

Аналитические модели нестационарных физических полей планет в локальном варианте

А.Г. Ягола,¹ И.Э. Степанова,^{2,*} А.Н. Левашов,^{1,†} И.И. Колотов,¹ А.В. Горбачев¹

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

(Поступила в редакцию 20.02.2025; после доработки 19.03.2025; подписана в печать 25.03.2025)

Предложена новая методика построения аналитических моделей нестационарных векторных полей на основе локальной версии метода линейных интегральных представлений. Приводятся варианты постановок обратных коэффициентных задач для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение заряженной магнитной жидкости. Формулируется теорема единственности решения обратной коэффициентной задачи для уравнений магнитной гидродинамики.

PACS: 02.30.Em, 02.30.Zz УДК: 550.8

Ключевые слова: нестационарное поле, магнитная гидродинамика, функция Грина, линейные интегральные представления.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2530106](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2530106)

ВВЕДЕНИЕ

Дистанционное зондирование Земли и планет потребовало радикального пересмотра существующих подходов к обработке информации как в области теории, так и в практическом плане.

Модели физических полей и топографии должны строиться на основе быстро меняющейся информации о сигналах. Поскольку в непрерывном варианте, как это уже подчеркивалось нами [1], источники внешних полей определить однозначно невозможно, возникает проблема рассмотрения таких вариационных постановок, в которых априорная информация позволила бы максимально близко подойти к решению соответствующих обратных задач.

Разработано много методов и подходов к интерпретации геофизических данных (см., например, [2–10]). Особенно многообещающими нам представляются методики, в которых источники сигнала определяются по информации не только об элементе поля, но и о его градиенте [11, 12].

Наличие у планеты магнитного динамо обуславливает сложный, нестационарный характер взаимодействия внутреннего магнитного поля с солнечным ветром, представляющим собой потоки заряженных частиц, движущихся в окружающем эту планету пространстве.

В работе [1] мы предложили для моделирования магнитного поля Земли аппроксимационную конструкцию на основе метода линейных интегральных представлений, в которой учитывается время.

На наш взгляд, весьма актуальной является проблема нахождения устойчивых приближенных ре-

шений системы уравнений магнитной гидродинамики, в которой для магнитного поля и поля скоростей считаются справедливыми некоторые интегральные представления [13–16]. Время может выступать в таких системах как в качестве независимой переменной, так и в качестве параметра модели (в последнем случае можно применить затем метод спуска по этому параметру с целью нахождения пространственного распределения стационарного поля [13]).

В настоящей работе мы предприняли попытку аппроксимации магнитного поля Меркурия по данным станции «Мессенджер», но, в отличие от работы [17], с учетом того, что магнитная индукция и поле скоростей удовлетворяют полной системе уравнений магнитной гидродинамики [18].

Математическое моделирование магнитного поля Меркурия выполнялось с помощью комбинированной методики, включающей в себя версию S-аппроксимаций для вихревых векторных полей, региональный вариант метода модифицированных S-аппроксимаций и зависящий от времени вариант S-аппроксимаций в трехмерном декартовом пространстве.

Представление планеты в виде полупространства при решении интерпретационных задач существенно упрощает как математические выкладки, так и вычислительные алгоритмы. Именно по этой причине нестационарное магнитное поле Меркурия можно в первом приближении считать полем, порождаемым токами или магнитными моментами, расположенными в нижнем полупространстве. Для того чтобы восстановить значения магнитного поля планеты во всем пространстве в любой момент времени, необходимо знать начальное распределение компонент вектора магнитной индукции и поля скоростей заряженных частиц.

* E-mail: tet@ifz.ru

† E-mail: levashov.an16@physics.msu.ru

1. СТАЦИОНАРНЫЕ S-АППРОКСИМАЦИИ ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ В ЛОКАЛЬНОМ ВАРИАНТЕ

Пусть нам известны значения внутреннего магнитного поля, порождаемого токами

внутри жидкой части ядра. В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа верно следующее интегральное представление:

$$\mathbf{V}(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\mathbf{j}_l(\xi), \mathbf{r}_{\xi,l} - \mathbf{r}_M] d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - H_l)^2}]^3}, \quad (1)$$

$$M = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{r}_{\xi,l} = (\xi_1, \xi_2, H_l), \quad \mathbf{r}_M = (x_1, x_2, x_3).$$

Через $\mathbf{j}_l(\xi)$ обозначена поверхностная плотность тока на l -й плоскости. В числителе дроби в (1) стоит векторное произведение плотности тока на разность радиусов-векторов точки интегрирования и точки наблюдения. Интегральное представление

(1) записано нами в форме локальных модифицированных S-аппроксимаций.

Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений для нахождения аналитической аппроксимации z -компоненты магнитной индукции в (1) будут выглядеть следующим образом [17]:

$$a_{ij} = 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{1}{x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l + \sqrt{(x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}} - \frac{(x_2^{(i)} - x_2^{(j)}) \left((x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)(x_2^{(i)} - x_2^{(j)}) + 2(x_2^{(i)} - x_2^{(j)}) \sqrt{(x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)^2 + r_{ij}^2} \right)}{\left((x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l) \sqrt{(x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)^2 + r_{ij}^2} + (x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)^2 + r_{ij}^2 \right)^2} \right\} \times \quad (2)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(x_3^{(i)} + x_3^{(j)} - 2H_l)^2 + r_{ij}^2}}, \quad r_{ij}^2 = (x_1^{(i)} - x_1^{(j)})^2 + (x_2^{(i)} - x_2^{(j)})^2, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

2. РЕГИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПОЛЕЙ С УЧЕТОМ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ

Локальные интегральные представления элементов физических полей и других сигналов строятся для небольших по площади территорий: не более 10^4 км², в отличие от глобальных (линейные аналитические аппроксимации строятся для всей Земли) или региональных (линейные аналитические аппроксимации строятся для больших по площади территорий — порядка $(10^5 - 10^6)$ км²) [16].

Как мы уже указали во Введении, зависящие от времени физические поля и другие сигналы проще всего описывать в декартовой системе координат. Такой подход может быть полезен и при решении глобальных задач в общеземной системе координат для получения нулевого приближения к решению нелинейной обратной задачи [19].

При построении региональных модифицирован-

ных S-аппроксимаций планета представляется либо в виде шара (когда эллиптичность не учитывается), либо в виде эллипсоида.

Если известны геодезические координаты точки наблюдения, то декартовы можно выразить через геодезические по известным формулам [20].

«Идеализированная» планета считается внутренностью эллипсоида с полуосями a, b, c , а реальная планета представляется как область, ограниченная кусочно-непрерывной замкнутой поверхностью S , мало отклоняющейся от этого эллипсоида и содержащей его внутри себя. Пусть в некоторой (произвольной) совокупности точек $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ на поверхности S заданы приближенные значения гармонической (во внешности эллипсоида) функции $G(x)$:

$$f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, \quad f_i = G(x^{(i)}). \quad (3)$$

Функция $G(x)$ может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G(x) = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I(\theta, \phi) \sigma(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{R(\xi - x)} + \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{I(\theta, \phi) w(\theta, \phi)}{R^3(\xi - x) \sqrt{\frac{\xi_1^2}{a^4} + \frac{\xi_2^2}{b^4} + \frac{\xi_3^2}{c^4}}} \left[1 - \left(\frac{x_1 \xi_1}{a^2} + \frac{x_2 \xi_2}{b^2} + \frac{x_3 \xi_3}{c^2} \right) \right] \sin \theta d\theta d\phi, \\
 R(\xi - x) = & (|\xi|^2 - 2|\xi|r \cos \theta' + r^2)^{1/2}, \\
 \xi = & (a \cos \bar{\phi} \sin \bar{\theta}, b \sin \bar{\phi} \sin \bar{\theta}, c \cos \bar{\theta}), \\
 x = & (r \cos \bar{\phi} \sin \bar{\theta}, r \sin \bar{\phi} \sin \bar{\theta}, r \cos \bar{\theta}), \\
 \cos \theta' = & \sin \theta \sin \bar{\theta} \cos(\phi - \bar{\phi}) + \cos \bar{\theta} \cos \theta, \\
 x = (x_1, x_2, x_3), \quad \xi = & (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\
 I(\theta, \phi) = & \sin \theta \sqrt{a^2 b^2 \cos^2 \theta + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + b^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Относительно функций σ и w ставится следующая условно вариационная задача минимизации следующего функционала:

$$\begin{aligned}
 \Omega(\sigma, w) = \\
 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sigma^2(\theta, \phi)}{p_1^2(\theta, \phi)} + \frac{w^2(\theta, \phi)}{p_2^2(\theta, \phi)} \right) \sin \theta d\theta d\phi = \min_{\sigma, w}
 \end{aligned} \tag{5}$$

при выполнении условия (4).

