= \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 A(u, x) (\nabla u)^2 - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ x &= (x_1, x_2) \in D; \\ \mathcal{N}_v(u, v) &:= \Delta v - B(v, x) (\nabla v)^2 - f(u, v, x, \varepsilon) = 0; \\ u(x) &= u^0(x), \quad v(x) = v^0(x), \quad x \in \Gamma.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь D — односвязная область на плоскости (x_1, x_2) с гладкой простой границей Γ , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр. Система является сингулярно возмущенной, и первое уравнение, содержащее малый параметр при старшей производной, принято называть быстрым, а второе — медленным (система тихоновского типа).

Пусть выполнены условия:

(A1) Функции $g(u, v, x, \varepsilon)$, $f(u, v, x, \varepsilon)$ определены на множестве $\overline{\Omega}_1 := (u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times \bar{D} \times (0; \varepsilon_0]$, а $A(u, x)$, $B(v, x)$ — на множествах $\overline{\Omega}_2 := (u, x) \in I_u \times \bar{D}$, $\overline{\Omega}_3 := (v, x) \in I_v \times \bar{D}$ соответственно и являются достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Рассмотрим вырожденную дифференциально-алгебраическую систему

$$g(u, v, x, 0) = 0; \quad \Delta v - B(v, x) (\nabla v)^2 - f(u, v, x, 0) = 0, \quad x \in D. \tag{2}$$

Потребуем от нее условие разрешимости:

* E-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

(A2) Пусть уравнение $g(u, v, x, 0) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(v, x)$ такое, что $g_u(\varphi(v, x), v, x, 0) > 0$ при $(v, x) \in \bar{\Omega}_3$, а задача

$$\Delta v - B(v, x)(\nabla v)^2 - f(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0, \\ x \in D; \quad v(x) = v^0(x), \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

имеет изолированное решение $v = \bar{v}_0(x)$.

Определим также $\bar{u}_0(x) = \varphi(\bar{v}_0(x), x)$, $x \in \bar{D}$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ

Для описания пограничного слоя, возникающего в окрестности границы Γ , нам понадобится стандартным образом ввести локальную систему координат [14]. Пусть граница Γ задана в параметрическом виде с помощью гладких функций $x_i = \hat{x}_i(\theta)$, $i = 1, 2$, где $\theta \in [0, \theta_0]$. Тогда связь между локальной системой координат и декартовой системой (x_1, x_2) выражается соотношениями $x_i = \hat{x}_i(\theta) + r n_i(\theta)$, $i = 1, 2$, где $n_i(\theta)$ — направляющие косинусы внутренней нормали $\mathbf{n}(\theta)$ к кривой Γ в точке $\hat{x}(\theta) = (\hat{x}_1(\theta), \hat{x}_2(\theta))$.

Формальное асимптотическое приближение решения краевой задачи (1) строится по методу А.Б. Васильевой [14] в виде:

$$U(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\tau, \theta, \varepsilon), \quad V(x, \varepsilon) = \\ = \bar{v}(x, \varepsilon) + \Pi v(\tau, \theta, \varepsilon), \quad (4)$$

где слагаемые — частичные суммы асимптотических рядов по степеням ε с коэффициентами $\bar{u}_k(x)$, $\bar{v}_k(x)$, $\Pi u_k(\tau, \theta)$, $\Pi v_k(\tau, \theta)$, $\tau = r/\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup 0$.

Метод пограничных функций [14] приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов: на k -м шаге вначале находится пограничная функция $\Pi v_k(\tau, \theta)$, затем функции $\bar{u}_k(x)$, $\bar{v}_k(x)$, после чего определяется пограничная функция $\Pi u_k(\tau, \theta)$.

Нетрудно записать (см. [15]) представление нелинейного оператора быстрого уравнения в переменных (r, θ) :

$$\varepsilon^2 \Delta - \varepsilon^2 A(\cdot, x)(\nabla)^2 = \\ = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + l_1(r, \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + l_2(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - A(\cdot, r, \theta) \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + l_3(r, \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right), \quad (5)$$

где $k(r, \theta)$, $l_i(r, \theta)$, $i = 1, 2, 3$ — известные функции. Выражение для дифференциального оператора медленного уравнения имеет аналогичную структуру. Принимая во внимание (5), подставляя (4) в уравнения задачи (1), система стандартным образом расщепляется на регулярно возмущенные уравнения для регулярных и погранслоевых частей асимптотики (см. подробно [9, 11]).

Аналогично одномерному случаю из работы [9], учитывая условия убывания на бесконечности для пограничных функций, получим $\Pi v_k(\tau, \theta) = 0$ при $k = 0, 1$.

Регулярная часть асимптотики — функции $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{v}_0(x)$ — определяется из вырожденной системы (см. условие (A2)).

