

Тормозное гравитационное излучение при столкновении ультрарелятивистских зарядов в пятимерной модели ADD

Ю. В. Грац,^{1,*} П. А. Спирин^{1,†}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 23.03.2025; после доработки 02.04.2025; подписана в печать 03.04.2025)

В рамках пятимерной модели пространства-времени ADD с радиусом компактификации R рассматривается классическое тормозное гравитационное излучение, возникающее при столкновении двух ультрарелятивистских зарядов с лоренц-фактором γ и прицельным параметром b . По теории возмущений в главном по γ порядке вычисляется полная излученная энергия, а также спектрально-угловые и поляризационные характеристики. Для излучения характерна концентрация излучения в конусе с углом раствора порядка $1/\gamma$, при этом основной вклад в излучение вносят частоты порядка γ^2/b . Среднее число калуца-клейновских мод, задействованных в излучении, по порядку равно $\gamma R/b$.

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf УДК: 53.05, 53.02

Ключевые слова: дополнительные измерения, калуца-клейновские моды, поляризации, модель ADD, балк, тормозное излучение.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.80.2530107

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что электромагнитное излучение $E_{\text{ем}}$ при взаимодействии зарядов во много раз интенсивнее гравитационного $E_{\text{гр}}$ за счет значений констант связи, поэтому задача тормозного гравитационного излучения носила, в основном, чисто теоретический характер. Однако гравитационно-волновая астрономия, сделавшая прорыв в последнее десятилетие, заставляет обратиться и к старым теоретическим задачам. В частности, таковыми являются задачи гравитационного излучения от электродинамических систем [1], например, классическое тормозное гравитационное излучение зарядов. Задачи классического тормозного излучения при различных взаимодействиях посредством полей целого спина рассматривались Петерсом [2, 3] в координатном представлении, Гальцовым, Грацем и Матюхиным [1, 4, 5] в импульсном как позволяющем вычислить поляризацию излучения.

Особенностью амплитуды излучения в этой задаче является ее нелокальность. Технически, это обстоятельство делает похожей задачу на обратную задачу вычисления тормозного излучения электромагнитных волн при гравитационном взаимодействии. Такие задачи также рассматривались вышеперечисленными авторами [2, 3, 6–9]. Сравнительно недавно методы вычисления амплитуд классического излучения были продолжены на многомерные модели, и в частности ADD [10–14]. Для нелокальных амплитуд с фейнмановским параметром в обла-

сти характерных частот и углов строилась последовательная теория, позволяющая получать амплитуду излучения методами теории возмущений [12–15].

Сама модель ADD [16–18] была предложена как возможная попытка решения проблемы иерархий наблюдаемых мировых констант связи. Она предполагает, что поля Стандартной модели распространяются только в наблюдаемом пространственно-трехмерном мире (так называемая, «брана» — *brane*), а гравитационное поле «живет» в полном $(4 + d)$ -мерном пространстве-времени (так называемом, «балке» — *bulk*), причем, дополнительные d пространственных измерений компактифицированы. Связь четырехмерной планковской массы m_{pl} с многомерной эффективной планковской массой M_* , а также соответствующая связь ньютоновых констант гравитационного взаимодействия, даются выражениями

$$m_{\text{pl}}^2 = V_d M_*^{d+2}, \quad G_{d+4} = V_d G_4,$$

где V_d — d -мерный объем подпространства дополнительных измерений.

Классическое рассмотрение задачи тормозного излучения при рассеянии с прицельным параметром $b > 0$ предполагает дальние пролеты по сравнению с классическим радиусом заряда: $b \gg r_{\text{cl}} = e^2/m$. С другой стороны, большой компактификационный радиус R позволит перейти к квазинепрерывным модам излучения, для этого требуется

$$r_{\text{cl}} \ll b \ll R.$$

Таким образом, можно ожидать, что в излучении будет задействовано большое число калуца-клейновских мод излучения (их наивная оценка —

* grats@phys.msu.ru

† salotop@list.ru

$N_{\text{КК}} \sim R/b$), что может увеличить четырехмерное соотношение $E_{\text{гр}}/E_{\text{ем}}$.

Существенной особенностью пятого измерения является то, что безмассовый гравитон имеет пять состояний поляризации. Это заставляет пересмотреть и построение векторов поляризации, и в явной форме указать построение самих тензоров.

