

74-я международная конференция по ядерной физике
«ЯДРО-2024: Фундаментальные вопросы и приложения»

Об условиях формирования сверхпроводящих парных корреляций в сферических четно-четных ядрах

В.А. Кузьмин,^{1,*} Т.В. Тетерева^{2,†}

¹Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований. Россия, 141980, Дубна

²Научно-исследовательский институт ядерной физики
им. Д.В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 30.09.2024; после доработки 20.11.2024; подписана в печать 26.11.2024)

В рамках специального преобразования Боголюбова для одинаковых нуклонов рассмотрено возникновение парных корреляций в основном состоянии сферических четно-четных ядер под действием притягивающего монополярного взаимодействия. Показано, что в ядрах с открытой оболочкой сверхпроводящие корреляции существуют при сколь угодно слабом притягивающем взаимодействии. При этом пары нуклонов распределяются по всем оболочкам, участвующим в спаривательном взаимодействии. Подтверждено, что в ядрах с заполненными оболочками парные корреляции сверхпроводящего типа возникают при константах взаимодействия, превышающих некоторое пороговое значение. Для такого порогового значения получены грубые оценки сверху и снизу.

PACS: 21.60.-n, 21.90.+f, 74.20.Fg УДК: 539.142.2, 538.945

Ключевые слова: сферические ядра, оболочечная модель, преобразование Боголюбова.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2530203](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2530203)

ВВЕДЕНИЕ

В докладе обсуждаются два вопроса, возникающих при рассмотрении парных корреляций сверхпроводящего типа в сферических четно-четных ядрах.

В одной из самых первых работ о парных корреляциях сверхпроводящего типа в атомных ядрах [1] было подчеркнуто, что такие корреляции возникают только, если притягивающее спаривательное взаимодействие является достаточно сильным. В простейшем случае, когда все матричные элементы спаривательного взаимодействия предполагаются равными и заменяются константой G , сверхпроводящие корреляции возникают [1, 2] при G таких, что

$$\frac{G}{2} \sum_s \frac{1}{|E_s - \lambda|} > 1. \quad (1)$$

Неравенство является следствием первого из уравнений

$$\frac{G}{2} \sum_s \frac{1}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + C^2}} = 1, \quad (2)$$

$$2 \sum_s v_s^2 = \mathcal{N}, \quad v_s^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_s - \lambda}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + C^2}} \right], \quad (3)$$

при решении которых вычисляются корреляционная функция C и химический потенциал λ . В уравнениях (1)–(3) суммирование ведется по парам дважды вырожденных одночастичных состояний в среднем поле ядра; E_s — энергии одночастичных состояний. Эти состояния связаны друг с другом операцией обращения времени [2]. Через $\mathcal{N}$ обозначено число частиц в системе. Уравнения (2)–(3) применяются для четных $\mathcal{N}$. Если G меньше порогового значения, определяемого неравенством (1), система уравнений (2)–(3) имеет только тривиальные решения, в которых v_s^2 может принимать только два значения — ноль или единица. Трудность состоит в том, что для проверки выполнения неравенства (1) необходимо предварительно вычислить λ или показать, что λ не может при уменьшении G приблизиться к одному из E_s и тем самым заметно увеличить сумму в левой части неравенства (1). Сравнительно недавно важность неравенства (1) была вновь подчеркнута в нескольких статьях сборника [3].

Второй вопрос связан с тем, что среди сферических ядер часто встречаются ядра с частично заполненной оболочкой, например среди четных изотопов олова. В частично заполненной (открытой) оболочке $0 < v_j^2 < 1$, поэтому тривиальное решение невозможно и всегда будут существовать парные корреляции сверхпроводящего типа. Поэтому встает вопрос об условиях, при которых сверхпроводящие корреляции появятся и в остальных оболочках.

* E-mail: kuzmin@theor.jinr.ru

† E-mail: tetereva@msu.dubna.ru

Для ответа на эти вопросы в данной работе уравнения теории парных корреляций приводятся к виду, удобному для анализа решений при малых константах взаимодействия. В частности, мы избегаем использования операций умножения или деления на величины, которые могут обратиться в ноль.

$$H = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} E_k a_{k,m_k}^\dagger a_{k,m_k} - \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^{\mathcal{M}} G_{k,l} \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} (-1)^{j_k-m_k} a_{k,m_k}^\dagger a_{k,-m_k}^\dagger \sum_{m_l=-j_l}^{j_l} (-1)^{j_l-m_l} a_{l,-m_l} a_{l,m_l}.$$

Индексы суммирования k отмечают одночастичные состояния с энергией E_k и угловым моментом j_k , и $m_k (= -j_k, -j_k + 1, \dots, j_k - 1, j_k)$ — значения третьей проекции углового момента. Мы будем называть подболочкой набор из $2j_k + 1$ одночастичных состояний, имеющих одинаковые значения E_k и j_k и различающихся значениями m_k . Через $\mathcal{M}$ обозначено число подболочек, охваченных взаимодействием. Поскольку мы рассматриваем системы одинаковых нуклонов с притягивающим взаимодействием, $G_{k,l} > 0$.