Введем обозначения:

$$\tilde{A}(\tau, \theta) = A(\bar{u}_0(0, \theta) + \Pi u_0(\tau, \theta), 0, \theta), \\ \tilde{g}(\tau, \theta) = g(\bar{u}_0(0, \theta) + \Pi u_0(\tau, \theta), \bar{v}_0(0, \theta), 0, \theta, 0), \\ \tilde{g}(\theta) = g(\bar{u}_0(0, \theta), \bar{v}_0(0, \theta), 0, \theta, 0).$$

Аналогичный смысл имеют другие обозначения, содержащие знаки $\sim$, — над функциями. Задача для $\Pi u_0(\tau, \theta)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi u_0}{\partial \tau^2} = \tilde{A}(\tau, \theta) \left(\frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau} \right)^2 + \tilde{g}(\tau, \theta), \quad \tau \in R^+, \quad (6)$$

$$\Pi u_0(0, \theta) = u^0(0, \theta) - \bar{u}_0(0, \theta), \quad \Pi u_0(+\infty, \theta) = 0.$$

Для разрешимости задачи потребуем условие принадлежности граничного значения $u^0(0, \theta)$ области влияния корня вырожденного уравнения:

(A3) Пусть выполнено неравенство

$$\int_{\bar{u}(0, \theta)}^{\bar{u}} g(s, \bar{v}_0(0, \theta), 0, \theta, 0) \exp \left(2 \int_s^{\bar{u}} A(\sigma, 0, \theta) d\sigma \right) ds > 0, \\ \bar{u} \in (\bar{u}_0(0, \theta), u^0(0, \theta)).$$

При выполнении условия (A3) существует единственное монотонное решение задачи (6), которое находится квадратурах и имеет стандартную (см., например, [2]) экспоненциальную оценку

$$|\Pi u_0(\tau, \theta)| \leq C e^{-\kappa \tau}, \quad C > 0, \quad \kappa > 0, \quad \tau > 0, \quad \theta \in [0, \theta_0]. \quad (7)$$

Так как $\Pi v_1(\tau, \theta) = 0$, функции регулярной части асимптотики $\bar{u}_1(x)$ и $\bar{v}_1(x)$ определяются из краевой задачи для линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений с нулевым граничным условием

$$\bar{g}_u \bar{u}_1 + \bar{g}_v \bar{v}_1 + \bar{g}_\varepsilon = 0, \quad x \in D; \\ \Delta \bar{v}_1 - 2\bar{B}(\nabla \bar{v}_0, \nabla \bar{v}_1) - \bar{B}_v(\nabla \bar{v}_0)^2 \bar{v}_1 - \\ - \bar{f}_u \bar{u}_1 - \bar{f}_v \bar{v}_1 - \bar{f}_\varepsilon = 0; \quad (8) \\ \bar{v}_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь

$$\bar{g}_u(x) = g_u(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), x, 0), \\ \bar{B}(x) = B(\bar{v}_0(x), x), \quad \bar{B}_v(x) = B_v(\bar{v}_0(x), x).$$

В аналогичном смысле понимаем обозначения для других производных функций g , f . Далее часто будем опускать аргументы при использовании введенных обозначений. После несложных преобразований (см. подробно [9]) получим задачу

$$\Delta \bar{v}_1 - 2\bar{B}(\nabla \bar{v}_0, \nabla \bar{v}_1) - \\ - \left(\bar{B}_v(\nabla \bar{v}_0)^2 + \bar{f}_v + \bar{\varphi}_v \bar{f}_u \right) \bar{v}_1 = f_1(x), \quad (9) \\ x \in D; \quad \bar{v}_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $f_1(x)$ — известная функция.

Сформулируем условие, обеспечивающее существование и единственность решения краевой задачи и, следовательно, дифференциально-алгебраической системы (8) (см. также [16], Теорема 3).

(A4) Пусть для всех $x \in \bar{D}$ выполнено неравенство $\bar{B}_v(\nabla \bar{v}_0)^2 + \bar{f}_v + \bar{\varphi}_v \bar{f}_u > -\lambda_0$, где λ_0 — главное собственное значение задачи

$$\Delta \tilde{\Psi} - 2\bar{B}(\nabla \bar{v}_0, \nabla \tilde{\Psi}) + \lambda \tilde{\Psi} = 0, \quad (10)$$

$$x \in D; \quad \tilde{\Psi}(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Существование положительного главного собственного значения λ_0 и соответствующей положительной собственной функции $\tilde{\Psi}(x)$, $x \in D$ задачи (10) является хорошо известным результатом (см. [17], Теорема 4.3).