Функции $p_1^2(\theta, \phi)$, $p_2^2(\theta, \phi)$ в вариационной постановке (5) должны быть связаны с геометрически-

ми свойствами области задания эквивалентных по внешнему полю носителей масс.

Решение вариационной задачи (5) при известных функциях $p_1^2(\theta, \phi)$, $p_2^2(\theta, \phi)$ эквивалентно решению системы линейных алгебраических уравнений [14]:

$$A\lambda = \mathbf{f}_\delta, \quad \mathbf{f}_\delta = \mathbf{f} + \delta\mathbf{f}, \tag{6}$$

где вектор \mathbf{f}_δ имеет компоненты $\mathbf{f}_{i,\delta}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$, а матрица $A = A^T \geq 0$ в случае, когда функции $p_1^2(\theta, \phi)$, $p_2^2(\theta, \phi)$ тождественно на сфере равны 1, имеет элементы

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[Q_i^{(1)}(\xi) Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi) Q_j^{(2)}(\xi) \right] \sin \theta d\theta d\phi = \\
 = & \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} \left(1 + \frac{0.25}{r_i r_j h_i h_j} \right) F \left(2 \arctg(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{0.5 \cdot (1 + \cos \alpha_{i,j})} \right) - \\
 & - \frac{\pi (3(h_i h_j)^2 - 4h_i h_j \cos \alpha_{i,j}) + 1}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos \alpha_{i,j}} + (h_i h_j)^2)^3}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где функция $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $h_i = \frac{R_0}{r_i}$, а α_{ij} — угол между векторами $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{x}^{(j)}$. Для функций σ и w получаем представление:

$$\sigma(\xi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(1)}(\xi), \quad w(\xi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(2)}(\xi), \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

$$Q_i^{(1)}(\xi) = \frac{1}{R(\xi - \mathbf{x}^{(i)})}, \quad Q_i^{(2)}(\xi) = \frac{R - r_i \cos \theta_i}{R^3(\xi - \mathbf{x}^{(i)})}. \tag{9}$$

Формулы (2) были получены в предположении, что вектор \mathbf{x}_i параллелен оси Oz , а вектор \mathbf{x}_j лежит в плоскости zOx (в случае сферы мы всегда можем выбрать такую систему координат, в отличие от эллипсоида). Тогда радиусы-векторы i -й и j -й точек будут иметь координаты

$$\mathbf{x}^{(i)} = (r_i, 0, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}^{(j)} = (r_j \sin \alpha_{ij}, 0, r_j \cos \alpha_{ij}).$$

Конечно, метод линейных интегральных представлений не позволяет учитывать все морфологические особенности конкретной планеты, но простота выражений для элементов матрицы СЛАУ в определенном смысле компенсирует недостаток информации подобного рода. Как видно из выражений (7) и (8), время в таких моделях никак не фигурирует. Если учитывается эллиптичность планеты, то выражения для элементов матрицы системы немного усложняются (см. [1]).

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ S-АППРОКСИМАЦИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Зависимость магнитного поля планеты от времени может быть описана различными способами: это определяется постановкой конкретной задачи. В последние десятилетия при интерпретации дан-

ных о магнитных полях Земли и планет Солнечной системы часто так называют метод сингулярных магнитных диполей (ESD) [21, 22]. В одном из вариантов этого метода учитывается линейная зависимость компонент вектора намагниченности от времени [23].

Опишем теперь, как строится вторая «компонента» математической модели магнитного поля Земли. В настоящей работе мы полагаем, что время — это некий непрерывно меняющийся от нуля до бесконечности параметр модели. Параметр a^2 можно считать достаточно большим: если $a^2 \rightarrow \infty$, то решение приведенного ниже уравнения параболического типа будет стремиться к решению уравнения Лапласа.