Используются единицы $\hbar = c = 1$ и сигнатура метрики пространства-времени $+- - - -$. Для заряда используется система единиц Хевисайда–Лоренца. Латинские индексы M, N, \dots пробегают значения $0 \dots 4$ и соответствуют пятимерному пространству-времени, а греческие μ, ν, \dots пробегают значения $0 \dots 3$ и соответствуют четырехмерному $M_{1,3}$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Система двух зарядов в пятимерной модели ADD описывается действием следующего вида:

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{|^5g|} R - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|^4g|} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_{\alpha=p,p'} \int \left(m_\alpha \sqrt{z_\alpha^2} + e_\alpha A_\mu \dot{z}_\alpha^\mu \right) d\tau_\alpha, \quad (1)$$

где G_5 — пятимерная ньютонова константа гравитационного взаимодействия, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, z_α^μ — мировая линия α -го заряда, R — скаляр кривизны.

Варьирование (1) по траекториям (z^μ, z'^μ) , электромагнитному полю (A^μ) и метрике g_{MN} приводит к уравнениям движения зарядов, уравнениям Максвелла и уравнениям Эйнштейна

$$R^{MN} - \frac{1}{2} g^{MN} R = 8\pi G_5 T^{MN}, \quad (2)$$

соответственно, где T^{MN} — полный тензор энергии-импульса, включающий материю

$$T_m^{\mu\nu} = m \int \frac{\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \delta^5(x - z(\tau))}{\sqrt{-g}} d\tau, \quad T_m^{44} = T_m^{4\alpha} = 0$$

(аналогично — для m') и электромагнитное поле.

Гравитационное излучение традиционно рассматривается как волновое возмущение фоновой метрики Минковского, поэтому введем гравитационные возмущения

$$g_{MN} = \eta_{MN} + \varkappa_5 h_{MN}, \\ \psi_{MN} = h_{MN} - \frac{1}{2} \eta_{MN} \eta^{LR} h_{LR},$$

где $\varkappa_5 = \sqrt{16\pi G_5}$.

Метод последовательных приближений. Будем использовать метод итераций, формально представляя все величины как сумму соответствующих порядков,

$$\phi = {}^0\phi + {}^1\phi + {}^2\phi + \dots,$$

где ϕ может быть полями (g_{MN}, A^μ) , источниками (T^{MN}, j^μ) , координатами зарядов (z^μ) , а также их производными. В каждом порядке наложим на электромагнитное поле лоренцеву (${}^{(k)}A^\mu{}_{,\mu} = 0$) калибровку, а на гравитационное поле — калибровку Фока–де Дондера (${}^{(k)}\psi^{MN}{}_{,N} = 0$) относительно плоской метрики.

В нулевом порядке предполагаем пустое плоское пространство и отсутствие полей: ${}^0g_{MN} = \eta_{MN}$, ${}^0h_{MN} = 0$, ${}^0A^\mu = 0$. Тогда оба заряда движутся равномерно ${}^0\dot{z}^\mu = {}^0\dot{z}'^\mu = 0$ с постоянными скоростями ${}^0\dot{z}^\mu \equiv u^\mu$ и ${}^0\dot{z}'^\mu \equiv u'^\mu$. Выберем лабораторную систему отсчета, связанную с зарядом e' : $u'^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Тогда лоренц-фактор движущейся частицы $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \gg 1$ является лоренц-инвариантным параметром столкновения: $\gamma = (uu')$. Направление движения заряда e выберем за ось z , а вектор прицельного параметра b^μ — за ось x :

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v), \quad {}^0z^\mu = u^\mu \tau + b^\mu, \quad b^\mu = (0, b, 0, 0).$$

Вектор токов и механический тензор энергии-импульса частиц строятся по плоскому фону от равномерно движущихся зарядов.

Токи нулевого порядка являются источниками полей (A^μ, ψ_{MN}) первого порядка: соответствующие источники распадаются на сумму по двум частицам, а полевые уравнения являются уравнениями д'Аламбера.