В сферических ядрах набор из $2j_k + 1$ операторов рождения частиц $a_{k,m_k}^\dagger$ образует неприводимый тензорный оператор [5] ранга j_k , поскольку эти операторы при вращении системы координат преобразуются как собственные функции операторов углового момента. Операторы уничтожения a_{k,m_k} преобразуются как операторы $(-1)^{j_k-m_k} a_{k,-m_k}^\dagger$.

Операторы квазичастиц вводим с помощью специального преобразования Боголюбова с вещественными коэффициентами [2]

$$\begin{aligned} a_{k,m_k} &= u_k \alpha_{k,m_k} + (-1)^{j_k-m_k} v_k \alpha_{k,-m_k}^\dagger, \\ a_{k,m_k}^\dagger &= u_k \alpha_{k,m_k}^\dagger + (-1)^{j_k-m_k} v_k \alpha_{k,-m_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Видно, что операторы рождения и уничтожения квазичастиц преобразуются также как соответствующие операторы частиц. Если операторы α_{k,m_k} и $\alpha_{k,m_k}^\dagger$ есть операторы уничтожения и рождения фермионов, то коэффициенты u_k и v_k должны подчиняться условиям

$$u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (5)$$

Состояние квазичастичного вакуума определяется уравнениями

$$\alpha_{k,m_k} |\rangle = 0 \quad \text{для всех } k, m_k.$$

Действуя операторами углового момента на $|\rangle$, получаем

$$J^z |\rangle = 0, \quad (J^x \pm iJ^y) |\rangle = 0.$$

Таким образом, полный угловой момент квазичастичного вакуума равен нулю, если операторы рождения и уничтожения квазичастиц связаны с операторами частиц соотношениями (4). Также легко

1. ГАМИЛЬТониАН. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОГОЛЮБОВА

Гамильтониан для нейтронов (или протонов) в сферически-симметричном ядре выбираем в виде [4]

показать, что в этом случае четность $|\rangle$ положительна. Поэтому произведение нейтронных и протонных вакуумных состояний имеет нулевой угловой момент и положительную четность, то есть значения, которые совпадают с угловыми моментом и четностью основных состояний всех сферических чётно-чётных ядер.

В качестве приближенной волновой функции основного состояния системы одинаковых фермионов (нейтронов или протонов), содержащей четное число частиц, $\mathcal{N}$, мы рассматриваем соответствующее вакуумное состояние $|\rangle$.

Вакуум квазичастиц связан с вакуумом нуклонов одного типа (или нейтронов, или протонов) уравнением [2]:

$$|\rangle = \prod_{k,m_k>0} \left(u_k + (-1)^{j_k-m_k} v_k a_{k,m_k}^\dagger a_{k,-m_k}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (6)$$

Вакуум квазичастиц содержит компоненты с разным числом пар частиц, если хотя бы для одного k коэффициенты u_k и v_k одновременно отличны от нуля. Дисперсия числа частиц и среднее число частиц в состоянии $|\rangle$ равны:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \langle |N^2| \rangle - \langle |N| \rangle^2 = \\ &= 2 \sum_k (2j_k + 1) u_k^2 v_k^2 = 4 \sum_k S_k u_k^2 v_k^2, \\ \mathcal{N} &= \langle |N| \rangle = \langle | \sum_{k,m_k} a_{k,m_k}^\dagger a_{k,m_k} | \rangle = \\ &= \sum_k (2j_k + 1) v_k^2 = 2 \sum_k S_k v_k^2, \end{aligned}$$

где $S_k = j_k + \frac{1}{2}$.

2. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Коэффициенты преобразования Боголюбова (4) вычисляются с помощью вариационного принципа, в котором учитывают условие сохранения числа частиц в среднем:

$$\delta \left\{ \langle |H| \rangle - \lambda \left[\langle | \sum_{k,m_k} a_{k,m_k}^\dagger a_{k,m_k} | \rangle - \mathcal{N} \right] \right\} = 0. \quad (7)$$

Легко видеть, что учет условия сохранения числа частиц сводится к замене гамильтониана H опера-

тором $H' = H - \lambda \sum_{k,m_k} a_{k,m_k}^\dagger a_{k,m_k}$, среднее значение которого по квазичастичному вакууму равно

$$\begin{aligned} \langle |H'| \rangle &= 2 \sum_k S_k (E_k - \lambda) v_k^2 - \sum_k G_{k,k} S_k v_k^4 - \sum_{k,l} G_{k,l} S_k u_k v_k S_l u_l v_l = \\ &= 2 \sum_k S_k (E_k - \lambda) w_k - \sum_k G_{k,k} S_k w_k^2 - \sum_{k,l} G_{k,l} S_k t_k S_l t_l. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты преобразования (4) входят в $\langle |H'| \rangle$ только в виде произведений v_k^2 и $u_k v_k$. Выберем эти произведения в качестве новых неизвестных:

$$\begin{aligned} w_k &= v_k^2 = \langle |a_{k,m_k}^\dagger a_{k,m_k}| \rangle, \quad (0 \leq w_k \leq 1), \quad \text{и} \\ t_k &= u_k v_k = (-1)^{j_k - m_k} \langle |a_{k,-m_k} a_{k,m_k}| \rangle, \quad (0 \leq t_k \leq \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

которые часто называют нормальными и аномальными плотностями. Условие (5) приводит к тому, что плотности оказываются связанными между собой:

$$w_k^2 + t_k^2 = w_k.$$

Чтобы упростить эти соотношения, сделаем подста-

новку

$$w_k = \xi_k + \frac{1}{2}, \quad (-1/2 \leq \xi_k \leq 1/2)$$

и получим уравнение

$$\xi_k^2 + t_k^2 = \frac{1}{4}, \quad (9)$$

которое легко решается с помощью тригонометрических функций

$$\xi_k = \frac{1}{2} \cos \varphi_k, \quad t_k = \frac{1}{2} \sin \varphi_k, \quad \text{при } 0 \leq \varphi_k \leq \pi.$$

Среднее (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle |H'| \rangle &= \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} S_k \left(E_k - \lambda - \frac{1}{4} G_{k,k} \right) + \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} S_k \left(E_k - \frac{1}{2} G_{k,k} - \lambda \right) \cos \varphi_k - \\ &- \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} G_{k,k} S_k \cos^2 \varphi_k - \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^{\mathcal{M}} G_{k,l} S_k \sin \varphi_k S_l \sin \varphi_l. \end{aligned}$$

Среднее $\langle |H'| \rangle$ может достигать экстремума или на границах области изменения φ_k

$$\begin{aligned} \varphi_k = 0 : \quad & \xi_k = \frac{1}{2}, w_k = 1, t_k = 0; \\ \varphi_k = \pi : \quad & \xi_k = -\frac{1}{2}, w_k = 0, t_k = 0, \end{aligned}$$

или в тех точках внутри области изменения, в которых производная обращается в ноль, т.е. в корнях уравнения

$$\frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial \varphi_k} = 0.$$

Корни уравнения и соответствующие им плотности удовлетворяют неравенствам $0 < \varphi_k < \pi$, $0 < w_k < 1$, и $t_k > 0$. Уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \left(E_k - \frac{G_{k,k}}{2} - \lambda \right) \sin \varphi_k - G_{k,k} \frac{\cos \varphi_k}{2} \sin \varphi_k + \\ + \sum_l G_{k,l} S_l \sin \varphi_l \frac{\cos \varphi_k}{2} = 0 \end{aligned}$$

или, возвращаясь к плотностям в качестве неизвестных,

$$\left(E_k - \frac{G_{k,k}}{2} - \lambda \right) t_k - G_{k,k} \xi_k t_k + \left(\sum_l G_{k,l} S_l t_l \right) \xi_k = 0.$$

Химический потенциал λ вычисляется с помощью условия о среднем числе частиц.

3. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ЧАСТИЦ

Пронумеруем подболочки в порядке возрастания их энергий так, чтобы

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{\mathcal{M}}.$$

Тогда в основном состоянии модели независимых частиц нуклоны будут распределены по подболочкам так, что

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^F 2S_k - 2P_F,$$

здесь F — номер последней подболочки, на которой еще есть частицы, и P_F равно числу пар частиц,

которые необходимо добавить в систему, чтобы полностью заполнить подболочку F . Если $P_F = 0$, мы будем говорить о системе с замкнутыми подболочками. Если $P_F > 0$, то будем называть систему системой с открытой подболочкой. При этом P_F удовлетворяет неравенству $0 < P_F < S_F$.