Если считать, что планета занимает нижнее по-

лупространство, ограниченное плоскостью $x_3 = 0$ в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , то решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (или диффузии, важно — уравнения параболического типа с постоянными коэффициентами в верхнем полупространстве):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= a^2 \Delta \mathbf{B}, \quad 0 < t < +\infty, \\ -\infty < x_1 < +\infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty, \quad 0 < x_3 < +\infty, \\ \mathbf{B}(x_1, x_2, 0, t) &= \vec{\Psi}(x_1, x_2, t), \\ \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \mathbf{B}_0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^\infty d\xi_3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \mathbf{B}_0(\boldsymbol{\xi}) \left\{ \frac{\exp(-|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2/(4a^2t))}{t} - \frac{\exp(-|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}|^2/(4a^2t))}{t} \right\} d\xi_1 + \\ &+ \frac{x_3}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \vec{\Psi}(\xi_1, \xi_2, \tau) \left\{ \frac{\exp(-|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2/(4a^2(t-\tau)))}{(t-\tau)^{3/2}} \right\} d\xi_1, \\ |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| &= ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2)^{1/2}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, можно полагать, что функция B_{x_3} , гармоническая в полупространстве $x_3 > -H$, имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} B_{x_3}(\mathbf{x}) &= \frac{x_3}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \psi(\xi_1, \xi_2, \tau) \left\{ \frac{\exp(-|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2/(4a^2(t-\tau)))}{(t-\tau)^{3/2}} \right\} d\xi_1, \\ |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| &= ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + H)^2)^{1/2}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, H), \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3), \quad -\infty < x_1 < +\infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty, \quad 0 < x_3 < +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрирование в (11) осуществляется по плоскости, на которой в фиксированный момент времени находятся источники нестационарного поля ($x_3 = -H$), а неизвестная функция в (11) может быть записана следующим образом:

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{j=1}^N \lambda_j (x_3^{(j)} + H) \frac{\exp\left(-((x_1^{(j)} - \xi_1)^2 + (x_2^{(j)} - \xi_2)^2 + (x_3^{(j)} + H)^2)/(4a^2(\tau + t_j))\right)}{(2a\sqrt{\pi})^3 (\tau + t_j)^{5/2}}. \quad (12)$$

Видно, что проблема нахождения неизвестной функции $\psi(t, x_1, x_2)$ сведется теперь к определению вектора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

В итоге мы приходим к свойственной методу линейных интегральных представлений СЛАУ (системе линейных алгебраических уравнений):

$$A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_\delta, \quad (13)$$

в которой A есть $N \times N$ — матрица со свойством

$$A = A^T \geq 0 \quad (14)$$

и элементами a_{ij} , $1 \leq p, q \leq N$:

$$a_{ij} = \frac{(x_3^{(j)} + x_3^{(i)} + 2H)}{(2a\sqrt{\pi})^3} \left\{ \frac{\exp(-((x_1^{(j)} - x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(j)} - x_2^{(i)})^2 + (x_3^{(j)} + x_1^{(i)} + 2H)^2)/(4a^2(t_i + t_j)))}{(t_i + t_j)^{5/2}} \right\}, \quad (15)$$

а \mathbf{f}_δ — N -вектор с компонентами $f_{t,\delta}$, определенными по (6), а $\boldsymbol{\lambda}$ — N -вектор с компонентами λ_i .

4. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

В настоящей работе мы развили комбинированную методику интерпретации данных магниторазведки, предложенную в [1, 17].

Процедура построения аналитической модели физического поля планеты может быть описана следующим образом.

1. По некоторым выборкам из всего ансамбля данных о поле находятся «вихревые» модифицированные S-аппроксимации в локальном варианте (в соответствии с принципами, изложенными в Разделе 2). Вычисляются элементы матрицы СЛАУ (2).
2. По данным наблюдений о магнитном (или другом) поле строится аналитическая модель вектора магнитной индукции (или модуля вектора) с помощью регионального варианта модифицированных S-аппроксимаций с учетом эллиптичности (Раздел 4 настоящей статьи). Вычисляются значения элементов матрицы СЛАУ (7), к решению которой редуцируется вариационная постановка.
3. По построенным в соответствии с рекомендациями п.1 и 2 аналитическим моделям магнитного поля в изучаемом регионе восстанавливаются начальные, граничные и другие условия (вектор-функции), которые затем используются при постановке прямых задач для нахождения распределения значений компонентов магнитного (или другого нестационарного) поля в верхнем полупространстве (если считать планету нижним полупространством в декартовых координатах) в произвольный момент времени. Время «включается» как некоторый настраиваемый (наряду с иными переменными или постоянными величинами) параметр задачи. Находятся значения элементов матриц (15), если считать $-\{\vec{\nu}, \mathbf{B}\}$ (что в трехмерном декартовом пространстве выглядит как $\text{rot}[\vec{\nu}, \mathbf{B}]$ (см. [18]). Равенство такого ротора нулю может означать, например, коллинеарность векторов скорости заряженных частиц и магнитного поля, но не только. Поле скоростей заряженных частиц $\vec{\nu}$, как правило, неизвестно.

