XII семинар Д.Н. Клышко. Квантовая оптика

Ангармонический квантовый осциллятор как модель резонансной оптики

А.М. Башаров[1,*]

[1] *НИЦ «Курчатовский институт»*

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1

(Поступила в редакцию 24.12.2024; после доработки 17.01.2025; подписана в печать 06.03.2025)

Подчеркнуты особенности теории резонансных взаимодействий электромагнитных когерентных полей с ангармоническим осциллятором по сравнению со случаем многоуровнего атома. Показано, что в рамках локального подхода — алгебраической резонансной теории возмущений — удается учесть требования глобального подхода теории открытых квантовых систем. На основе вспомогательной модели «внутренней нелинейности» ангармонического осциллятора проанализированы возможные условия резонанса когерентной волны с ангармоническим осциллятором с поглощением одного фотона.

PACS: 42.50.Nn УДК: 535.1

Ключевые слова: ангармонический квантовый осциллятор, алгебраическая теория возмущений.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.80.2530404

ВВЕДЕНИЕ

Квантовые осцилляторы служат эффективными моделями различных физических объектов, например электромагнитного поля резонатора, плазмонов квантовой точки и других. Однако системы, описываемые простой моделью гармонического осциллятора, не могут служить основой формирования нелинейно-оптических явлений. Это связано с математическими особенностями моделей, поскольку алгебра операторов гармонического осциллятора разрешима, т. е. в конечном счете повторное коммутирование операторов приведет к нулю [1]. Поэтому в случае взаимодействия гармонического осциллятора с когерентной волной можно обсуждать условие резонанса и динамику осциллятора в резонансном поле когерентной волны, но таких характерных эффектов, сопровождающих резонансное взаимодействие ансамбля квантовых частиц, как обратимая релаксация и обращение времени [2] и фотонные эхо [2], нет [1]. Эффекты типа фотонного эха [3] до сих пор активно разрабатываются в связи с применением в квантовой памяти [4]. Поэтому ситуации, в которых и на ансамблях осцилляторов можно наблюдать специфические нелинейно-оптические эффекты, представляют интерес.

Чтобы обойти ситуацию с разрешимостью алгебры осцилляторов и описывать (и формировать) нелинейные эффекты на гармонических осцилляторах, рассматривают ансамбли гармонических осцилляторов, взаимодействующих с атомными объектами. Так возникают объекты типа атомно-фотонных кластеров, в которых кванты гармонического осциллятора совместно с возбуждениями атомной подсистемы участвуют в формировании эффективной двухуровневой системы, алгебра операторов которых не является разрешимой. В случае использования двухквантовых переходов во вспомогательной атомной системе алгебра эффективного атомно-фотонного кластера является полиномиальной алгеброй третьего порядка [5], что обеспечивает описание всего спектра нелинейно-оптических эффектов. В случае использования атомов как пассивной среды, без инициации реальных атомных переходов, при определенных условиях [5] возможно формирование эффективного фотонного кластера в виде двухуровневой системы, алгебра операторов которой представляет собой операторы двух гармонических осцилляторов, нерезонансно связанных с атомами и внешним электромагнитным когерентным полем. В результате физически реализуется математическое представление Йордана–Швингера для операторов двухуровневой системы.

Другая возможность формирования нелинейных оптических эффектов на квантовых осцилляторах состоит в использовании ангармонизма реального объекта, описываемого моделью осциллятора. При этом типичны ситуации, когда спектр ангармонического осциллятора является неэквидистантным. Тогда становится возможным выделение (во взаимодействиях с когерентными электромагнитными полями) характерных двухуровневых систем, а также можно говорить о резонансном характере взаимодействия ангармонического осциллятора с внешними электромагнитными полями. Однако здесь ангармонический осциллятор существенно отличается от обычной N уровневой системы атома.

В работе [6] установлено, что при резонансном взаимодействии когерентной волны с ангармоническим осциллятором имеет место своеобразная аналогия оптического однофотонного резонанса с многофотонными резонансами в атомах. Важной особенностью ангармонического осциллятора, отличающего его описание от описания поведения атома

* E-mail: basharov@gmail.com

в поле когерентной волны, состоит в комбинированном использовании локального и глобального подходов теории открытых квантовых систем [7], поскольку исходный гамильтониан ангармонического осциллятора не является диагональным.

В данной работе указанная особенность обсуждена в сравнении со случаем атомной системы в контексте получения необходимых эффективных операторов взаимодействия и дипольного момента. Рассмотрены возможные случаи квантовых резонансных переходов в ангармоническом осцилляторе при поглощении одного фотона из когерентной волны. Особое внимание привлечено к этапам последовательного применения алгебраической резонансной теории возмущений (АРТВ) [3, 7]. В результате применения АРТВ получены эффективные операторы резонансного взаимодействия ангармонического осциллятора в различных условиях резонанса с когерентной волной, что послужит основой для описания широкого класса нелинейно-оптических резонансных явлений в ансамблях ангармонических осцилляторов.

1. ФОРМАЛИЗМ РЕЗОНАНСНОЙ ОПТИКИ ДЛЯ N-УРОВНЕВОЙ ЧАСТИЦЫ

Стандартный подход для рассмотрения n-фотонного резонанса когерентного электромагнитного поля напряженности

$$E_{cl}(t) = \mathcal{E}_{cl} \exp\Big(- i(\omega_{cl} t + \Phi)\Big) + c.c. \qquad (1)$$

(ω_{cl} — несущая частота, $\mathcal{E}_{cl}$ — медленно меняющаяся амплитуда, поле $E_{cl}(t)$ называем также возбуждающим) с квантовой частицей состоит в следующем.