Для последовательного применения итераций мы пренебрегаем самодействием зарядов, считая, что каждая частица движется в поле, рожденном частицей-партнером: для движения в электромагнитном поле тогда имеем

$${}^1\dot{z}_{\text{ем}}^\mu = \frac{e}{m} F'^{\mu\nu} \dot{z}_\nu, \quad {}^1\dot{z}'_{\text{ем}}{}^\mu = \frac{e'}{m'} F^{\mu\nu} \dot{z}'_\nu \quad (3)$$

Двойное интегрирование с начальными условиями ${}^1\dot{z}_{\text{ем}}^\mu(0) = 0$, ${}^1\dot{z}'_{\text{ем}}{}^\mu(0) = 0$ дает решение

$${}^1z_{\text{ем}}^\mu(\tau) = -i \frac{e'e}{(2\pi)^3 m} \int \frac{d^4q}{q_\nu q^\nu (qu)^2} e^{-iqb} \times \\ \times \left(e^{-i(qu)\tau} - 1 + i(qu)\tau \right) \delta(qu') \left[\gamma q^\mu - (qu)u'^\mu \right].$$

Поскольку четырехмерное пространство-время вложено в пятимерное, четырехмерные векторы (u, u', A, z, z') и тензоры можно «поднять» до пятимерных, дополняя пятые компоненты соответствующими нулями (кроме $\eta_{\mu\nu}$). Далее мы будем использовать пятимерные индексы у тензоров.

Поля первого порядка, созданные равномерно движущимися зарядами, не могут приводить к излучению волн. Поэтому обратимся ко второму порядку, где нас будет интересовать только гравитационное решение. Соответственно, для его источника нам достаточно брать электромагнитное поле первого порядка и движение зарядов в нем.

Тогда в приближении слабого поля уравнения Эйнштейна вырождаются в соответствующее уравнение д'Аламбера

$$\square {}^2\psi^{MN} = -j^{MN}(x), \\ j^{MN}(x) \equiv {}^1T^{MN}(x) + {}^1T'^{MN}(x) + \sigma^{MN}(x), \quad (4)$$

где

$${}^1T^{MN}(x) = m \int \left(2 {}^1z^{(M} u^{N)} - u^M u^N ({}^1z \cdot \nabla) \right) \delta^5(x - u\tau - b) d\tau,$$

$$\sigma^{MN}(x) = \left[\delta_\mu^M \delta_\nu^N {}^1F^{\mu\lambda} {}^1F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \eta^{MN} {}^1F_{\lambda\rho} {}^1F^{\lambda\rho} \right] \delta(x^4).$$

Здесь мы пренебрегли гравитационным взаимодействием зарядов как намного более слабым, чем электромагнитное. Это выражается как в пренебрежении влиянием ньютоновых сил на динамику зарядов ${}^1z^M$, так и в пренебрежении влиянием ньютоновых полей первого порядка на определитель метрики.

Источники T и T' мы будем называть локальными, поскольку их носитель сосредоточен на мировых линиях зарядов, а источник σ , содержащий произведение полей F и F' , будет называться нелокальным, соответственно.

Сохранению калибровки для излученной гравитационной волны ψ_{MN} соответствует сохранение ее источника. Легко проверить это утверждение, учитывая, что траектория заряда определяется полем, созданным зарядом-партнером. Опуская все самодействия, получается искомое

$$\partial_N j^{MN}(x) = 0.$$

Поляризации. В предположении квазинепрерывных мод излучения, суммирование по калуца-клейновским модам можно эффективно заменить на интегрирование в области импульсного пространства, дающей доминирующий вклад.

Выраженная через пятимерную ньютонову константу гравитационного взаимодействия G_5 , плотность гравитационного излучения дается известным выражением [13]

$$\frac{dE_{\text{gr}}}{d\omega d\Omega_3} = \frac{G_5}{4\pi^3} \omega^3 \sum_{a=1}^5 |j_{MN}(k) \varepsilon_{(a)}^{MN}| \quad (5)$$

в виде суммы по поляризациям, где $d\Omega_3$ — элемент площади трехмерной единичной сферы S^3 , вложенной в четырехмерное евклидово пространство.

Три вектора поляризации $g_{(1-3)}^M$ и пятимерный волновой вектор k^M взаимно ортогональны. Выберем $g_{(1)}^M$ в ковариантном виде, т.е. построенным по векторам нашей задачи:

$$g_{(1)}^M = N^{-1} \left[(ku) u'^M - (ku') u^M + \left(uu' - \frac{ku}{ku'} \right) k^M \right], \quad (6)$$

где $N^2 = -[(ku')u - (ku)u']^2$ — нормировочная константа.