Задача для $\Pi u_1(\tau, \theta)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi u_1}{\partial \tau^2} - 2\tilde{A}(\tau, \theta) \frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau}(\tau, \theta) \frac{\partial \Pi u_1}{\partial \tau} - \\ & - \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial u}(\tau, \theta) \left(\frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau}(\tau, \theta) \right)^2 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}(\tau, \theta) \right) \Pi u_1 = \\ & = \Pi g_1(\tau, \theta), \\ & \tau \in R^+; \quad \Pi u_1(0, \theta) = -\bar{u}_1(0, \theta), \quad \Pi u_1(+\infty, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Pi g_1(\tau, \theta)$ — известная экспоненциально убывающая функция (подробное выражение в одномерном случае содержится в работе [9]). Решение задачи (11) записывается в явном виде:

$$\begin{aligned} \Pi u_1(\tau, \theta) &= -\bar{u}_1(0, \theta) \frac{\Phi(\tau, \theta)}{\Phi(0, \theta)} - \Phi(\tau, \theta) \times \\ & \times \int_0^\tau \frac{1}{p(s, \theta)(\Phi(s, \theta))^2} \int_s^{+\infty} p(\kappa, \theta) \Phi(\kappa, \theta) \Pi g_1(\kappa, \theta) d\kappa ds, \end{aligned} \quad (12)$$

$$p(\tau, \theta) = \exp \left(-2 \int_0^\tau \tilde{A}(y, \theta) \Phi(y, \theta) dy \right),$$

$$\Phi(\tau, \theta) = \frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau}(\tau, \theta).$$

Пограничные функции компоненты v при $k \geq 2$ определяются из неоднородных уравнений, решения которых также выписываются явно (двойным интегрированием правой части, см. подробно [9]). Задачи для $\Pi v_k(\tau, \theta)$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi v_k}{\partial \tau^2} = \Pi f_k(\tau, \theta), \quad \tau \in R^+; \quad \Pi v_k(\infty, \theta) = 0, \quad (13)$$

где $\Pi f_k(\tau, \theta)$ — функции, выражаемые через коэффициенты асимптотического приближения, найденные на предыдущем шаге.

Функции регулярной части асимптотики $\bar{u}_k(x)$ и $\bar{v}_k(x)$ при $k \geq 2$ определяются из краевых задач с таким же дифференциально-алгебраическим оператором, как в задаче (8) для $\bar{u}_1(x)$ и $\bar{v}_1(x)$. Пограничные функции компоненты u при $k \geq 2$ определяются из аналогичных (11) задач (с тем же дифференциальным оператором), решение которых выписывается в явном виде по формулам, аналогичным

(12). Пограничные функции каждой из компонент имеют экспоненциальные оценки типа (7).

Процесс определения коэффициентов асимптотики (4) может быть продолжен до любого порядка по ε . Из способа построения асимптотики следует, что частичные суммы n порядка $U_n(x, \varepsilon)$ для u и $V_n(x, \varepsilon)$ для v компонент удовлетворяют первому уравнению системы (1) по невязке с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ и второму с точностью $O(\varepsilon^{n-1})$.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Рассмотрим задачу (1) при следующем условии квазимонотонности:

(A5) Вектор-функция (g, f) является квазимоноotonно невозрастающей по (u, v) в области определения и $\varepsilon > 0$ достаточно малых.

Это условие означает, что $g_v \leq 0$ при фиксированном u , $f_u \leq 0$ при фиксированном v в области их изменения.

Для доказательства существования решения используется асимптотический метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова (см. обзор [19] и ссылки в этой работе). Напомним определение верхнего и нижнего решений при условии квазимонотонности (A5).

Определение 1. Функции

$$\begin{aligned} \beta(x, \varepsilon) &= (\beta^u(x, \varepsilon), \beta^v(x, \varepsilon)), \\ \alpha(x, \varepsilon) &= (\alpha^u(x, \varepsilon), \alpha^v(x, \varepsilon)) \end{aligned}$$

называются верхним и нижним решениями задачи (1), если они удовлетворяют следующим условиям:

B1) Условие упорядоченности:
 $\alpha^{u,v}(x, \varepsilon) \leq \beta^{u,v}(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}.$

B2) Действие оператора на верхнее и нижнее решения: $\mathcal{N}_u(\beta^u, \beta^v) \leq 0 \leq \mathcal{N}_u(\alpha^u, \alpha^v)$, $\mathcal{N}_v(\beta^u, \beta^v) \leq 0 \leq \mathcal{N}_v(\alpha^u, \alpha^v)$, $x \in D$.