Как и в [1], можно было бы остановиться на одной модели поля: региональном варианте S-аппроксимаций стационарных полей или локальном варианте для вихревых полей, а затем строить модель поля, зависящую от времени.

Однако аппроксимация компонент вектора магнитной индукции различными способами обеспечивает более гибкий и надежный подход в условиях почти полного отсутствия данных об источниках поля. В отличие от работы [17], мы построили нестационарные модели магнитного поля Мер-

курия по более объемной выборке данных; при этом начальные значения вектора магнитной индукции (точнее — z-компоненты) аппроксимировались при большем, нежели ранее, числе носителей токов (в рамках метода вихревых S-аппроксимаций).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Мы протестировали новую комбинированную методику построения математических моделей полей, зависящих от времени, на данных миссии Messenger за несколько дней полета (рис. 1, а). Всего в наборе было 12000 точек.

Сферы или эллипсоиды, как носители простого и двойного слоев, располагались в коре Меркурия, т.е. на расстоянии от 0.1 до 100 км от поверхности планеты.

Для радиальной компоненты поля (которую при построении вихревых аппроксимаций можно считать условно z-компонентой поля в планетосцентрической декартовой системе координат) находятся региональные S-аппроксимации как в рамках вариационного, так и в рамках структурно-параметрического подходов [14–16]. Затем строятся зависящие от времени (см. формулы 15) аппроксимации этой компоненты при нескольких значениях параметра a^2 (у нас этот параметр принимал значения 100, 200, 500 и 1000).

Структурно-параметрический подход подразумевает нахождение своего вектора коэффициентов линейной аппроксимации для каждой компоненты связности носителя [16]. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) решаются с помощью метода регуляризации Холецкого (БМХР) и усовершенствованного блочного метода решения СЛАУ (УБМ) [15, 16].

Для решения систем (2), (7) и (15) мы применили два метода, предложенные авторами в работах [14–16]. Первый из методов решения плохо обусловленных СЛАУ мы будем обозначать как БМХР (блочный метод регуляризации Холецкого), а второй — как УБМ (усовершенствованный блочный метод). На данный момент возможны исключительно метрологические аппроксимации гравитационного и магнитного полей, поскольку количественная информация об источниках полей отсутствует.

Меркурий представляется в виде шара радиуса $R_0 = 2439.0$ км.

Результаты аппроксимации отражены в таблице. В первых двух строках этой таблицы приводятся результаты региональных S-аппроксимаций магнитной индукции без и с учетом эллиптичности; в 3-й–5-й строках даны результаты вихревых аппроксимаций при различных глубинах h залегания токопроводящих плоскостей; в последней строке показаны результаты зависящей от времени аппроксимации в соответствии с формулами (15) при значении параметра $a^2 = 1000$ (поэтому в первом

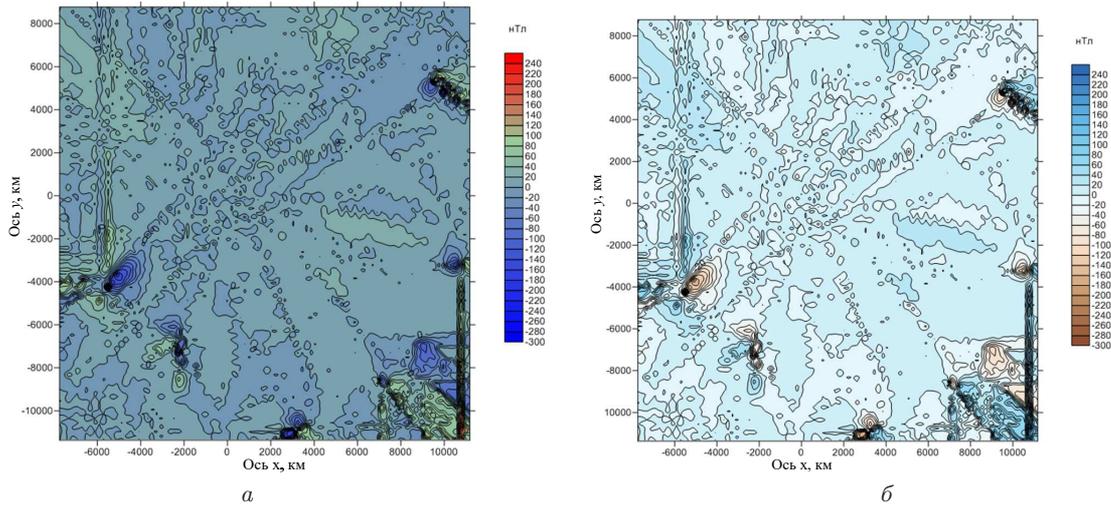


Рис. 1. *a* — Магнитное поле по данным станции Мессенджер (*z*-компонента); *б* — магнитное поле, построенное с помощью зависящих от времени *S*-аппроксимаций (*z*-компонента). Параметр $a^2 = 1000$