Назначим очередность пяти декартовых координат $t \prec x \prec y \prec z \prec w$ и выберем третий вектор поляризации $g_{(3)}^M$ в виде

$$g_{(3)}^M = \frac{1}{\sqrt{k_y^2 + k_w^2}} (0, 0, -k_w, 0, k_y)$$

при любой параметризации пятимерного волнового вектора k . Тогда

$$(g_{(3)}k) = (g_{(3)}u) = (g_{(3)}u') = (g_{(3)}b) = 0,$$

поэтому $(g_{(1)}g_{(3)}) = 0$. Второй вектор поляризации выберем в виде

$$g_{(2)}^M = N^{-1} \epsilon^{MNLQR} u_N u'_L k_R g_{(3)Q},$$

поэтому он ортогонален u , u' , k , $g_{(3)}$ и, как следствие, $g_{(1)}$.

В модели с компактифицированным пятым измерением значение k_w квантовано:

$$k_w = n/R, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Направление излучения удобно описывать двумя системами координат: в терминах наблюдаемого трехмерного пространства (на бране) и углами четырехмерной пространственной части пятимерного пространства-времени (балка). Светоподобный волновой 5-вектор параметризован следующим образом:

$$k^M = (k^0, \mathbf{k}, k_w), \quad k^\mu = (k^0, \mathbf{k}), \quad \mathbf{K} = (\mathbf{k}, k_w).$$

В трехмерном пространстве 5-вектор k^M имеет проекцию \mathbf{k} , угловые характеристики которой определяются двумя трехмерными углами на S^2 : трехмерным полярным углом θ , отсчитываемым от направления \mathbf{u} , и азимутальным углом φ , отсчитываемым в плоскости xy от направления \mathbf{b} (рис. 1, б). Дополнительный угол «поперечности» α между \mathbf{K} и 3-браной определяется отношением $k_w/|\mathbf{k}|$ (рис. 1, а).

Описание излучения в балк имеет смысл в предположении большого числа калуца-клейновских мод излучения: 5-вектор k^M имеет пространственную часть \mathbf{K} ; угловые характеристики \mathbf{K} выражены через три угла на S^3 : четырехмерный полярный угол ϑ между \mathbf{u} и \mathbf{K} , трехмерный полярный угол ϕ между \mathbf{b} и проекцией \mathbf{K} на подпространство xuw , а также оставшийся азимутальный угол χ в плоскости yw (рис. 1, в).

Справедливы следующие соотношения между частотой $\omega = |\mathbf{K}|$ и введенными углами (рис. 1, а):

$$|\mathbf{k}| = \omega \cos \alpha \quad \cos \vartheta = \cos \theta \cos \alpha,$$

$$\sin \vartheta \cos \phi = \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha.$$

Тогда нормировочный множитель равен $N = \gamma v \sin \vartheta (ku')$, и среди скалярных произведений векторов поляризации с векторами задачи не зануляются только следующие три:

$$(g_1 b) = -b \cos \vartheta \cos \phi, \quad (g_1 u) = \gamma v \sin \vartheta,$$

$$(g_2 b) = -b \sin \phi.$$

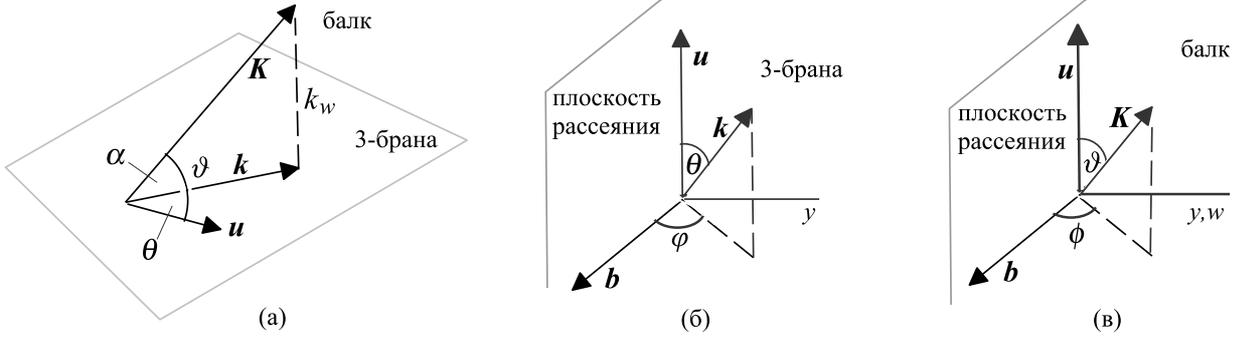


Рис. 1. Углы в лабораторной системе

Из векторов поляризации $g_{(1)}$ и $g_{(2)}$ строим два поляризационных тензора стандартным образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_+^{MN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[g_{(1)}^M g_{(1)}^N - g_{(2)}^M g_{(2)}^N \right], \\ \varepsilon_\times^{MN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[g_{(1)}^M g_{(2)}^N + g_{(2)}^M g_{(1)}^N \right].\end{aligned}\quad (7)$$