1. Стартуем с исходного гамильтониана квантовой частицы, под которой понимаем изолированную атомную систему

$$H_a = \sum_m E_m |E_m\rangle\langle E_m|,$$

и записываем оператор взаимодействия атомной системы с когерентным полем (1) в электродипольном приближении (d_{mn} — матричный элемент оператора дипольного момента атома)

$$V_{int} = -E_{cl} \sum_{mn} d_{mn} |E_m\rangle\langle E_n|. \qquad (2)$$

Особенностью исходных операторов атомной системы является диагональность атомного гамильтониана H_a. Далее предполагается, что взаимодействие в момент времени $t = 0$ включается адиабатически и записываются стандартные уравнения динамики.

2. С учетом резонансного условия взаимодействия уравнения динамики квантовой частицы в резонансном поле записываются для матрицы плотности ρ эффективной двухуровневой частицы с уровнями энергии E_g и E_e,

$$i\hbar\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \hat\Gamma\Big)\rho = \Big[H^{Eff}, \rho\Big], \quad H^{Eff} = E_g|E_g\rangle\langle E_g| + E_e|E_e\rangle\langle E_e| + V^{Eff}. \qquad (3)$$

Эффективный оператор резонансного взаимодействия V^{Eff} получается путем применения той или иной стандартной техники, адекватной резонансным условиям, например метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [8]. Релаксационный оператор $\hat\Gamma$ либо выводится при учете дополнительных взаимодействий, например с квантованным вакуумным электромагнитным полем, либо вводится феноменологически, однако здесь $\hat\Gamma$ далее не учитываем.

Уравнения для переизлученного поля — классические уравнения Максвелла для медленно меняющихся амплитуд волновых пакетов

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t}\Big)\mathcal{E}' = 4\pi k \mathcal{P}'. \qquad (4)$$

Здесь z — направление распространения переизлученных фотонов, $\mathcal{E}'$ — медленная амплитуда поля переизлученных фотонов (а также рассеянных и фотонов накачки, если есть) на частоте $\omega' = kc'$, c' — скорость света в среде, $\mathcal{P}'$ — медленная амплитуда поляризации на ненулевой частоте [3]. При этом поляризация определяется через эффективный дипольный момент резонансной частицы $Sp(\rho d^{Eff})$.

Условием n-фотонного резонанса ($n = 1, 2$), определяющего эффективные операторы в случае атомов, служат следующие соотношения:

$$\omega_{cl} \approx (E_e - E_g)/\hbar, \omega_{cl}^{(1)} \pm \omega_{cl}^{(2)} \approx (E_e - E_g)/\hbar, \ldots \qquad (5)$$

Здесь $\omega_{cl}^{(j)}$ — несущие частоты двухчастотного возбуждающего поля. Условия (5) дают примеры однофотонного и комбинационного резонансов [3].

Переход к эффективной двухуровневой частице, описываемой эффективными операторами, в сложных резонансах наиболее просто, последовательно и общо осуществляется методами алгебраической резонансной теорией возмущений (АРТВ) [3, 7], которая является обобщением метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского, изложенного применительно к задачам резонансной оптики в книге [8]. Основу АРТВ составляют три этапа.

Этап 1 — унитарное преобразование исходной матрицы плотности $\rho_{ini}(t)$

$$\rho(t) = \exp(-iS(t))\rho_{ini}(t)\exp(iS(t)), S(t) = S^\dagger(t) \qquad (6)$$

и переход от исходного уравнения к уравнению (3) с эффективным гамильтонианом

$$V^{Eff}(t) = \exp(-iS(t))V(t)\exp(iS(t)) - - i\hbar \exp(-iS(t))\frac{\partial}{\partial t}\exp(iS(t)). \qquad (7)$$

Этап 2 — разложение генератора преобразования $S(t)$ и преобразованных операторов в ряды по степеням параметров взаимодействий [3], [7].

Этап 3 состоит в учете резонансных условий требованием присутствия в эффективном гамильтониане системы (операторе взаимодействия $V^{Eff}(t)$) в картине Дирака только медленно меняющихся во времени слагаемых. Операторы, относящиеся к картине Дирака, отмечаем (как использовано выше) явным написанием временного аргумента.

2. СЛУЧАЙ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ОБЩЕМ ФОРМАЛИЗМЕ

В случае ангармонического одномерного осциллятора вблизи основного состояния ангармонизм может быть представлен оператором потенциальной энергии осциллятора вида $\alpha x^3 + \beta x^4$. В терминах алгебры осцилляторов с операторами рождения $c^\dagger$, уничтожения $c^\dagger$ и числа частиц $N = c^\dagger c$ (коммутационные соотношения $\Big[c, c^\dagger\Big] = 1$, $\Big[c, N\Big] = c$, $\Big[c^\dagger, N\Big] = -c^\dagger$) имеем следующий исходный гамильтониан указанного ангармонического осциллятора:

$$H_{osc} = \hbar\Omega_c\Big[c^\dagger c + \alpha(c+c^\dagger)^3 + \beta(c+c^\dagger)^4\Big]. \qquad (8)$$

Возможен также учет следующих порядков нелинейности в рамках развиваемого формализма.