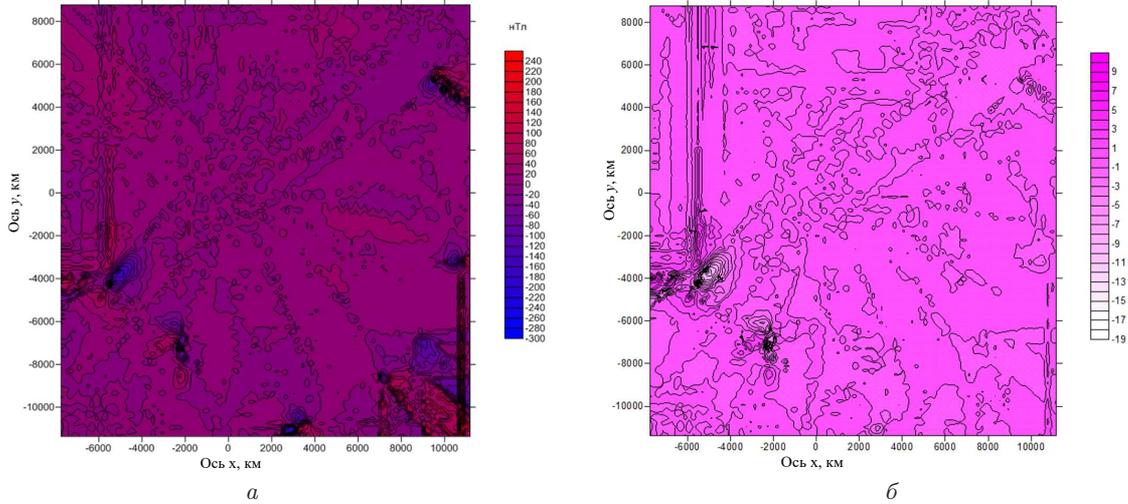


Рис. 2. *a* — Магнитное поле Меркурия, построенное с помощью региональных эллиптических *S*-аппроксимаций. Пример 2 (см. таблицу); *б* — магнитное поле Меркурия, построенное с помощью зависящих от времени *S*-аппроксимаций. Параметр $a^2 = 100$

Таблица. Модифицированные *S*-аппроксимации *z*-компонент магнитного поля Меркурия по данным Messenger. Комбинированная методика

№	B/N	R_0 , км или a, b, c или h , км	Метод решения СЛАУ	σ_{\min} , нТл	σ_{\max} , нТл	σ_0 , нТл	Δ/t
1	B_z 12000	2400	БМХР	0.0012	0.0024	0.0019	1.56×10^{-6} 40:45
2	B_z 12000	2380, 2375, 2375	БМХР	0.0027	0.0039	0.0036	1.67×10^{-5} 39:15
3	B_z, j_x, j_y 12000	800.0 900.0	УБМ	0.01	0.015	0.014	1.36×10^{-4} 37:28
4	B_z, j_x, j_y 12000	100.0 200.0	УБМ	0.001	0.0015	0.00147	1.7×10^{-7} 38:47
5	B_z, j_x, j_y 12000	700.0 750.0	УБМ	0.01	0.015	0.0126	1.58×10^{-5} 36:10
6	B_z, ψ 12000	100.0 200.0	УБМ	0.001	0.0015	0.00138	1.25×10^{-7} 38:19

Обозначения в таблице: $\sigma = \frac{\|A\mathbf{x} - \mathbf{f}_s\|_E}{\sqrt{N}}$ — среднеквадратическое отклонение, $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}$, $\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}}$, $\Delta = \frac{\|A\mathbf{x} - \mathbf{f}_\delta\|_E}{\|\mathbf{f}_\delta\|_E}$ — показатель качества решения, t — время в минутах и секундах.