С помощью третьего вектора $g_{(3)}$ строим третий тензор поляризации:

$$\varepsilon_\oplus^{MN} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[g_{(1)}^M g_{(1)}^N + g_{(2)}^M g_{(2)}^N - 2g_{(3)}^M g_{(3)}^N \right], \quad (8)$$

а также два оставшихся:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{IV}^{MN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[g_{(1)}^M g_{(3)}^N + g_{(3)}^M g_{(1)}^N \right], \\ \varepsilon_V^{MN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[g_{(2)}^M g_{(3)}^N + g_{(3)}^M g_{(2)}^N \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Ортонормированность системы пяти тензоров поляризации проверяется непосредственно. Все тензоры поляризации бесследовы, поэтому слагаемые источников, содержащие метрику η^{MN} тензорно, могут быть отброшены. Поэтому нелокальный источник имеет эффективный вид

$${}^1\sigma^{MN}(x) = \delta_\mu^M \delta_\nu^N \left[{}^1F^{ML} {}^1F_L^N + {}^1F'^{ML} {}^1F_L^N \right] \delta(w). \quad (10)$$

Наконец, учитывая, что $g_{(3)}$ ортогонален всем векторам задачи, моном $g_{(3)}^M g_{(3)}^N$ в (8) можно отбросить, представив ε_\oplus в эффективной форме:

$$\tilde{\varepsilon}_\oplus^{MN} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[g_{(1)}^M g_{(1)}^N + g_{(2)}^M g_{(2)}^N \right], \quad (11)$$

а поляризации $\varepsilon_{IV, V}$ при свертке с источником j^{MN} полностью зануляются.

2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Амплитуды. Наша задача — вычислить источник j^{MN} , задаваемый (4), в импульсном представлении. В модели ADD электромагнитное поле распространяется только на бране, а гравитационное

может распространяться в балке. Поэтому дополнительных калуца-клейновских мод, связанных со взаимодействием зарядов, не появляется. То есть, пятимерным является только гравитон и его состояния (волновой вектор, векторы поляризации и тензоры поляризации).

Поэтому амплитуды взаимодействия в тензорном виде, выраженные через скалярные произведения пятимерного волнового вектора с векторами задачи (u^M , u'^M и b^M) и сами эти векторы, по сравнению с четырехмерной задачей остаются такими же, поскольку имеют нулевую «балковскую» компоненту. Кроме проекторов на подпространство браны, сами функции для источников, локализованных на бране, связаны с аналогичными пятимерными наличием дельта-функции от пятой координаты:

$${}^{(5)}T^{MN}(x, w) = \delta_\mu^M \delta_\nu^N {}^{(4)}T^{\mu\nu}(x) \delta(w),$$

и то же для σ в эффективной форме (10). Тогда их фурье-образы, представляющие тензорные амплитуды, равны в пяти- и четырехмерной формулировках:

$${}^{(5)}T^{MN}(k, k_w) = \delta_\mu^M \delta_\nu^N {}^{(4)}T^{\mu\nu}(k).$$

Таким образом, достаточно выразить скалярные произведения (ku) , (ku') и (kb) через пятимерные координаты импульсного пространства и заменить в свободных индексах u^μ , u'^μ , $b^\mu \rightarrow u^M$, u'^M , b^M . Тогда эффективные пятимерные тензорные амплитуды излучения равны соответствующим эффективным четырехмерным [23], с соответствующими переобозначениями индексов: локальная и полевая амплитуды равны

$$\begin{aligned}T^{MN}(k) &= -\frac{ee'}{2\pi\gamma} e^{i(kb)} iK_1(z) \times \\ &\quad \times \left[\frac{(kb)}{\gamma z} u^M u^N - \frac{2v}{b} u^{(M} b^{N)} \right], \\ \sigma^{MN}(k) &= -\frac{iv ee' e^{i(kb)}}{2\pi\gamma b} K_1(z) b^{(M} u^{N)}\end{aligned}$$

в значимой для доминирующего вклада в излучение области импульсного пространства, где $z := (ku)b/\gamma v$.