Главным отличием случая ангармонического осциллятора от случая атомов является недиагональность исходного гамильтониана H_{osc}. Поэтому прежде чем говорить об электродипольном взаимодействии ангармонического осциллятора с когерентным полем и рассматривать условия резонансности этого взаимодействия, необходимо исходный гамильтониан диагонализовать. Это так называемый глобальный подход теории открытых квантовых систем [7]. Диагонализацию гамильтониана можно осуществить посредством некоторого унитарного преобразования T, например $TH_{osc}T^\dagger$. При этом также должны быть преобразованы и другие операторы задачи, например матрица плотности, $\rho(t) = T\rho_{osc}T^\dagger$, а также векторы состояний. Диагональный гамильтониан характеризуется неэквидистантностью квантовых уровней.

После диагонализации гамильтониана H_{osc} вводим взаимодействие ангармонического осциллятора с когерентным полем (1) посредством оператора:

$$V_{int} = g\Big(\mathcal{E}_{cl}\exp\Big(-i\omega_{cl}t - i\Phi\Big) + \\ + \mathcal{E}^*_{cl}\exp\Big(i\omega_{cl}t + i\Phi\Big)\Big)(c+c^\dagger). \qquad (9)$$

Предполагаем, что указанный выше переход к новым векторам состояний не повлиял на вид оператора взаимодействия.

Чтобы избавиться от быстроменяющихся во времени слагаемых в (9) в картине Дирака, в АРТВ нужно опять преобразовать уже один раз преобразованную матрицу плотности. Оператор этого унитарного преобразования обозначим как $U(t)$. В итоге имеем в картине Дирака

$$\rho(t) = U(t)T(t)\rho_{osc}T^\dagger(t)U^\dagger(t). \qquad (10)$$

Два последовательных унитарных преобразования $T(t)$ и $U(t)$ снова являются унитарным преобразованием и в рамках АРТВ удобно рассматривать общий генератор $S(t)$ такого преобразования:

$$\rho(t) = \exp(-iS(t))\rho_{osc}\exp(iS(t)). \qquad (11)$$

Таким образом, первый этап применения АРТВ в случае ангармонического осциллятора состоит в применении двух последовательных унитарных преобразований: первое диагонализует гамильтониан изолированного осциллятора, второе приводит к эффективным операторам для соответствующего резонанса.

Генератор двух последовательных преобразований, рассматриваемых как одно преобразование, раскладываем в ряд по степеням имеющихся в задаче взаимодействий. Прежде чем рассматривать эту процедуру, обсудим исходный гамильтониан ангармонического осциллятора (8).

Оператор (8) можно разбить на две составляющие — диагональную $H_{osc-Diag}$ и недиагональную $H_{osc-Non-D}$:

$$H_{osc} = H_{osc-Diag} + H_{osc-Non-D},$$
$$H_{osc-Diag} = \hbar\Omega_c N + W_1, W_1 = \hbar\Omega_c 6\beta\Big(N + N^2\Big),$$
$$H_{osc-Non-D} = W_\alpha + W_\beta,$$
$$W_\alpha = \hbar\alpha\Omega_c\Big((3cN + c^3) + H.c.\Big),$$
$$W_\beta = \hbar\beta\Omega_c\Big((c^4 - 2c^2 + 4c^2N) + H.c.\Big). \qquad (12)$$

Если диагонализовать H_{osc}, предполагая параметры α и β малыми, то к $H_{osc-Diag}$ получим поправки более высокого порядка, чем α и β. Это позволяет рассматривать $H_{osc-Diag}$ в качестве приближения первого порядка по константам α и β диагонального гамильтониана $TH_{osc}T^\dagger$. При этом любопытно наблюдение работы [9]. Если считать параметр нелинейности в диагональных слагаемых исходного гамильтониана независимым от параметров нелинейности недиагональных слагаемых, то, стартуя с нулевого порядка в виде $\hbar\Omega_c N$, все порядки АРТВ по этому параметру нелинейности можно просуммировать. В результате суммирования получаем то же выражение для $H_{osc-Diag}$. Условие резонанса с ангармоническим осциллятором теперь можно формулировать на основе спектра $H_{osc-Diag}$. Заметим, что спектр $H_{osc-Diag}$, в отличие от случая гармонического осциллятора, для рассматриваемого ангармонизма вида $\alpha x^3 + \beta x^4$ характеризуется неэквидистантностью квантовых уровней.

Теперь рассматриваем $H_{osc-Diag}$ как «нулевой» гамильтониан задачи о взаимодействии ангармонического осциллятора с когерентным полем (1), (9), определяющий переход к картине Дирака. В результате задача о резонансе с когерентным полем (1) становится аналогичной случаю атомной системы, в которой, в дополнение к атомной системе, появляются отдельные операторы «внутриатомных» нелинейных взаимодействий, так что начальный гамильтониан всех учтенных взаимодействий, после исключения диагональных слагаемых W_1, в картине Дирака приобретает вид:

$$\begin{gathered} V_{ini}(t) = V_{int}(t) + W_\alpha(t) + W_\beta(t), \\ V_{int}(t) = g\Big(\mathcal{E}_{cl}\exp\Big(-i\omega_{cl}t - i\Phi\Big) + \\ +\mathcal{E}^*_{cl}\exp\Big(i\omega_{cl}t + i\Phi\Big)\Big)(c(t) + c(t)^\dagger), \\ W_\alpha(t) = \hbar\alpha\Omega_c\Big((3c(t)N + c(t)^3) + H.c.\Big), \\ W_\beta(t) = \hbar\beta\Omega_c\Big((c(t)^4 - 2c(t)^2 + 4c(t)^2N) + H.c.\Big), \\ c(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}|E_{n-1}\rangle\langle E_n|e^{i\Omega_{n-1,n}t}, \\ H_{osc-D}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle, \Omega_{m,n} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}, \\ E_n = \hbar\Omega_c\Big[n + 6\beta(n + n^2)\Big]. \end{gathered} \tag{13}$$

Будем рассматривать условие резонанса в виде

$$\omega_{cl} \approx \frac{E_n - E_0}{\hbar}. \tag{14}$$

Здесь в терминах описание резонанса в атомной системе $E_0 = E_g, E_n = E_e$.