Значения полюсов a, b, c равны для всех примеров в этой таблице 2380, 2375, 2375 км. БМХР — метод регуляризации Холецкого; УБМ — усовершенствованный блочный метод решения СЛАУ (УБМ) [16, 17]

столбце последней строки стоит символ неизвестной аппроксимируемой функции ψ). На рис. 1, б и 2, а изображены S-аппроксимации z -компоненты магнитного поля Меркурия, построенные в рамках региональной версии метода линейных интегральных представлений (как без учета эллиптичности — рис. 1, б, так и при задании носителя, имеющего форму эллипсоида вращения — рис. 2, а).

На рис. 2, б показано магнитное поле, полученное в результате нестационарной аппроксимации при значении параметра $a^2 = 100$. Видно, что оно сильно отличается от исходного и построенного другими способами.

Поскольку орбита космической миссии в некоторые моменты времени достаточно далеко уходила от поверхности Меркурия (на расстояние до 0.6 среднего радиуса планеты), то для выделения из «сырых» данных составляющих магнитной индукции, генерируемых токами в жидком ядре и коре — так называемого внутреннего магнитного поля Меркурия — можно воспользоваться приближением «тонкой оболочки» [24]. В таком случае точки наблюдения должны находиться в пределах тонкой (по сравнению с некоторыми параметрами планеты) оболочки, окружающей Меркурий. Полоидальное и тороидальное магнитные поля, создаваемые токами в плазме вокруг Меркурия, становятся пренебрежимо малыми при таком подходе. «Тонкая оболочка» для Меркурия — это шаровой слой толщиной не более 240 км (приблизительно 0.1 радиуса планеты). Из таблицы видно, что высокая относительная точность моделирования магнитного поля по предварительно обработанным данным достигается при построении региональных (сферических и эллиптических) аппроксимаций в случае залегания носителей на глубине не ниже 30 км и при представлении поля с помощью вихревых S-аппроксимаций, когда токопроводящие плоскости расположены не ниже 550 км. Необходимо отметить, что никакой количественной информацией об источниках магнитного поля Меркурия (равно как и других планет) мы не располагаем. Таким образом, возможны исключительно так называемые [14] метрологические аппроксимации. С целью более детального изучения внутреннего строения планеты необходимо извлечь из «сырых» данных компоненты, соответствующие внутреннему и внешнему магнитным полям, оценить составляющие сигнала, возникающие за счет взаимодействия внутреннего поля с солнечным ветром и т.п. Для решения этой проблемы требуется информация о физических полях вблизи поверхности планеты. При пролетах спут-

ника на высоте 200 км и выше получить надежный результат при инверсии данных нам представляется маловероятным. Однако построение различных математических моделей магнитного поля Меркурия позволяет, на наш взгляд, с большей степенью надежности решать прямые и обратные задачи магнитной гидродинамики, строить гипотезы относительно происхождения указанного поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описывается комбинированная методика построения математических моделей нестационарных физических полей Земли и планет, основанная на применении различных версий метода линейных интегральных представлений. В рамках предложенной методики физические поля восстанавливаются по конечному набору значений элементов в произвольных точках некоторой (не обязательно регулярной) сети наблюдений. В отличие от разработанного авторами ранее алгоритма создания зависящих от времени математических моделей полей, описанный в статье подход позволяет учесть дополнительные условия, которым должны удовлетворять исследуемые нестационарные поля. В частности, речь идет о взаимозависимых векторных полях, фигурирующих в основных уравнениях магнитной гидродинамики: поле скоростей заряженных частиц и магнитном поле. Для каждого из таких полей может быть построена соответствующая аппроксимация. Система дифференциальных уравнений в частных производных, связывающая эти поля, выступает в роли дополнительных требований, которые предъявляются к аналитической модели поля.

Таким образом, вместо краевых задач (как в «непрерывной», так и в конечно-разностной постановке) мы имеем «классическую» задачу в стиле метода интегральных представлений: по известному (конечному) набору одних функционалов найти другие линейные функционалы. Дополнительные условия в виде дифференциальных уравнений в частных производных — это тоже известные функционалы, которые могут быть как линейными, так и нелинейными.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные рекомендации и внимание к работе.

Работа выполнена в рамках при финансовой поддержке РФФИ (грант № 23-41-0002).

- [1] Степанова И.Э., Щепетиллов А.В., Михайлов П.С. // *Физика Земли*. Издательство РАН (Москва). № 2. 20 (2023).
 [2] Acuna M., Connerney J., Ness N. et al. // *Science*. 284. 790 (1999).
 [3] Arkani-Hamed J. // *J. of Geophys. Res. (Planets)*.