Тогда полная тензорная амплитуда излучения равна

$$j^{MN}(k) = -\frac{ee'}{2\pi\gamma} e^{i(kb)} iK_1(z) \times \left[\frac{(kb)}{\gamma z} u^M u^N - \frac{v}{b} u^{(M} b^{N)} \right]. \quad (12)$$

Вычисляя соответствующие скалярные произведения

$$(ku) = \omega\gamma(1 - v \cos \vartheta), \quad (ku') = \omega, \\ (kb) = -\omega b \sin \vartheta \cos \phi,$$

можно сделать следующие выводы о качественном поведении амплитуд:

1. при проектировании на тензоры поляризации амплитуда T'^{MN} от заряда-мишени гасится полностью;
2. характерный полярный угол излучения: $\vartheta \sim 1/\gamma$ (так называемый, биминг — концентрация излучения в узком конусе вокруг направления быстрого заряда);
3. при учете нелокальной (полевой) амплитуды происходит частичное гашение амплитуды излучения (недеструктивная интерференция);
4. характерная частота излучения: $\omega \sim \gamma^2/b$.

Проектируя на тензоры поляризаций, получим следующие ненулевые поляризационные амплитуды:

$$\begin{pmatrix} j_+ \\ j_\times \\ j_\oplus \end{pmatrix} = \frac{ee'}{2^{3/2}\pi} \sin \vartheta \cos \phi K_1(z) \begin{pmatrix} 1/(\gamma^2\psi) - 1 \\ \text{tg} \phi \\ (1/\gamma^2\psi - 1)/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где введена $\psi = 1 - v \cos \vartheta$ и были опущены фазовые множители, сокращающиеся при последующем квадрировании. Таким образом, амплитуда j_\oplus (присущая именно пятимерному пространству) оказывается в $\sqrt{3}$ раз меньше соответствующей амплитуды j_+ , поэтому дает вклад в излучение ровно в три раза меньший, имея одинаковые спектральные и угловые характеристики.

Характеристики излучения. Подставляя (13) в (5), получим

$$\frac{d}{d\omega d\vartheta d\Omega_2} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\times \\ E_\oplus \\ E_{\text{gr}} \end{pmatrix} = \frac{(ee')^2 G_5}{96\pi^5} \frac{\sin^4 \vartheta}{\gamma^2 \psi^2} \cos^2 \phi \times K_1^2 \left(\frac{\omega b \psi}{v} \right) \omega^3 \begin{pmatrix} 3(\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta) \\ 3\gamma^2 \psi^2 \text{tg}^2 \phi \\ \gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta \\ \gamma^2 \psi^2 (4 + 3 \text{tg}^2 \phi) - 4 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где использовано тождество $2\psi = \gamma^{-2} + \sin^2 \vartheta + \mathcal{O}(\gamma^{-4})$, справедливое при $\vartheta \lesssim \mathcal{O}(1/\gamma)$.

Интегрируя по S^2 (все углы, кроме ϑ), получим частотно-угловое распределение

$$\frac{d}{d\omega d\vartheta} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\times \\ E_\oplus \\ E_{\text{gr}} \end{pmatrix} = \frac{(ee')^2 G_5}{72\pi^4} \frac{\sin^4 \vartheta}{\gamma^2 \psi^2} \times K_1^2 \left(\frac{\omega b \psi}{v} \right) \omega^3 \begin{pmatrix} 3(\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta) \\ 6\gamma^2 \psi^2 \\ \gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta \\ 10\gamma^2 \psi^2 - 4 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

График ϑ -распределения изображен на рис. 2. Он подтверждает, что излучение сконцентрировано в конус вокруг направления быстрого заряда с величиной раствора порядка $\mathcal{O}(1/\gamma)$. При значении угла $\vartheta = \arcsin(1/\gamma)$ (точно) излучение (+, \oplus)-поляризаций полностью подавлено.