Можно также рассмотреть и общий однофотонный резонанс вида $\omega_{cl} \approx \Omega_{n,m}$, предполагая, например, что к заселению уровней привело резонансное взаимодействие с предыдущим ультракоротким импульсом когерентной волны. В ином случае возможное заселение нижнего резонансного энергетического уровня E_m необходимо рассматривать, учитывая процессы, приводящие к равновесному состоянию наравне с диагонализацией исходного гамильтониана ангармонического осциллятора. В этом заключается суть глобального подхода.

Преобразованная матрица плотности (11) удовлетворяет уравнению динамики, аналогичному (3), записанному в картине Дирака:

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \Big[V^{Eff}(t), \rho\Big], \\ V^{Eff}(t) = e^{-iS(t)}V_{ini}(t)e^{iS(t)} - i\hbar e^{-iS(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{iS(t)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Чтобы получить эффективный гамильтониан $V^{Eff}(t)$, отвечающий (14), разложим генератор суммарного унитарного преобразования в ряды по константам связи:

$$\begin{gathered} S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + \\ + S^{(0,0,1)}(t) + S^{(2,0,0)}(t) + \ldots, \end{gathered} \tag{16}$$

Левый верхний индекс в скобке индексов указывает на порядок разложения генератора в ряд по константе взаимодействия с когерентным полем (1). Средний и правый индексы обозначают порядки по константам связи α и β операторов $W_\alpha(t)$ и $W_\beta(t)$ соответственно.

Говоря об эффективном гамильтониане, полученном в результате разложения, аналогичному (16),

$$\begin{gathered} V^{Eff}(t) = V^{(1,0,0)}(t) + V^{(0,1,0)}(t) + \\ + V^{(0,0,1)}(t) + V^{(1,1,0)}(t) + V^{(1,0,1)}(t) + \\ + V^{(0,1,1)}(t) + V^{(2,0,0)}(t) + \ldots, \end{gathered} \tag{17}$$

под собственно эффективным гамильтонианом понимаем лишь конечное число слагаемых ряда (17) и говорим при этом об эффективном гамильтониане соответствующего порядка. Требования АРТВ применительно к ряду (17) означают, что все слагаемые $V^{(i,j,k)}(t)$ медленно меняются во времени.

Отметим простые утверждения о структуре членов ряда (17). Величины $V^{(0,j,k)}(t)$ являются диагональными и отвечают соответствующим слагаемым в разложении диагонального оператора $TH_{osc}T^\dagger$. При этом $V^{(0,1,0)}(t) = V^{(0,0,1)}(t)$, независимо от условия резонанса, т. к. в операторах $W_\alpha(t)$ и $W_\beta(t)$ нет медленно меняющихся во времени слагаемых. В случае резонансов типа $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+1,n}$ имеем $V^{(1,0,0)}(t) \neq 0$. Для резонанса $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+p,n}$, $p > 1$, необходимо требовать выполнения равенства $V^{(1,0,0)}(t) = 0$. Это значит, что при $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+p,n}$, $p > 1$, первыми отличными от нуля слагаемыми ряда (17) будут $V^{(1,1,0)}(t) \neq 0$ и $V^{(1,0,1)}(t) \neq 0$. Указанные равенства и требования определяют вид соответствующих слагаемых $S^{(i,j,k)}(t)$ генератора преобразования и в дальнейшем определяют следующие порядки эффективных операторов. Независимо от условий резонанса, всегда будут отличными от нуля слагаемые $V^{(2,0,0)}(t) \neq 0$, которые представляют собой сдвиги энергетических уровней. Эти слагаемые в случае двухуровневой системы называют сдвигом Блоха–Сигерта [3], а также штарковскими сдвигами уровней [3] при произвольном числе уровней. В случае многоуровневого атома штарковские сдвиги превалируют над сдвигами Блоха–Сигерта, поскольку много уровней многоуровнего атома участвуют в формировании $V^{(2,0,0)}(t)$ [3]. В случае ангармонического осциллятора следует, однако, говорить о сдвигах типа Блоха–Сигерта, поскольку лишь уровни, соседние с резонансными уровнями, дают вклад в $V^{(2,0,0)}(t)$.