B3) Условия на границе:
 $\alpha^v(x, \varepsilon) \leq v^0(x) \leq \beta^v(x, \varepsilon)$,
 $\alpha^u(x, \varepsilon) \leq u^0(x) \leq \beta^u(x, \varepsilon), \quad x \in \Gamma.$

Известно (см., например, [7, 8] и ссылки в этих работах), что если существуют нижнее и верхнее решения задачи (1), то существует решение $(u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ этой задачи, удовлетворяющее для всех $x \in \bar{D}$ неравенствам

$$\begin{aligned} \alpha^u(x, \varepsilon) &\leq u(x, \varepsilon) \leq \beta^u(x, \varepsilon), \\ \alpha^v(x, \varepsilon) &\leq v(x, \varepsilon) \leq \beta^v(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Введем в рассмотрение дифференциально-алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} \bar{g}_u \gamma_1 + \bar{g}_v \gamma_2 &= h_1(x); \\ \Delta \gamma_2 - 2\bar{B}(\nabla \bar{v}_0, \nabla \gamma_2) - \bar{B}_v(\nabla \bar{v}_0)^2 \gamma_2 - \\ & - \bar{f}_u \gamma_1 - \bar{f}_v \gamma_2 = h_2(x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$x \in D, \quad \gamma_2(x) > 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $h_1(x) > 0$, $h_2(x) < 0$ при $x \in \bar{D}$. Имеет место следующий результат:

Лемма 1. При выполнении условий (A1)–(A5) дифференциально-алгебраическая система (15) имеет единственное решение, причем выполняются неравенства $\gamma_1(x) > 0$, $\gamma_2(x) > 0$, $x \in \bar{D}$.

Доказательство. Выражая $\gamma_1(x)$ через $\gamma_2(x)$, получим задачу для $\gamma_2(x)$ (аналогичную задаче (9)):

$$\begin{aligned} L_{lin}[\gamma_2] := \Delta\gamma_2 - 2\bar{B}(\nabla\bar{v}_0, \nabla\gamma_2) - (\bar{B}_v(\nabla\bar{v}_0)^2 + \\ + \bar{f}_v + \bar{\varphi}_v\bar{f}_u)\gamma_2 = h(x), \\ x \in D; \quad \gamma_2(x) > 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (16)$$

где $h(x)$ — известная функция, $h(x) < 0$ при $x \in \bar{D}$ в силу условия (A5) ($\bar{f}_u(x) \leq 0$) и $h_1(x) > 0$. Принимая во внимание (A4), главное собственное значение задачи Штурма–Лиувилля с краевым условием 1 рода для оператора L_{lin} положительно, что влечет за собой (см. [18], Теорема 2.5 и Следствие 2.4) единственность и положительность решения задачи (16) $\gamma_2(x) > 0$, $x \in \bar{D}$. Из первого уравнения дифференциально-алгебраической системы следует, что $\gamma_1(x) > 0$, $x \in \bar{D}$. **Лемма 1 доказана.**

Теперь мы готовы доказать теорему существования.

Теорема D. Если выполнены условия (A1) — (A5), то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $(u(x, \varepsilon), v(x, \varepsilon))$ задачи (1) и для него справедливо асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \\ v(x, \varepsilon) - V_n(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{D}, \end{aligned}$$

где $U_n(x, \varepsilon)$ и $V_n(x, \varepsilon)$ — частичные суммы порядка n асимптотики задачи (1), построенные в разделе 2.

Доказательство. Верхнее решение задачи (1) определим как

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k \bar{v}_k(x) + \sum_{k=2}^{n+3} \varepsilon^k \Pi v_k(\tau, \theta) + \\ &\quad + \varepsilon^{n+1} \gamma_2(x) + \varepsilon^{n+3} q_v(\tau, \theta), \\ \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k (\bar{u}_k(x) + \Pi u_k(\tau, \theta)) + \\ &\quad + \varepsilon^{n+1} \gamma_1(x) + \varepsilon^{n+1} q_u(\tau, \theta), \end{aligned} \quad (17)$$

где положительные функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ определены в Лемме 1, а функции $q_u(\tau, \theta)$, $q_v(\tau, \theta)$ определяются из задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_u}{\partial \tau^2} - 2\tilde{A}(\tau, \theta) \frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau}(\tau, \theta) \frac{\partial q_u}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial u}(\tau, \theta) \left(\frac{\partial \Pi u_0}{\partial \tau}(\tau, \theta) \right)^2 + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}(\tau, \theta) \right) q_u = \\ = \Pi g(\tau, \theta) - C_0 \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \in R^+; \\ \frac{\partial^2 q_v}{\partial \tau^2} = \Pi f(\tau, \theta), \quad \tau \in R^+, \quad q_u(0, \theta) = 0, \quad q_u(+\infty, \theta) = 0, \quad q_v(+\infty, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где C_0, κ — некоторые положительные постоянные, которые выбраны так, что

$$\Pi g(\tau, \theta) - C_0 \exp(-\kappa\tau) < 0,$$

а $\Pi g(\tau, \theta), \Pi f(\tau, \theta)$ — известные экспоненциально убывающие функции (их подробное выражение в одномерном случае содержится в [13]). Отметим, что функция $q_u(\tau, \theta)$ принимает положительные значения при $\tau \in R^+$ и определяется явно по формуле, аналогичной (12). Функция $q_v(\tau, \theta)$ определя-

ется с помощью двойного интегрирования, она выбрана так, чтобы при проверке условия на оператор B2) коэффициент при ε^{n+1} , содержащий функции $\Pi u_0(\tau, \theta), q_u(\tau, \theta)$, был равен нулю. Нижнее решение задачи (1) имеет аналогичную (17) структуру.