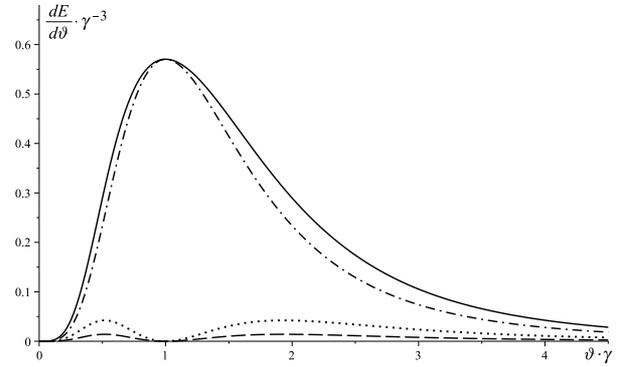


Рис. 2. График ϑ -распределения энергии (в единицах $G_5(ee'/b^2)^2$) для $\gamma = 10^3$: для поляризаций + (пунктирная линия), \times (штрихпунктирная), \oplus (штриховая) и для полной энергии (сплошная)

Интегрируя по частотам [22], получим угловое распределение по полярному углу:

$$\frac{d}{d\vartheta} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\times \\ E_\oplus \\ E_{\text{gr}} \end{pmatrix} = \frac{(ee')^2 G_5}{108\pi^4} \frac{\sin^4 \vartheta}{\gamma^2 b^4 \psi^6} \begin{pmatrix} 3(\gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta) \\ 6\gamma^2 \psi^2 \\ \gamma^2 \psi^2 - \sin^2 \vartheta \\ 10\gamma^2 \psi^2 - 4 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Наконец, интегрируя по ϑ , получим полную энергию на одно столкновение:

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_\times \\ E_\oplus \\ E_{\text{gr}} \end{pmatrix} = \frac{(ee')^2 G_5}{864\pi^3 b^4} \gamma^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ 1 \\ 28 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Таким образом, полная излученная энергия, проходящая на одно столкновение, равна

$$E_{\text{gr}} = \frac{7(ee')^2 G_5}{216\pi^3 b^4} \gamma^3. \quad (18)$$

Соответствующее распределение по поперечному к плоскости рассеяния углу ϕ равно

$$\frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\times \\ E_\oplus \\ E_{\text{gr}} \end{pmatrix} = \frac{(ee')^2 G_5}{576\pi^3 b^4} \gamma^3 \sin\phi \begin{pmatrix} 3 \cos^2\phi \\ 12 \sin^2\phi \\ \cos^2\phi \\ 4 + 8 \sin^2\phi \end{pmatrix}. \quad (19)$$

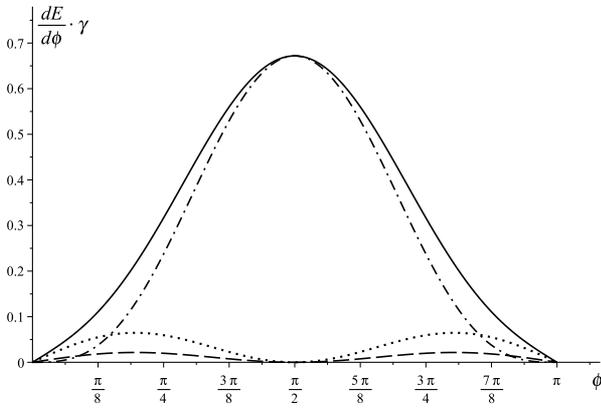


Рис. 3. График ϕ -распределения излучения (в единицах $G_5(ee'/b^2)^2$) для $\gamma = 10^3$: для поляризаций + (пунктирная линия), \times (штрихпунктирная), \oplus (штриховая) и для полной энергии E_{gr} (сплошная)

График ϕ -распределения изображен на рис. 3. Соответственно, в подпространстве, перпендикулярном направлению быстрой частицы, (+, \oplus)-поляризованное излучение распространяется, в основном, вдоль плоскости рассеяния, а \times -поляризованное излучение распространяется поперек плоскости рассеяния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пространстве с одним дополнительным измерением вычислена энергия, выделяемая в виде гра-

витационных волн при столкновении двух зарядов, и спектрально-угловые характеристики излучения.

Выражая пятимерную ньютонову константу через четырехмерную и радиус компактификации пятого измерения R , получим

$$E_{\text{gr}} = \frac{7(ee')^2 G_4 R}{108\pi^2 b^4} \gamma^3 = \frac{112}{27\pi} \frac{\gamma R}{b} E_{4\text{D}},$$

где использован результат [2, 23] для $E_{4\text{D}}$.