Собирая вместе выражения для числа частиц, получаем

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} 2S_k w_k = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} S_k + 2 \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} S_k \xi_k = \sum_{k=1}^F 2S_k - 2P_F$$

или

$$\sum_{k=1}^{F-1} S_k \left(\xi_k - \frac{1}{2} \right) + S_F \left(\xi_F - \frac{1}{2} + p_F \right) + \sum_{k=F+1}^{\mathcal{M}} S_k \left(\xi_k + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (10)$$

Здесь $p_F = \frac{P_F}{S_F}$. Последнее равенство упростим пе-

реходом к новым неизвестным δ_k так, чтобы

$$\xi_k = \begin{cases} \frac{1}{2} - \delta_k, & 1 \leq k < F; \\ \frac{1}{2} - p_F - \delta_F, & k = F; \\ -\frac{1}{2} + \delta_k, & F < k \leq \mathcal{M}. \end{cases}$$

После чего уравнение (10) переходит в

$$\sum_{k=1}^F S_k \delta_k = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l \delta_l. \quad (11)$$

Учитывая, что для всех k должно выполняться $-1/2 \leq \xi_k \leq 1/2$, получаем

$$0 < \delta_k < 1, \quad k \neq F; \\ -p_F < \delta_F < 1 - p_F.$$

Исходя из (9), получаем выражения для аномальных плотностей как функций δ_k :

$$t_k = \begin{cases} \sqrt{\delta_k(1-\delta_k)}, & k \neq F; \\ \sqrt{(p_F + \delta_F)(1-p_F-\delta_F)}, & k = F. \end{cases} \quad (12)$$

В результате приходим к точной системе уравнений относительно неизвестных λ и δ_k ($k = 1, \dots, \mathcal{M}$):

$$\begin{cases} [E_k - G_{k,k}(1-\delta_k) - \lambda] t_k + C_k \left(\frac{1}{2} - \delta_k \right) = 0, & 1 \leq k < F; \\ [E_F - G_{F,F}(1-p_F-\delta_F) - \lambda] t_F + C_F \left(\frac{1}{2} - p_F - \delta_F \right) = 0, & k = F; \\ [E_l - G_{l,l}\delta_l - \lambda] t_l - C_l \left(\frac{1}{2} - \delta_l \right) = 0, & F < l \leq \mathcal{M}; \end{cases}$$

$$C_k = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} G_{k,m} S_m t_m; \quad \sum_{k=1}^F S_k \delta_k = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l \delta_l.$$

Далее мы по отдельности рассмотрим условия возникновения парных корреляций сверхпроводящего типа в системах с открытой и с замкнутыми подболочками.

4. СИСТЕМА С ОТКРЫТОЙ ПОДОВОЛОЧКОЙ, $p_F > 0$

В системах с открытой подболочкой тривиальное решение, при котором все w_k равны либо единице, либо нулю, несовместимо с условием сохранения числа частиц. В подболочке F нормальная плотность меньше единицы. Аномальная плотность в подболочке F равна

$$t_F = \sqrt{p_F(1-p_F)} + \frac{1}{2} \frac{1-2p_F}{\sqrt{p_F(1-p_F)}} \delta_F + o(\delta_F)$$

и положительна при нулевом δ_F . В этом уравнении символом $o(x)$ обозначены такие функции от x ,

что $\frac{o(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Необходимо выяснить при каких $G_{k,l}$ аномальные плотности в остальных подболочках будут больше нуля. В момент возникновения парных корреляций $t_k, k \neq F$ будут бесконечно малыми положительными числами, т.е. и $\delta_k, k \neq F$ тоже должны быть бесконечно малыми положительными числами, и

$$t_k = \sqrt{\delta_k} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_k + o(\delta_k) \right), \quad k \neq F.$$

Условие сохранения числа частиц запишем в виде

$$S_F \delta_F = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l \delta_l - \sum_{k=1}^{F-1} S_k \delta_k,$$

из которого видно, что δ_F есть бесконечно малое число того же порядка малости, как и остальные δ_k .