Общие факты относительно ряда для эффективного оператора дипольного момента. Разложение (16) приводит выражение для эффективного оператора дипольного момента ангармонического осциллятора $d^{Eff}(t) = e^{-iS(t)}d_{osc}(t)e^{iS(t)}$ к виду

$$\begin{gathered} d^{Eff}(t) \approx d_{osc}(t) - i\Big[S^{(1,0,0)}(t), d_{osc}(t)\Big] - \\ - i\Big[S^{(0,1,0)}(t), d_{osc}(t)\Big] - i\Big[S^{(0,0,1)}(t), d_{osc}(t)\Big]. \end{gathered} \tag{18}$$

При этом члены выражения (18) $-i\Big[S^{(0,1,0)}(t), d_{osc}(t)\Big] - i\Big[S^{(0,0,1)}(t), d_{osc}(t)\Big]$ содержат диагональные слагаемые, которые свидетельствуют о наличии у ангармонического осциллятора постоянного дипольного момента. Он существует независимо от взаимодействия с когерентной волной и в поле когерентной волны приводит к таким физическим эффектам, как генерация гармоник, «выпрямления» излучения [10, 11].

Для первых слагаемых ряда (17) нетрудно получить [3]:

$$V^{(1,0,0)}(t) = V_{int}(t)^{'},$$

$$\frac{\partial S^{(1,0,0}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}V_{int}(t)^{''}, \quad \frac{\partial S^{(0,1,0}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}W_{\alpha}(t)^{''},$$

$$\frac{\partial S^{(0,0,1}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}W_{\beta}(t)^{''}.$$

$$V^{(2,0,0)}(t) = -\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), V_{int}(t)\Big]^{'},$$

$$V^{(1,1,0)}(t) = -\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), W_{\alpha}(t)\Big]^{'} - \\ - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}(t), V_{int}(t)\Big]^{'}, \quad (19)$$

$$V^{(1,0,1)}(t) = -\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), W_{\beta}(t)\Big]^{'} - \\ - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}(t), V_{int}(t)\Big]^{'} \ldots \quad (20)$$

Здесь использованы стандартные обозначения медленно и быстро меняющихся слагаемых по сравнению с экспонентой $\exp(\pm i\omega_{cl}t)$ посредством одного и двух штрихов.

Независимо от условий резонанса можно считать, что

$$S^{(1,0,0)}(t) = -\frac{g}{i\hbar}\Sigma_n^{''}\Big(\frac{\mathcal{E}_{cl}d_{n-1,n}\exp(-i\omega_{cl}t - i\Phi)}{-\omega_{cl} + \Omega_{n-1,n}} + \frac{\mathcal{E}^{*}{}_{cl}d_{n-1,n}\exp(i\omega_{cl}t + i\Phi)}{\omega_{cl} + \Omega_{n-1,n}}\Big)\sqrt{n}e^{i\Omega_{n-1,n}t}|E_{n-1}\rangle\langle E_n| + H.c. \quad (21)$$

Два штриха у знака суммы означают отсутствие в сумме медленно меняющихся во времени слагаемых. Это также означает отсутствие расходящихся знаменателей в (21) [3].

Для «обычного» однофотонного резонанса

$$\omega_{cl} \approx \Omega_{n+1,n}$$

эффективный оператор взаимодействия с когерентным полем представляет собой $V_{int}(t)^{'}$:

$$V^{Eff}(t) = g\Big(\mathcal{E}_{cl}^{*}\exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{n+1,n})t + i\Phi\Big)\times \\ \times\sqrt{n+1}|E_n\rangle\langle E_{n+1}| + H.c. \quad (22)$$

Нулевой порядок эффективного дипольного момента совпадает с исходным оператором дипольного момента

$$d^{Eff}(t) = d_{osc}(t) = -gc(t) + H.c. \quad (23)$$

Чтобы описать резонансы $\omega_{cl} \approx \Omega_{n+p,n}, p > 1$ воспользуемся аддитивной структурой ряда (17): присутствуют $V^{(1,1,0)}(t)$ и $V^{(1,0,1)}(t)$, определяемые формулами (19) и (20) одинакового вида, отличающиеся лишь заменой $W_{\alpha}(t)$ на $W_{\beta}(t)$. Это позволяет ввести модель «внутренней» нелинейности и в ее терминах описать $V^{(1,1,0)}(t)$ и $V^{(1,0,1)}(t)$, а также слагаемые эффективного оператора дипольного момента.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ МОДЕЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН «ВНУТРЕННЕЙ» НЕЛИНЕЙНОСТИ

Чтобы описать вклад в динамику квантового осциллятора разного рода ангармонизмов, удобно ввести следующую вспомогательную модель «внутренней нелинейности» ангармонического осциллятора. Предполагаем, что с учетом выше сказанного существует диагональная часть общего гамильтониана, которая определяет переход к картине Дирака и обеспечивает неэквидистантность спектра. Тогда для учета разного рода «ангармонизмов» можно ввести оператор внутренней нелинейности $V^{[p,\chi]}$ порядка p и константы связи χ. В картине Дирака

$$V^{[p,\chi]}(t) = \hbar\chi\Omega_c\Big(c^p\varphi_p(N)\exp\Big(i\Omega_{n-p,n}t\Big) + H.c.\Big). \quad (24)$$

Здесь $\Omega_{m,n} = \Big(E_m - E_n\Big)/\hbar$, где E_n — энергия состояния осциллятора с n возбуждениями и учетом всех диагональных элементов от ангармонизма, $\varphi_p(N)$ — некоторая операторозначная функция (в формуле (24) $N = n$, p — натуральное число). При учете диагональных слагаемых ангармонизма вида $\alpha x^3 + \beta x^4$ имеем:

$$E_n = \hbar\Omega_c\Big[n + 6\beta(n + n^2)\Big], \\ \Omega_{n+p,n} = \Omega_c\Big(p + 6\beta(2n+1)p + 6\beta p^2\Big). \quad (25)$$