Итак, условие упорядоченности B1) и неравенства на границе B3), очевидно, выполняются в силу положительности добавок $\gamma_1(x), \gamma_2(x), q_u(\tau, \theta)$. Проверим условие B2). Имеем для верхнего решения:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u(\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon), \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon)) &= -\varepsilon^{n+1}(\bar{g}_u\gamma_1 + \bar{g}_v\gamma_2 + C_0 \exp(-\kappa\tau)) + O(\varepsilon^{n+2}) = \\ &= -\varepsilon^{n+1}h_1(x) - \varepsilon^{n+1}C_0 \exp(-\kappa\tau) + O(\varepsilon^{n+2}) \leq -c\varepsilon^{n+1}, \\ \mathcal{N}_v(\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon), \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon)) &= \varepsilon^{n+1} \left(\Delta\gamma_2 - 2\bar{B}(\nabla\bar{v}_0, \nabla\gamma_2) - \bar{B}_v(\nabla\bar{v}_0)^2 \gamma_2 - \bar{f}_u\gamma_1 - \bar{f}_v\gamma_2 \right) + O(\varepsilon^{n+2}) = \\ &= \varepsilon^{n+1}h_2(x) + O(\varepsilon^{n+2}) \leq -c\varepsilon^{n+1} \end{aligned} \quad (19)$$

при достаточно малых ε в силу Леммы 1. Проверка дифференциальных неравенств B2) для нижнего решения проводится аналогично. **Теорема D доказана.**

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Решение задачи (1), существование которого доказано в теореме предыдущего пункта, можно рассматривать как стационарное решение начально-краевой параболической задачи для системы:

$$\begin{aligned}
 L_u(u, v) &:= \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 A(u, x) (\nabla u)^2 - \frac{\partial u}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{R}^+; \\
 L_v(u, v) &:= \Delta v - B(v, x) (\nabla v)^2 - \frac{\partial v}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0; \\
 u(x, t, \varepsilon) &= u^0(x), \quad v(x, t, \varepsilon) = v^0(x), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq 0; \\
 u(x, 0, \varepsilon) &= u_0(x, \varepsilon), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v_0(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Обозначим это решение $(u_s(x, \varepsilon), v_s(x, \varepsilon))$. Доказательство его асимптотической устойчивости по Ляпунову использует эффективный во многих сингулярно возмущенных задачах подход построения верхних и нижних решений специальной структуры (см. [19] и ссылки в этой работе). Будем искать верхнее решение задачи (20) в виде:

$$\begin{cases} U_\beta(x, t, \varepsilon) = u_s(x, \varepsilon) + (\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon))e^{-\lambda \varepsilon t}, \\ V_\beta(x, t, \varepsilon) = v_s(x, \varepsilon) + (\beta_{n+1}^v(x, \varepsilon) - v_s(x, \varepsilon))e^{-\lambda \varepsilon t}, \\ x \in \bar{D}, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $(\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon), \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon))$ определены в предыдущем пункте, $\lambda > 0$ — постоянная. Нижнее решение $(U_\alpha(x, t, \varepsilon), V_\alpha(x, t, \varepsilon))$ имеет аналогичную структуру.

В нашем случае, ввиду наличия в системе КРЗ-нелинейностей, для успешной реализации процедуры доказательства из [19] необходимо, наряду с асимптотическими оценками для разностей

$$\begin{aligned}
 \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{n+1}), \\
 \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon) - v_s(x, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{n+1}),
 \end{aligned} \tag{22}$$

которые напрямую следуют из **Теоремы D**, получить аналогичные оценки для частных производных по координатам. Нам понадобится

Лемма 2. Пусть $(u_s(x, \varepsilon), v_s(x, \varepsilon))$ — решение, существование которого утверждает **Теорема D**. Тогда выполнены следующие оценки при $x \in D$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial(u_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon))}{\partial x_i} \right| &= O(\varepsilon^n), \\
 \left| \frac{\partial(v_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon))}{\partial x_i} \right| &= O(\varepsilon^{n+1}), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Отметим, что верхнее решение $(\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon), \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon))$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \Delta \beta_{n+1}^u - \varepsilon^2 A(\beta_{n+1}^u, x) (\nabla \beta_{n+1}^u)^2 - \\
 - g(\beta_{n+1}^u, \beta_{n+1}^v, x, \varepsilon) &= p(x, \varepsilon) \varepsilon^{n+1}, \quad x \in D; \\
 \Delta \beta_{n+1}^v - B(\beta_{n+1}^v, x) (\nabla \beta_{n+1}^v)^2 - \\
 - f(\beta_{n+1}^u, \beta_{n+1}^v, x, \varepsilon) &= q(x, \varepsilon) \varepsilon^{n+1}; \\
 \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon) &= u^0(x), \quad \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon) = v^0(x), \quad x \in \Gamma,
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $|p(x, \varepsilon)| < c_1$, $|q(x, \varepsilon)| < c_2$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Замечание 1. Заменой можно перенести невязки вида $\psi_u(x)\varepsilon^{n+1}, \psi_v(x)\varepsilon^{n+1}$, возникающие в граничных условиях (23), в правую часть дифференциальных уравнений задачи (23). Поэтому будем считать, что мы такую замену осуществили.