107. 5083. (2002).
 [4] Portniaguine O., Zhdanov M. // *Geophysics*. 64. 874 (1999).
 [5] Portniaguine O., Zhdanov M. // *Geophysics*. 67. 1532 (2002).
 [6] Михайлов В.О., Тимошкина Е.П., Киселева Е.А. и

- др. // *Физика Земли. Изд-во. Наука. № 5. 53 (2019).*
- [7] Долгаль А.С., Симанов А.А., Хохлова В.В. // *Георесурсы. 2, № 4 (63). 56 (2015).*
- [8] Долгаль А.С., Бычков С.Г. Оценка различий аномалий силы тяжести для плоской и сферической моделей земли. // *Международная конференция «Десятые научные чтения Ю.П., Булашевича». Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Екатеринбург. 2017. С. 169-173.*
- [9] Uieda L., Barbosa V.C.F., Braitenberg C. *Tesseroids. // Geophysics. 81, N 5. F41 (2015).*
- [10] Schattner U., Segev A., Mikhailov V. et al. // *Pure Appl. Geophys. 176. 4383 (2019).*
- [11] Wang Y., Lukyanenko D., Yagola A. // *Inverse Problems Imaging. 13. 745 (2019).*
- [12] Wang Y., Kolotov I., Lukyanenko D., Yagola A. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics. 60. 1000 (2020).*
- [13] Владимирцов В.В. // *Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.*
- [14] Gudkova T., Stepanova I., Batov A., Shchepetilov A. // *Inverse Problems in Science and Engineering. 29. 790 (2021).*
- [15] Gudkova T., Stepanova I., Batov A. // *Solar System Research. 54. 15 (2020).*
- [16] Salnikov A.M., Batov A.V., Gudkova T.V., Stepanova I.E. Analysis of the magnetic field data of Mars // *The Eleventh Moscow Solar System Symposium (11M-S3), Moscow, Russia, October 5-9, 2020.*
- [17] Степанова И.Э., Ягола А.Г., Лукьяненко Д.В., Колотов И.И. // *Физика земли. № 3. 129 (2024).*
- [18] Арнольд В.И., Хесин Б.А. // *Топологические методы в гидродинамике. М.: Изд-во «МЦНМО», 2007. 393 с.*
- [19] Wang Y., Leonov A., Lukyanenko D., Yagola A. // *CSIAM Transaction on Applied Mathematics. 1. 53 (2020).*
- [20] Шимбурев Б.П. Теория фигуры Земли. М.: Недра, 1975. 432 с.
- [21] Langlais B., Purucker M.E., Manda M. // *J. Geophys. Res. 109. E02008 (2004).*
- [22] Whaler K.A., Purucker M.E. // *J. Geophys. Res. 110. E09001 (2005).*
- [23] Oliveira J.S., Langlais B., Pais M.A., Amit H. // *Journal of Geophysical Research Planets. 120. 1075 (2015).*
- [24] Toepfer S., Narita Y., Glassmeier K.H. et al. // *Earth Planets Space. 73. 65 (2021).*

Analytical models of the nonstationary planet's physical fields in the local version

A.G. Yagola¹, I.E. Stepanova^{2,a}, A.N. Levashov^{1,b}, I.I. Kolotov¹, A.V. Gorbachev¹

¹Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia

²Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences
Moscow, 123995, Russia

E-mail: ^atet@ifz.ru, ^blevashov.an16@physics.msu.ru

The local versions of the linear integral representation method proposed is implemented for mathematical modeling of anomalous time-dependent field data. Variational settings of coefficient inverse problems for two nonlinear differential equation systems appearing in the magnetic hydrodynamics are described. Uniqueness theorem for the solution of the inverse coefficient problem relating to the charged magnetic liquid is formulated.

PACS: 02.30.Em, 02.30.Zz.

Keywords: gravitational field, magnetic hydrodynamics, Green function, linear integral representations.

Received 20 February 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin. 2025. 80, No. . Pp. .*

Сведения об авторах

1. Ягола Анатолий Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, профессор.
2. Степанова Инна Эдуардовна — доктор физ.-мат. наук, профессор РАН, гл. науч. сотрудник ИФЗ РАН; e-mail: tet@ifz.ru.
3. Левашов Андрей Николаевич — аспирант; e-mail: levashov.an16@physics.msu.ru.
4. Колотов Игорь Иванович — канд. физ.-мат. наук, аспирант; e-mail: corners@list.ru.
5. Горбачев Александр Викторович — аспирант; e-mail: gorbachev.av17@physics.msu.ru.