Энергия $E_{4\text{D}}$ излучается в брану и соответствует нулевой моде Калуцы – Клейна. Таким образом, эффективное число калуца-клейновских мод, задействованных на излучение в балк, по порядку величины равно

$$N_{\text{КК}} \sim \frac{\gamma R}{b} \gg 1.$$

Соответственно, обосновано квазинепрерывное распределение мод излучения, что технически выразилось в использовании эффективного пространства Минковского $M_{1,4}$ вместо $M_{1,3} \times S^1$. Соответственно, применительно к модели ADD размерности, большей пяти, можно предположить усиление излучения в $(\gamma R/b)^d$ раз по сравнению с четырехмерным результатом.

В выбранном базисе, в излучение дают вклад три из возможных пяти поляризаций. Характерная частота излучения, дающая доминирующий вклад в полную излучаемую энергию, — порядка γ^2/b . Оценивая характерные значения «угла пятимерности излучения» α ,

$$\alpha \sim \arcsin \frac{N_{\text{КК}} R}{\omega} \sim \frac{1}{\gamma}, \quad \cos \alpha \sim 1,$$

закключаем, что распределение излучения относительно наблюдаемого «трехмерного» полярного угла θ в значимой области практически не отличается от искусственно введенного «четырёхмерного» угла ϑ , давая доминирующий вклад в излучение на углах порядка $\theta \sim \vartheta \sim 1/\gamma$.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

[1] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. М.: Издательство МГУ, 1984. 128 с.
 [2] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **7.** 368. (1973).
 [3] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **8.** 4628 (1973).
 [4] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Матюхин А. А. // Известия высших учебных заведений. Физика. № 5. 40 (1980). (Galtsov D. V., Grats Yu. V., Matyukhin A. A. // *Sov. Phys. J.* **23.** 389 (1980)).
 [5] Грац Ю. В. Нелокальные эффекты в теории гравитационного взаимодействия, дисс... д.ф.-м.н., 1995.
 [6] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **5.** 2476 (1972).
 [7] Peters P. C. // *Phys. Rev. D.* **1.** 1559 (1970).
 [8] Matzner R. A., Nutku Y. // *Proc. Roy. Soc. Lond.* **336.**

285 (1974).
 [9] Smarr L. // *Phys. Rev. D.* **15.** 2069 (1977).
 [10] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **0905.** 074 (2009).
 [11] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1005.** 055 (2010).
 [12] Constantinou Y., Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1111.** 118 (2011).
 [13] Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // *JHEP.* **1301.** 087 (2013).
 [14] Constantinou Y., Spirin P. // *JHEP.* **01.** 111 (2014).
 [15] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // *Phys. Lett. B.* **683.** 331 (2010).
 [16] Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G. // *Phys.*

- Lett. B. **429**, 263 (1998).
- [17] *Antoniadis I., Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* // *Phys. Lett. B.* **436**, 257 (1998).
- [18] *Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.* // *Phys. Rev. D.* **59**. 086004 (1999).
- [19] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. 7-е изд. М.: Наука, 1988. Т. 2. 512 с. (*Landau L.D., Lifshitz E.M.* The classical theory of fields. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.)
- [20] *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973. 376 с.
- [21] *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, 1972.
- [22] *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Vol. 1, Elementary Functions, *Gordon & Breach Sci. Publ.*, New York, (1986).
- [23] *Грац Ю.В., Спирич П.А.* // *Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. № 2.* 2520101 (2025).

Gravitational bremsstrahlung under charges' collision in the five-dimensional ADD model

Y. V. Grats^a, P. A. Spirin^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^agrats@phys.msu.ru, ^bsalotop@list.ru

Within the five-dimensional ADD model with compactification radius R , we consider the classical gravitational bremsstrahlung in the collision of two ultra-relativistic charges. The collision is characterized by impact parameter b and the Lorentz-factor γ . With help of the perturbation-theory technique, we compute the total energy, radiated as a gravitational wave, as well as spectral, angular and polarization distributions. The most of radiation is emitted into a beaming cone with linear angle of order $1/\gamma$. The average frequency is of order γ^2/b . The average number of Kaluza–Klein emission modes estimates as $\gamma R/b$.

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf

Keywords: extra dimensions, Kaluza-Klein modes, polarizations, the ADD model, bulk, gravitational bremsstrahlung.

Received 23 March 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin.* 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Грац Юрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.
2. Спирич Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.