Проведем над уравнениями задач (1) и (23) монотонные преобразования Бицадзе [21]:

$$\begin{aligned}
 w(u, x) &= \int_{u_0(x)}^u \exp \left(- \int_{u_0(x)}^y A(\kappa, x) d\kappa \right) dy, \\
 r(v, x) &= \int_{v_0(x)}^v \exp \left(- \int_{v_0(x)}^y B(\kappa, x) d\kappa \right) dy, \\
 u &= j_1(w, x), \quad v = j_2(r, x).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Замечание 2. Далее нам будет удобно ввести обозначения для производных. Например, выражение $\left(\frac{\partial A}{\partial B} \right)_C$ означает, что частная производная от функции A по переменной B берется при постоянном аргументе C . В аналогичном смысле мы понимаем $\left(\frac{\partial^2 A}{\partial B^2} \right)_C$, $(\nabla A)_C$ и смешанные дифференциальные операции.

Отметим важные свойства преобразований (24):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial w^2} \right)_x - A(j_1(w, x), x) \left(\left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x \right)^2 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial^2 j_2}{\partial r^2} \right)_x - B(j_2(r, x), x) \left(\left(\frac{\partial j_2}{\partial r} \right)_x \right)^2 &= 0, \\
 \nabla u &= \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x \nabla w + (\nabla j_1)_w, \\
 \Delta u &= \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial w^2} \right)_x (\nabla w)^2 + 2 \left(\left[\nabla \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x \right]_w, \nabla w \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x \Delta w + (\Delta j_1)_w.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогичные выражения получим для градиента и оператора Лапласа от компоненты v . Здесь и далее для краткости мы не стали указывать аргументы у функций j_1, j_2 , а также производных и градиентов (вычисляются в точках (w, x) или (r, x) соответственно).

Учитывая (24), (25), можно записать преобразованные уравнения задач (1) и (23):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \Delta w_s - \varepsilon^2 (\mathbf{C}(w_s, x), \nabla w_s) - g_1(w_s, r_s, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in D; \\
 \varepsilon^2 \Delta W_{n+1} - \varepsilon^2 (\mathbf{C}(W_{n+1}, x), \nabla W_{n+1}) - g_1(W_{n+1}, R_{n+1}, x, \varepsilon) &= p(x, \varepsilon) \varepsilon^{n+1} \exp \left(- \int_{u_0(x)}^{j_1(W_{n+1}, x)} A(\kappa, x) d\kappa \right); \\
 \Delta r_s - (\mathbf{E}(r_s, x), \nabla r_s) - f_1(w_s, r_s, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in D; \\
 \Delta R_{n+1} - (\mathbf{E}(R_{n+1}, x), \nabla R_{n+1}) - f_1(W_{n+1}, R_{n+1}, x, \varepsilon) &= q(x, \varepsilon) \varepsilon^{n+1} \exp \left(- \int_{v_0(x)}^{j_2(R_{n+1}, x)} B(\kappa, x) d\kappa \right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

с нулевыми граничными условиями.

Здесь мы ввели функции

$$\begin{aligned}
 g_1(w, r, x, \varepsilon) &= (g(j_1(w, x), j_2(r, x), x, \varepsilon) - \varepsilon^2 (\Delta j_1)_w + \varepsilon^2 ((\nabla j_1)_w)^2 A(j_1(w, x), x)) / \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x, \\
 \mathbf{C}(w, x) &= \left(2A(j_1(w, x), x) \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x (\nabla j_1)_w - 2 \left[\nabla \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x \right]_w \right) / \left(\frac{\partial j_1}{\partial w} \right)_x.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом вводятся функции $f_1(w, r, x, \varepsilon)$, $\mathbf{E}(r, x)$.

Как следует из (24), все частные производные функций j_1 , j_2 , входящие в представления функций g_1 , f_1 и $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, имеют порядок $O(1)$. Очевидно, что и сами функции g_1 , f_1 и $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ имеют такой же порядок.