Следует подчеркнуть, что при $k \neq F$ выполняется неравенство $0 < \delta_k < \sqrt{\delta_k}$, поскольку $0 < \delta_k < 1$,

и поэтому разложение входящих в уравнения величин следует производить по $\sqrt{\delta_k}$, а не по δ_k . В нулевом и в первом порядках по $\sqrt{\delta_k}$ получаем (отметим, что δ_F есть величина второго порядка малости по $\sqrt{\delta_k}$):

$$\begin{aligned} t_k &\approx \sqrt{\delta_k}, & \xi_k &\approx \frac{1}{2}, & 1 \leq k < F; \\ t_F &\approx \sqrt{p_F(1-p_F)}, & \xi_F &\approx \frac{1}{2} - p_F, & k = F; \end{aligned}$$

$$t_l \approx \sqrt{\delta_l}, \quad \xi_l \approx -\frac{1}{2}, \quad F < l \leq \mathcal{M},$$

$$C_k = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} G_{k,m} S_m t_m \approx G_{k,F} S_F t_F.$$

Подставляем эти приближенные выражения в точную систему уравнений и получаем неоднородную систему линейных уравнений с неизвестными λ и t_k (для $k \neq F$):

$$\begin{cases} [E_F - (1-p_F)G_{F,F} - \lambda]t_F + \left(\frac{1}{2} - p_F\right)G_{F,F}S_F t_F = 0, & k = F; \\ [E_k - G_{k,k} - \lambda]t_k + \frac{1}{2}G_{k,F}S_F t_F = 0, & 1 \leq k < F; \\ [E_l - \lambda]t_l - \frac{1}{2}G_{l,F}S_F t_F = 0, & F < l \leq \mathcal{M}, \end{cases}$$

решениями которой будут

$$\lambda \approx E_F + \left[\left(\frac{1}{2} - p_F\right)S_F - (1-p_F)\right]G_{F,F};$$

$$t_k \approx \sqrt{\delta_k} \approx \frac{1}{2}S_F \sqrt{p_F(1-p_F)} \frac{G_{k,F}}{E_F - E_k}, \quad 1 \leq k < F;$$

$$t_l \approx \sqrt{\delta_l} \approx \frac{1}{2}S_F \sqrt{p_F(1-p_F)} \frac{G_{l,F}}{E_l - E_F}, \quad F < l \leq \mathcal{M}.$$

Полученные решения показывают, что аномальные плотности t_k ($k \neq F$) будут бесконечно малыми положительными числами при бесконечно малых положительных числах $G_{k,F}$. Аномальные плотности t_k при $k \neq F$ прямо пропорциональны произведению $G_{l,F}t_F$ и обратно пропорциональны абсолютной величине разности одночастичных энергий $E_k - E_F$. Таким образом, в системах, имеющих открытую подоболочку, сверхпроводящие корреляции возникают при сколь угодно слабом притягивающем взаимодействии. Интересно отметить, что при стремлении взаимодействия к нулю дисперсия числа частиц остается строго положитель-

ным числом $\mathcal{V} > 4S_F p_F(1-p_F)$. Факт, что величина $4S_F p_F(1-p_F)$ оказывается нижней границей дисперсии числа частиц в системах с открытой подоболочкой, был выявлен в работе [6] с помощью сочетания качественных рассуждений и анализа результатов численного решения уравнений Боголюбова–де Жена.

5. СИСТЕМА С ЗАМКНУТЫМИ ПОДОВОЛОЧКАМИ, $p_F = 0$

В системе с заполненными подоболочками $p_F = 0$. Соотношения для плотностей принимают вид

$$\xi_k = \begin{cases} \frac{1}{2} - \delta_k, & 1 \leq k \leq F; \\ -\frac{1}{2} + \delta_k, & F < k \leq \mathcal{M}, \end{cases}$$

$$t_k = \sqrt{\delta_k(1-\delta_k)}, \quad 1 \leq k \leq \mathcal{M},$$

и точную систему уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} [E_k - G_{k,k}(1-\delta_k) - \lambda]\sqrt{\delta_k(1-\delta_k)} + C_k\left(\frac{1}{2} - \delta_k\right) = 0, & 1 \leq k \leq F; \\ [E_l - G_{l,l}\delta_l - \lambda]\sqrt{\delta_l(1-\delta_l)} - C_l\left(\frac{1}{2} - \delta_l\right) = 0, & F < l \leq \mathcal{M}; \end{cases}$$

$$C_k = \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} G_{k,m} S_m \sqrt{\delta_m(1-\delta_m)},$$

$$\sum_{k=1}^F S_k \delta_k = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l \delta_l.$$

Легко видеть, что система допускает тривиальное решение $\delta_m = 0$, ($1 \leq m \leq M$) при любых значениях $G_{k,l}$.

Чтобы обсудить условия возникновения парных корреляций, мы сначала рассмотрим систему, содержащую две подоболочки, и затем используем полученные сведения для анализа системы с $M > 2$ подоболочками. При этом мы используем упрощающее предположение о том, что $G_{k,l} = G$ при всех k и l .

5.1. Две подоболочки

В начале предположим, что угловые моменты одночастичных состояний, образующих обе подобо-

лочки, одинаковы, т.е. $S_1 = S_2$ и $\mathcal{N} = 2S_1$. Тогда из условия сохранения числа частиц следует

$$\begin{aligned} S_1 \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) + S_1 \left(\xi_2 + \frac{1}{2} \right) &= 0; \\ \xi_2 &= -\xi_1, \\ t_2 &= \sqrt{\frac{1}{4} - \xi_2^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \xi_1^2} = t_1. \end{aligned}$$

В задаче осталась только одна неизвестная величина ξ_1 , и вводить химический потенциал не нужно. Поэтому вместо оператора H' можно использовать гамильтониан H и говорить о поиске минимума энергии системы:

$$\begin{aligned} \langle |H| \rangle &= 2S_1 E_1 w_1 + 2S_2 E_2 w_2 - G (S_1 w_1^2 + S_2 w_2^2) - G (S_1 t_1 + S_2 t_2)^2 = \\ &= S_1 (E_1 + E_2 - G(S_1 + \frac{1}{2})) + 2S_1 (E_1 - E_2) \xi_1 + 2GS_1 (2S_1 - 1) \xi_1^2. \end{aligned}$$

Чтобы найти точку экстремума $\langle |H| \rangle$, вычислим первую производную по ξ_1 . Значение второй производной определит характер экстремума;

$$\begin{aligned} \frac{d\langle |H| \rangle}{d\xi_1} &= 2S_1 (E_1 - E_2) + 4GS_1 (2S_1 - 1) \xi_1, \\ \frac{d^2\langle |H| \rangle}{d\xi_1^2} &= 4GS_1 (2S_1 - 1). \end{aligned}$$

Приравнявая первую производную нулю, приходим к уравнению

$$\frac{d\langle |H| \rangle}{d\xi_1} = 0,$$

решением которого будет

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \frac{E_2 - E_1}{(2S_1 - 1)G}.$$

Аномальная плотность t_1 будет ненулевым вещественным числом, если $|\xi_1| \leq \frac{1}{2}$, то есть сверхпроводящее состояние может появиться в рассматриваемой системе, если константа взаимодействия превысит по абсолютной величине пороговое значение, $|G| \geq G_{\text{cr}}$, где

$$G_{\text{cr}} = \frac{E_2 - E_1}{2S_1 - 1}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \frac{G_{\text{cr}}}{G}, \quad w_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_{\text{cr}}}{G} \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_{\text{cr}}}{G} \right), \\ t_2 &= t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{G_{\text{cr}}}{G} \right)^2} = \frac{1}{2G} \sqrt{(G - G_{\text{cr}})(G + G_{\text{cr}})}. \end{aligned}$$

Корреляционная функция будет равна

$$C = 2GS_1 t_1 = S_1 \sqrt{(G - G_{\text{cr}})(G + G_{\text{cr}})}.$$

Функцию C невозможно разложить в ряд Тейлора в точке G_{cr} . Дисперсия числа частиц, равная

$$\nu = 2S_1 \left[1 - \left(\frac{G_{\text{cr}}}{G} \right)^2 \right],$$

обращается в ноль в точке $G = G_{\text{cr}}$, плавно растет с ростом G , оставаясь ограниченной сверху при $G \rightarrow \infty$.

Поскольку вторая производная положительна, то найденное решение отвечает минимуму энергии.

Вычисленное нами значение G_{cr} больше критического значения константы взаимодействия, использованного в [7] и равного $\frac{E_2 - E_1}{2S_1}$. Дело в том, что авторы [7] не учитывали влияние спаривательного взаимодействия на энергии одночастичных состояний. В работе [8] численными расчётами показано, что это влияние ослабляет действие спаривательного взаимодействия, в частности уменьшает корреляционную функцию.

Отметим, что при выводе уравнений для системы из двух подоболочек (с $S_2 = S_1$ и $\mathcal{N} = 2S_1$) и их решении мы нигде не использовали положительность константы взаимодействия. Поэтому полученные формулы пригодны и для отталкивающего взаимодействия ($G < 0$). Ради полноты исследования модели мы сопоставили в таблице свойства решений, полученных как для притягивающего, так и для отталкивающего взаимодействий. В частности, в случае отталкивания точка экстремума соответствует максимуму энергии. Переход от решений с $t_1 = 0$ к решению с $t_1 > 0$ приводит к плавному уменьшению энергии системы в случае притяжения и резкому увеличению энергии в случае отталкивания.