Оператор (24) служит «кирпичиком» для учета разного рода нелинейностей в ангармоническом осцилляторе. С помощью оператора $V^{[p,\chi]}$ перепишем недиагональную часть гамильтониана ангармонического осциллятора. Поскольку для ангармонизма вида $\alpha x^3 + \beta x^4$

$$H_{osc-Non-D} = W_{\alpha} + W_{\beta}, \\ W_{\alpha} = \hbar\alpha\Omega_c\Big((3cN + c^3) + H.c.\Big), \\ W_{\beta} = \hbar\beta\Omega_c\Big((c^4 - 2c^2 + 4c^2N) + H.c.\Big), \quad (26)$$

операторы W_{α} и W_{β}, в картине Дирака можно записать так:

$$\begin{gathered}
W_\alpha(t) = V^{[1,\alpha]}(t) + V^{[3,\alpha]}(t), \\
W_\beta(t) = V^{[2,\beta]}(t) + V^{[4,\beta]}(t), \\
\varphi_1(n) = 3n, \quad \varphi_2(n) = 4n - 2, \\
\varphi_3(n) = 1, \quad \varphi_4(n) = 1.
\end{gathered} \tag{27}$$

В случае когда первоначально заселен только нижний энергетический уровень ангармонического осциллятора, при взаимодействии с ультракороткими импульсами когерентного поля (1) исходный гамильтониан вспомогательной модели представим в картине Дирака в виде:

$$W^{[p,\chi]}(t) = V_{int}(t) + V^{[p,\chi]}(t).$$

При этом $V_{int}(t)$ определен в предыдущем разделе (выражение за формулой (13)), а переход к картине Дирака по-прежнему определяется оператором H_{osc-D}.

Построение АРТВ для вспомогательной модели состоит в разложении генератора преобразований (10) в ряд по константам связи g и χ:

$$S(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + S^{(1,1)}(t) + S^{(2,0)}(t) + \ldots$$

Как и ранее, левый верхний индекс отвечает порядку по константе связи с когерентным полем. Другой верхний индекс отвечает порядку по константе χ.

Оператор $S^{(1,0)}(t)$ имеет вид (21). Оператор $S^{(0,1)}(t)$ в предположении адиабатического включения нелинейности получается из уравнения

$$\frac{\partial S^{(0,1)}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar} V^{[p,\chi]}(t)$$

в виде

$$\begin{aligned}
&S^{(0,1)}(t) = \\
&= -i\chi\Omega_c \Sigma_{n=p}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n-1)\ldots(n-p+1)}\varphi_p(n)}{\Omega_{n-p,n}} \times \\
&\qquad \times |E_{n-p}\rangle\langle E_n| e^{i\Omega_{n-p,n}t} + H.c.
\end{aligned} \tag{28}$$

Оператор $V^{(1,1)}(t)$ находится из уравнения, аналогичного (19), (20):

$$\begin{aligned}
V^{(1,1)}(t) = &-\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0)}(t), V^{[p,\chi]}(t)\Big]' - \\
&-\frac{i}{2}\Big[S^{(0,1)}(t), V_{int}(t)\Big]'.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из вычислений следует, что есть два типа квантовых переходов в модели. Чтобы конкретизировать выражение $V^{(1,1)}(t)$, необходимо принять то или иное условие резонанса. Рассмотрим типичные случаи, для которых $V^{(1,0)}(t) = 0$ согласно (22). Тогда рассматриваемые ниже случаи будут давать первый неисчезающий порядок в разложении эффективного гамильтониана

Пусть $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$. Тогда возможны два типа оптически индуцированных переходов $E_0 \leftrightarrow E_2$.

Первый тип связан с $p = 1$:

$$\begin{aligned}
V^{(1,1)}(t) = g\chi\sqrt{2}\mathcal{E}_{cl}^* \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{2,0})t + i\Phi\Big) \times \\
\times \Big(\varphi_1(2) - \varphi_1(1)\Big)|E_0\rangle\langle E_2| + H.c.
\end{aligned}$$

Второй тип связан с $p = 3$:

$$\begin{aligned}
V^{(1,1)}(t) = g\chi\sqrt{3}\varphi_3(3)|E_0\rangle\langle E_2| \times \\
\times \mathcal{E}_{cl}^* \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{2,0})t + i\Phi\Big) + H.c.
\end{aligned}$$

Первому типу можно сопоставить двухквантовый переход в атоме, только теперь один квант берется из электромагнитного взаимодействия с одноквантовым переходом, а другой квант берется из «внутренней нелинейности». В результате осуществляется поглощение кванта $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$ и переход с уровня $|E_0\rangle$ на уровень $|E_2\rangle$. При втором типе можно говорить об аналогии с комбинационным резонансом, когда берется три кванта «внутренней нелинейности» и рождается квант электромагнитного взаимодействия. В результате осуществляется поглощение кванта $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$ и переход с уровня $|E_0\rangle$ на уровень $|E_2\rangle$ как бы через промежуточный виртуальный более высокий уровень, чем $|E_2\rangle$. Этим уровнем служит $|E_3\rangle$, и он определяет матричные элементы, учитываемые в вычислениях.

Пусть $\omega_{cl} \approx \Omega_{3,0}$. Тогда возможны два типа оптически индуцированных переходов $E_0 \leftrightarrow E_3$.