Итак, мы преобразовали (1) и (23) в задачи с нелинейными адвективными слагаемыми, понизив на единицу степень градиента. Это позволяет нам далее использовать подход, развитый в работе

[22], с учетом оценок функции Грина [23].

Введем функции $z_1(x, \varepsilon) = w_s(x, \varepsilon) - W_{n+1}(x, \varepsilon)$, $z_2(x, \varepsilon) = r_s(x, \varepsilon) - R_{n+1}(x, \varepsilon)$. Действуя аналогично работе [22], для функций $z_1(x, \varepsilon)$, $z_2(x, \varepsilon)$ получим оценки

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_i} = O(\varepsilon^n), \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_i} = O(\varepsilon^{n+1}), \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

Далее запишем разность $\frac{\partial(u_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon))}{\partial x_i}$

с учетом (25), при этом явно укажем аргументы у возникающей функции j_1 и ее производных

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon))}{\partial x_i} &= \left(\frac{\partial j_1(w_s, x)}{\partial w} \right)_x \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial W_{n+1}}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\partial j_1(w_s, x)}{\partial w} \right)_x - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\partial j_1(W_{n+1}, x)}{\partial w} \right)_x \right) + \left(\left(\frac{\partial j_1(w_s, x)}{\partial x_i} \right)_w - \left(\frac{\partial j_1(W_{n+1}, x)}{\partial x_i} \right)_w \right), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Первое слагаемое правой части данного равенства имеет порядок малости $O(\varepsilon^n)$. Применяя формулу конечных приращений, получаем следующие оценки: второе слагаемое имеет порядок малости $O(\varepsilon^n)$, третье слагаемое имеет порядок малости $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, окончательно приходим к оценке

$$\frac{\partial(u_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^u(x, \varepsilon))}{\partial x_i} = O(\varepsilon^n), \quad i = 1, 2.$$

Аналогичным образом для разности $\frac{\partial(v_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon))}{\partial x_i}$ имеем

$$\frac{\partial(v_s(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon))}{\partial x_i} = O(\varepsilon^{n+1}), \quad i = 1, 2. \tag{29}$$

Лемма 2 доказана.

Замечание 3. Приведенный способ доказательства асимптотических оценок производных может быть эффективно использован и для других многомерных задач с квадратичными нелинейностями.

Например, с его помощью можно доказать асимптотическую устойчивость по Ляпунову решений с пограничными и внутренними слоями, существование которых установлено в работе [2].

Стандартные преобразования (см. [20]), использующие уравнения для членов асимптотики стационарных решений, дифференциальные неравенства **B2**), а также оценки из **Леммы 2** показывают, что выполняются соответствующие дифференциальные неравенства для верхнего и нижнего решений. В частности, для верхнего решения (U_β, V_β) после подстановки имеем:

$$\begin{aligned}
 L_{u,v}(U_\beta, V_\beta) &= e^{-\lambda \varepsilon t} (\mathcal{N}_{u,v}(\beta_{n+1}^u(x, \varepsilon), \beta_{n+1}^v(x, \varepsilon)) + \\
 &\quad + O(\varepsilon^{n+2}) + O(\varepsilon^{2n+2})) < 0, \tag{30}
 \end{aligned}$$

при достаточно малых ε и $\lambda > 0$ при $n \geq 0$ в силу дифференциальных неравенств (19) из условия **B2**), результата **Леммы 2** и оценок (22). Аналогичным образом проверяются дифференциальные неравенства для $(U_\alpha(x, \varepsilon), V_\alpha(x, \varepsilon))$. При этом условие упорядоченности и граничные неравенства вы-

полняются автоматически в силу условий **B1**), **B3**) для верхнего и нижнего решений стационарной задачи.

Таким образом, из теорем сравнения [7] следует существование и единственность решения задачи (20) в области между верхним и нижним решениями при условии на начальные функции $\alpha_1^u(x, \varepsilon) \leq u_0(x, \varepsilon) \leq \beta_1^u(x, \varepsilon)$, $\alpha_1^v(x, \varepsilon) \leq v_0(x, \varepsilon) \leq \beta_1^v(x, \varepsilon)$. Из структуры (U_β, V_β) и (U_α, V_α) следует локальная единственность решения краевой задачи (1). Таким образом, справедлива теорема:

Теорема DS. При выполнении условий **(A1)** — **(A5)** при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарное решение $(u_s(x, \varepsilon), v_s(x, \varepsilon))$ асимптотиче-

ски устойчиво по Ляпунову как решение задачи (20) с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1^u(x, \varepsilon); \beta_1^u(x, \varepsilon)] \times [\alpha_1^v(x, \varepsilon); \beta_1^v(x, \varepsilon)]$ и локально единственно как решение задачи (1) в этой области.

В заключение нужно отметить, что с использованием методов и подходов настоящей работы можно доказать двумерные аналоги теорем существования и асимптотической устойчивости из статьи [9], в том числе при отсутствии условия квазимонотонности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-11-00069).