Мы подробно рассмотрели задачу о системе из двух подоболочек с $S_1 = S_2$ и $\mathcal{N} = 2S_1$ и показали, что сверхпроводящие парные корреляции могут существовать только при константе взаимодействия,

Таблица. Сравнение характеристик решений с ненулевыми аномальными плотностями в системе из двух подоболочек с $S_2 = S_1$ и $\mathcal{N} = 2S_1$ для притягивающего и отталкивающего взаимодействий. В последней строке множитель $R(S_1) = S_1 (S_1 - \frac{1}{2})$

Взаимодействие	Притяжение ($G > 0$)	Отталкивание ($G < 0$)
$t_1 > 0$, если	$G > G_{\text{cr}}$	$G < -G_{\text{cr}}$
$G_{\text{cr}} =$	$\frac{E_2 - E_1}{2S_1 - 1}$	
Экстремум	Минимум	Максимум
$w_1 =$	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_{\text{cr}}}{G} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_{\text{cr}}}{ G } \right)$
$w_2 =$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_{\text{cr}}}{G} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_{\text{cr}}}{ G } \right)$
$\langle H \rangle_{t_1=0} - \langle H \rangle_{t_1>0} =$	$R(S_1)G \left(1 - \frac{G_{\text{cr}}}{G} \right)^2$	$R(S_1)G \left(1 + \frac{G_{\text{cr}}}{ G } \right)^2$

превышающей критическое значение G_{cr} .

Система из двух подоболочек с $S_1 \neq S_2$ и $\mathcal{N} = 2S_1$ изучена в работе [9], где показано, что в такой системе сверхпроводящие корреляции могут возникнуть, только если константа взаимодействия G превышает пороговое значение

$$G_{\text{cr}}(S_1, S_2) = \frac{E_2 - E_1}{\frac{1}{2} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 - 1}. \quad (13)$$

Используем это значение для анализа системы с бóльшим числом подоболочек.

5.2. $\mathcal{M}$ подоболочек

В системе с замкнутыми подоболочками выполняется равенство

$$2 \sum_{k=1}^F S_k = \mathcal{N}.$$

При этом $F < \mathcal{M}$. Предположим на время, что у подоболочек с номерами k при $1 \leq k < F - 1$ энергии $E_k = E_F$ и у подоболочек с номерами l при $F + 1 < l \leq \mathcal{M}$ энергии $E_l = E_{F+1}$. Тогда мы получаем систему из двух подоболочек с

$$\tilde{S}_F = \sum_{k=1}^F S_k \quad \text{и} \quad \tilde{S}_{F+1} = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l$$

и энергиями E_F и E_{F+1} соответственно. Как было сказано выше, в такой системе парные корреляции сверхпроводящего типа могут появиться только если $G > G'_{\text{cr}}$,

$$G'_{\text{cr}} = \frac{E_{F+1} - E_F}{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\tilde{S}_F} + \sqrt{\tilde{S}_{F+1}} \right)^2 - 1}.$$

Из уравнения (6) видно, что при формировании сверхпроводящих корреляций взаимодействие переносит с некоторыми амплитудами пары частиц из полностью занятых подоболочек в полностью свободные подоболочки. Разность энергий $E_{F+1} - E_F$ есть наименьшая из энергий переходов между занятыми и свободными подоболочками. Поэтому величина G'_{cr} служит лишь нижней границей для критического значения константы взаимодействия в системе с исходными энергиями подоболочек (т.е. с $E_1 < E_2 < \dots < E_{\mathcal{M}}$). Обозначим это критическое значение через $G_{\text{cr}}^{\mathcal{M}_{\text{subshells}}}$.

С другой стороны, величина

$$G''_{\text{cr}} = \frac{E_{F+1} - E_F}{\frac{1}{2} \left(\sqrt{S_F} + \sqrt{S_{F+1}} \right)^2 - 1}$$

есть критическое значение G в системе, содержащей одну полностью заполненную подоболочку (F) и одну полностью свободную подоболочку ($F + 1$). При этом пренебрегается влиянием всех остальных подоболочек в системе и учитывается притягивающее взаимодействие только между сравнительно небольшой частью нуклонов. Поэтому величина G''_{cr} служит верхней границей для критической константы $G_{\text{cr}}^{\mathcal{M}_{\text{subshells}}}$. В итоге получаем неравенство

$$G'_{\text{cr}} \leq G_{\text{cr}}^{\mathcal{M}_{\text{subshells}}} \leq G''_{\text{cr}}.$$

Таким образом, если $G < G'_{\text{cr}}$, то в системе с замкнутыми подоболочками существуют только нормальные решения и при $G > G''_{\text{cr}}$ в системе гарантированно могут появиться парные корреляции сверхпроводящего типа. Подчеркнем, что для вычисления G'_{cr} и G''_{cr} используются только исходные параметры гамильтониана и число частиц в системе и поэтому, в отличие от неравенства (1), не требуется предварительная оценка химического потенциала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В четно-четных сферических ядрах формирование парных корреляций сверхпроводящего типа между нуклонами одного типа зависит от числа частиц и от оболочечной структуры.

В ядрах с открытыми подоболочками парные корреляции существуют даже при произвольно малых положительных матричных элементах оператора взаимодействия. Аномальные плотности отличны от нуля на каждой подоболочке, охваченной спаривательным взаимодействием. Решения с нулевыми аномальными плотностями нет.

В ядрах с замкнутыми подоболочками сверхпроводящие парные корреляции возникают, если притягивающая константа взаимодействия превышает определенное критическое значение G_{cr} , которое зависит от оболочечной структуры и числа частиц в системе. Если константа взаимодействия меньше G_{cr} , система уравнений имеет только нормальное решение. Если G превышает G_{cr} , то существуют и нормальное, и сверхпроводящее решения. Для критического значения G_{cr} получены грубые оценки сверху и снизу. Для модели, содержащей две подоболочки с равными угловыми моментами, вычислена разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний.

- [1] Belyaev S.T. // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **31**. N 11. (1959).
- [2] Соловьев В.Г. Теория сложных ядер, М., 1971. Наука, ГРФМЛ. (Soloviev V.G. Theory of Complex Nuclei, Pergamon Press, 1976.)
- [3] Fifty Years of Nuclear BCS: Pairing in Finite Systems. Ed.: Broglia R.A. and Zelevinsky V.: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
- [4] Volya A., Brown B.A., Zelevinsky V. // Phys. Lett. B. **509**. 37 (2001).
- [5] Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Ленинград: Наука, Ленинградское отделение, 1975. (Varshalovich D.A., Moskalov A.N., Khersonskii V.K. Quantum theory of angular momentum. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1988).
- [6] Duguet T., Bally B., Tichai A. // Phys. Rev. C. **102**. 054320 (2020).
- [7] Власников А. К., Лунев А. В., Михайлов В. М. // Изв. РАН. Сер. Физ. **77**. 967 (2013). (Vlasnikov A.K., Lunev A.V., Mikhajlov V.M. // Bull. RAS. Phys. **77**. 880 (2013)).
- [8] Кузьмин В.А., Тетерева Т.В. // ЯФ. **75**. 860 (2012). (Kuz'min V.A., Tetereva T.V. // Phys. At. Nucl. **75**. 805. (2012)).
- [9] Кузьмин В.А., Тетерева Т.В. // Письма в ЭЧАЯ. **21**. 978 (2024). (Kuz'min V.A., Tetereva T.V. // Phys. Part. Nucl. Lett. **21**. 1004 (2024)).

The conditions for the formation of superconducting pair correlations in spherical even-even nuclei

V.A. Kuz'min^{1,a}, T.V. Tetereva^{2,b}

¹Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research
Dubna, Moscow region, 141980, Russia

²Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow, 119991, Russia

E-mail: ^akuzmin@theor.jinr.ru, ^btetereva@msu.dubna.ru

The formation of superconducting pair correlations between like nucleons in the ground state of spherical even-even nuclei is considered within a special Bogoliubov transformation. The influence of the monopole pairing interaction on the energy of single-particle states is taken into account. It is shown that the appearance of pair correlations depends on the particle number and shell structure. In open subshell nuclei the correlations exist at any attractive monopole interaction and nucleon pairs are distributed over all subshells participating in the pairing interaction. It is confirmed that the superconducting pair correlations appear if the coupling constant exceeds a certain threshold value. Rough upper and lower estimates are obtained for the threshold value.

PACS: 21.60.-n, 21.90.+f, 74.20.Fg.

Keywords: nuclear Many-body theory, BCS theory.

Received 30 September 2024.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Кузьмин Владимир Александрович — доктор физ.-мат. наук, ст. научн. сотрудник;
e-mail: kuzmin@theor.jinr.ru.
2. Тетерева Татьяна Всеволодовна — канд. физ.-мат. наук, зам. директора по научной работе;
e-mail: tetereva@msu.dubna.ru.