Первый тип связан с $p = 2$:

$$\begin{aligned}
V^{(1,1)}(t) = \frac{g}{2}\chi\sqrt{6}\mathcal{E}_{cl}^* \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{3,0})t + i\Phi\Big) \times \\
\times \Big(\varphi_2(3) - \varphi_2(2)\Big)|E_0\rangle\langle E_3| + H.c.
\end{aligned}$$

Второй тип связан с $p = 4$:

$$\begin{aligned}
V^{(1,1)}(t) = -g\chi\sqrt{6}\varphi_3(3)\mathcal{E}_{cl}^* \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{3,0})t + i\Phi\Big) \times \\
\times \varphi_4(4)|E_0\rangle\langle E_3| + H.c.
\end{aligned}$$

Здесь также можно говорить об аналогии с многофотонным резонансом в атоме. Теперь первому типу можно сопоставить трехквантовый переход в атоме, только теперь один квант берется из электромагнитного взаимодействия с одноквантовым переходом, а два кванта берутся из «внутренней нелинейности». В результате осуществляется поглощение кванта $\omega_{cl} \approx \Omega_{3,0}$ и переход с уровня $|E_0\rangle$ на уровень $|E_3\rangle$. При втором типе можно говорить об аналогии с комбинационным резонансом, когда берется четыре кванта «внутренней нелинейности» и рождается квант электромагнитного взаимодействия. В результате осуществляется поглощение кванта $\omega_{cl} \approx \Omega_{3,0}$ и переход с уровня $|E_0\rangle$ на уровень $|E_2\rangle$ как бы через виртуальный, более высокий уровень, чем $|E_3\rangle$. Указанные аналогии помогают в вычислениях, контролируя корректность написания того или иного члена.

Наконец, пусть $\omega_{cl} \approx \Omega_{4,0}$. Возможны следующие два типа оптически индуцированных переходов $E_0 \leftrightarrow E_4$.

Первый тип связан с $p = 3$:

$$V^{(1,1)}(t) = \frac{g}{3}\chi\sqrt{24}\Big(\varphi_3(4) - \varphi_3(3)\Big)\times \\ \times\, \mathcal{E}^*_{cl} \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{4,0})t + i\Phi\Big)|E_0\rangle\langle E_4| + H.c.$$

Второй тип связан с $p = 5$:

$$V^{(1,1)}(t) = -g\chi\sqrt{4!}\mathcal{E}^*_{cl} \exp\Big(i(\omega_{cl} - \Omega_{4,0})t + i\Phi\Big)\times \\ \times\, \varphi_5(5)|E_0\rangle\langle E_4| + H.c.$$

В рассматриваемом примере ангармонизма вида $\alpha x^3 + \beta x^4$ операторы $V^{(1,1)}(t) = 0$ и для случая $p = 3$, и для случая $p = 5$.

Таким образом, проведенный анализ модельного гамильтониана (24) позволяет сделать вывод о возможных резонансах при взаимодействии с когерентным полем (1). Для ангармонизма вида $\alpha x^3 + \beta x^4$ возможны только три резонанса при переходе с основного состояния ангармонического осциллятора на возбужденные состояния. Это $\omega_{cl} \approx \Omega_{1,0}$, $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$ и $\omega_{cl} \approx \Omega_{3,0}$. Представление (27) позволяет для всех указанных случаев получить первые приближения для эффективных операторов резонансного взаимодействия. Видим, что резонансный квантовый переход $E_0 \leftrightarrow E_2$ в ангармоническом осцилляторе определяется лишь нелинейностью вида αx^3, тогда как резонансный квантовый переход $E_0 \leftrightarrow E_3$ определяется нелинейностью βx^4.

Для слагаемого эффективного дипольного момента $-i\Big[S^{(0,1)}, d_{osc}(t)\Big]$ также имеем различные результаты в зависимости от резонанса и значения параметра p.

Для $\omega_{cl} \approx \Omega_{2,0}$ и $p = 1$:

$$-\,i\Big[S^{(0,1)}, d_{osc}(t)\Big] = \\ = -g\chi\Big(\varphi_1(2) - \varphi_1(1)\Big)\sqrt{2}|E_0\rangle\langle E_2| \exp\Big(i\Omega_{0,2}t\Big) - \\ -\, g\chi\varphi_1(1)\Big(|E_1\rangle\langle E_1| - |E_0\rangle\langle E_0|\Big) + H.c.$$

Для $\omega_{cl} \approx \Omega_{3,0}$ и $p = 2$:

$$-\,i\Big[S^{(0,1)}, d_{osc}(t)\Big] = g\chi\varphi_2(2)\times \\ \times\sqrt{\frac{3}{2}}|E_0\rangle\langle E_3| \exp\Big(i\Omega_{0,3}t\Big) + H.c.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Различные модели одномерного осциллятора, не говоря уже о двумерном, постоянно привлекают внимание исследователей. Много работ посвящено спектрам, отвечающим самым разнообразным потенциалам ([13, 14] и ссылки там). Однако, что касается оптических задач, то, если оставить в стороне рассмотрение неэрмитовых гамильтонианов, основная масса работ имеет дело с гамильтонианами, сходными с изученными в данной статье [15–20]. В работах [16] (и ссылки там) изучалось многофотонное возбуждение осциллятора, в том числе многофотонный резонанс в среде с керровской нелинейностью рассмотрен в работе [17] при учете модельной нелинейности высших порядков и картины классического фазового портрета. Однако исследования возможных условий одноквантового резонанса в таких работах не проводились, за исключением [6, 9]. По сравнению с работами [6, 9] в данной статье рассмотрены новые случаи резонанса. При этом акцент сделан на обосновании применения АРТВ и месте метода в контекстах глобального и локального подходов теории открытых квантовых систем.

Проведенное исследование позволяет сформулировать отличие резонанса в атомной системе от резонанса в ангармоническом осцилляторе следующим образом. В случае атомной системы энергия взаимодействия атома с внешним когерентным полем считалась меньшей и много меньшей внутриатомных энергий взаимодействия, поэтому сначала «внутри» атома устанавливается стационарное состояние, описывающееся диагональным гамильтонианом, а потом во внешнем поле осуществляются переходы между этими состояниями. В случае ангармонического осциллятора неявно полагали, что энергия взаимодействия с когерентным полем порядка или больше ангармонизма, поэтому взаимодействие с когерентным полем учитывали наряду с внутриосцилляторными взаимодействиями, что и послужило основой использования разложения (16) и (17).

Заметим, что при исследовании задач, связанных с ангармоническими осцилляторами, например [20], сходный с АРТВ подход называют канонической теорией возмущений Ван Флека. В работе [7] указано на отличие нашего подхода и подчеркнута ведущая роль АРТВ в задачах о резонансном взаимодействии оптических когерентных полей с квантовыми системами. При этом все известные другие методы — метод Флоке [21], метод Магнуса [22], теория эквивалентности дифференциальных структур [23], как и метод АРТВ, восходят к калибровочным преобразованиям и уравнениям Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа [7]. Выше мы, по сути, применили своеобразный синтез глобального и локального подходов и показали, что АРТВ позволяет элементы глобального подхода естественно учитывать в рамках резонансной теории возмущений (при указанных соотношениях между константами связи). При этом ведущее правило отбора слагаемых АРТВ отличается от других методов и состоит в требовании наличия только медленно меняющихся во времени слагаемых в эффективном гамильтониане в картине Дирака.

[1] *Копвиллем У.Х., Пранц С.В.* Поляризационное эхо. М.: Наука, 1985.
[2] *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
[3] *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
[4] *Moiseev S.A., Urmancheev R.V.* // Optics Lett. **47**, 3812 (2022).
[5] *Basharov A.M.* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. **88**, 835 (2024).
[6] *Башаров А.М.* // Письма в ЖЭТФ. **120**, 417 (2024).
[7] *Башаров А.М.* // ЖЭТФ. **158**, 978 (2020).
[8] *Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И.* Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977.
[9] *Башаров А.М., Трубилко А.И.* // Оптика и спектр.**132**. 524 (2024).
[10] *Бугай А.Н., Сазонов С.В.* // Письма в ЖЭТФ. **98** 713 (2013).
[11] *Башаров А.М.* // Письма в ЖЭТФ. **103** 16 (2016).
[12] *Ghosh A., Sinha A.* // Pseudo-Hermitian extensions of the harmonic and isotonic oscillators. arXiv:2408.01397v2 [quant-ph] 22 Aug 2024.
[13] *Govia L.C.G., Ribeill G.J., Rowlands G.E.* et al. // Phys. Rev. Res. **3**, 013077(2021).
[14] *Leyton V., Peano V., Thorwart M.* // New J. Phys. **14**, 093024 (2012).
[15] *Ding S., Maslennikov G., Hablutzel R.* et al. // Phys. Rev. Lett. **119**, 150404 (2017).
[16] *Wang Zh., Pechal M., Wollack E.A.* et al. // Phys. Rev. X. **9**, 021049 (2019).
[17] *Anikin E.V., Maslova N.S., Gippius N.A., Sokolov I.M.* // Phys. Rev. A. **104**, 003100 (2021).
[18] *Navarrete-Benlloch C., Garces R., Mohseni N., de Valcarcel G.J.* // Phys. Rev. A. **103**, 023713 (2021).
[19] *Garcia-Mata I., Cortinas R.G., Xiao X.* et al. // Quantum **8**, 1298 (2024).
[20] *Efremov I.M., Millionshchikov D.V., Krasnoshchekov S.V.* // Russian Journal of Physical Chemistry A **98**, 78 (2024).
[21] *Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А.* ЯМР в одном и двух измерениях. М.: Мир, 1990.
[22] *Magnus W.* // Comm. Pure Appl. Math. **98**, 649 (1954).
[23] *Gardner R.B.* The Method of Equivalence and its Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1989).

Anharmonic quantum oscillator as a model of resonant optics

A.M. Basharov

National Research Centre «Kurchatov Institute» Moscow 123182, Russia
E-mail: basharov@gmail.com

The peculiarities of the theory of resonant interactions of electromagnetic coherent fields with an anharmonic oscillator in comparison with the case of a multilevel atom are emphasized. It is shown that within the framework of the local approach, algebraic resonance perturbation theory, it is possible to take into account the requirements of the global approach of the theory of open quantum systems. Based on an auxiliary model of the "internal nonlinearity"of an anharmonic oscillator, the possible conditions of resonance of a coherent wave with an anharmonic oscillator with the absorption of a single photon are analyzed.

PACS: 42.50.Nn.
Keywords: anharmonic quantum oscillator, algebraic perturbation theory.
Received 24 December 2024.
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторе:
Башаров Асхат Масхудович — доктор физ.-мат. наук, нач. лаборатории НИЦ «Курчатовский институт»; e-mail: basharov@gmail.com.