-
- [1] Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C. // *Phys. Rev. Lett.* **56**, N 9. 889 (1986).
 - [2] Davydova M. A., Zakharova S.A. // *J. Comput. Appl. Math.* **400**, N 1. 113731 (2022).
 - [3] Krug J., Spohn H. // *Phys. Rev. A.* **38**, N 8. 4271 (1988).
 - [4] Grimson M.J., Barker G.C. // *Phys. Rev. E.* **49**, N 2. 1680 (1994).
 - [5] Похожяев С.И. // *Мат. Сб.* **113**, № 2. 324. (1980) (Pokhozhaev S.I. // *Math. USSR-Sb.* **41**, N 2. 269 (1982)).
 - [6] Муравник А.Б. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **60**, № 8. 1422 (2020). (Muravnik A. B. // *Comput. Mathem. Math. Phys.* 2020. **60**, N 8. 1375 (2020)).
 - [7] Fife P.C., Tang M.M. // *J. Differ. Equ.* **40**, № 2. 168 (1981).
 - [8] Ladde G.S., Lakshmikantham V., Vatsala A.S. // *J. Math. Anal. Appl.* **108**, N 1. 249 (1985).
 - [9] Неведов Н.Н., Орлов А.О. // *ТМФ.* **220**, № 1. 137 (2024). (N. N. Nefedov, A. O. Orlov. // *TMF.* **220**, N 1. 1178 (2024)).
 - [10] Неведов Н.Н. // *Матем. заметки.* **115**, № 2. 232 (2024) (N. N. Nefedov // *Math. Notes.* **116**, N 6. 1332 (2024)).
 - [11] Неведов Н.Н. Коцюбинский К.А. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* **79**, № 3. 1 (2024). (Nefedov N. N., Kotsubinsky K.A. // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **79**, N 3. 301 (2024)).
 - [12] Неведов Н.Н. // *Матем. заметки.* **116**, № 6. 947 (2024). (N. N. Nefedov. // *Math. Notes.* **116**, N 6. 1332 (2024)).
 - [13] Nikulin E.I., Nefedov N.N., Orlov A.O. // *Russ. J. Math. Phys.* **31**, N 3. 513 (2024).
 - [14] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. // *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* М., 1990.
 - [15] Nefedov N.N., Sakamoto K. // *Hiroshima Math. J.* **33**, N 3. 391 (2003).
 - [16] Сас Н.Р. // *Proceedings of the American Mathematical Society.* **88**, N 1. 47 (1983).
 - [17] Amann H. // *SIAM review.* **18**, N 4. 620 (1976).
 - [18] Lopez-Gomez J. // *JDE.* **127**, № 1. 263 (1996).
 - [19] Неведов Н.Н. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **61**, № 12. 2074 (2021). (N. N. Nefedov // *Comput. Math. Math. Phys.* **61**, N 12. 2068 (2021)).
 - [20] Неведов Н.Н., Орлов А.О. // *Диф. уравн.* **59**, № 8. 1007 (2023). (Nefedov N.N., Orlov A.O. // *Diff. Equat.* **59**, N 8. 1009 (2023)).
 - [21] Бицадзе А.В. // *Диф. уравн.* **13**, № 11. 1993 (1977) (A. V. Bitsadze // *Differ. Uravn.* **13**, N 11. 1993 (1977). <https://www.mathnet.ru/eng/de3234>)
 - [22] Левашова Н.Т., Неведов Н.Н., Николаева О.А. // *Дифф. уравн.* **56**, № 2. 204 (2020). (Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A. // *Differ. Equ.* **56**, N 2. 199 (2020)).
 - [23] Соболевский П.Е. // *Докл. АН СССР.* **142**, № 4. 804 (1962). (P. E. Sobolevskii // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1962. **142**, N 4. 804 (1962). <https://www.mathnet.ru/eng/dan26083>)

Existence and stability of stationary boundary layer solution in a two-dimensional system of fast and slow reaction-diffusion-advection equations with KPZ-nonlinearities

A. O. Orlov

¹of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

The paper considers a boundary value problem for a singularly perturbed elliptic system of fast and slow equations, which is commonly called a Tikhonov-type system. The problem in question features terms containing the squared gradient of the unknown function (KPZ- nonlinearities). The boundary-layer asymptotics of the solution in the case of the Dirichlet boundary condition is constructed, the existence of a solution with the constructed asymptotics is proved, and its Lyapunov stability is investigated. The proof of

the theorem was carried out using asymptotic method of differential inequalities by N.N. Nefedov.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Mv.

Keywords: singularly perturbed problems, KPZ-nonlinearities, reaction-diffusion-advection equations, boundary layers, asymptotic approximation, differential inequalities, Lyapunov stability.

Received 27 December 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторе

Орлов Андрей Олегович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-48-59, e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru.