**XII семинар Д.Н. Клышко. Квантовая оптика**

# Квантовый осциллятор как открытая система

А.И. Трубилко[1,*]

[1] *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России*
*Россия, 196105, Санкт-Петербург, Московский пр. д. 149*

(Поступила в редакцию 25.11.2024; после доработки 11.12.2024; подписана в печать 16.12.2024)

Посредством алгебраической теории возмущений показана возможность использования модели квантового осциллятора в теории открытых квантовых систем. Рассмотрен случай резонансного и нерезонансного взаимодействий двух пространственно разделенных осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своим термостатом при различных температурах. Продемонстрирована возможность распада изолированного осциллятора при его нерезонансном взаимодействии с осциллятором-посредником в термостат последнего. Алгебраическая теория возмущений во всех указанных случаях не приводит к каким-либо нефизическим особенностям либо противоречиям типа нарушения второго начала термодинамики и расхождениям при описании этих случаев в рамках глобального и локального подходов.

PACS: 42.50.Ct, 03.65.Yz УДК: 53.02

Ключевые слова: квантовый осциллятор, квантовая открытая система, алгебраическая теория возмущений.

DOI: 10.55959/MSU0579-9392.80.2530407

## ВВЕДЕНИЕ

Квантовый осциллятор является одной из фундаментальных моделей квантовой физики и, в частности, квантовой оптики. Это обусловлено прежде всего и простотой самой модели, вместе с тем несущей на себе основные особенности микроскопических представлений о природе вещества и поля, и возможностью интуитивно физически понятного моделирования взаимодействий. К последним отнесем, например, известную модель Бозе–Хаббарта [1], представляющую цепочку связанных осцилляторов. Также возможны и разные простые интерпретации взаимодействия выделенного осциллятора с различного рода окружениями. В качестве последних могут вступать системы изначально разной физической природы как бозонного, так и фермионного типов.

Модель квантового гармонического осциллятора лежит в основе теоретических представлений о квантовом состоянии электромагнитного поля [2–5] и его взаимодействии с оптическими резонаторами, атомами в них и сверхпроводящими структурами. Основным мотивом использования и применения именно такой модели является описание взаимодействий разрешимой алгеброй операторов рождения и уничтожения Гейзенберга-Вейля [6, 7]. Именно поэтому самой простой, но как мы продемонстрируем далеко нетривиальной задачей является вопрос о взаимодействии двух гармонических осцилляторов между собой с учетом их же взаимодействия с общим окружением иначе термостатом. Последний моделируется набором большого числа таких же бозонных гармонических осцилляторов, возбужденных в некоторой спектральной полосе или находящих в полностью невозбужденном вакуумном состоянии. Их состояние не изменяется при взаимодействии с рассматриваемой системой. Иными словами, имеет место обычная постановка задачи для открытой системы.

Следует отметить, что сама постановка задачи о взаимодействии квантовой системы с окружением восходит к раннему этапу становления квантовой механики. Еще в работе [8] впервые рассмотрено взаимодействие возбужденного атома с вакуумным квантованным внешним электромагнитным полем, играющим роль термостата, и впервые корректно определена константа релаксации в свободном пространстве. Похожая ситуация, где в качестве открытой системы выступает гармонический квантовый осциллятор, рассматривалась в работах [9–12]. Важнейшим этапом в теории открытых систем явилось обнаружение Линдбладом [13] и независимо Горини, Коссаковским и Сударшаном [14] вида кинетического уравнения релаксации для матрицы плотности выделенной анализируемой системы. Именно в [13] представлен в общем виде, без физической конкретизации задач, производящий оператор непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы открытой системы. Его вид оказывается универсальным и не зависит от физической природы самой диссипирующей системы. Кроме того, как оказывается, универсальный вид уравнения инвариантен и к различным математическим подходам и моделированиям взаимодействий при выводе названного уравнения, выполненных в рамках марковского характера слабого взаимодействия системы с окружением [15, 16].

Формулировка основного уравнения динамики открытой системы основана на выводе кинетиче-

* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com

ского уравнения из общего исходного гамильтониана открытой системы и ее окружения [16]. Это обстоятельство используется в большинстве методов вывода, за исключением метода проекционных операторов Цванцинга [17, 18]. Однако изначально полный гамильтониан содержит и быстро, и медленно меняющиеся во времени слагаемые. Эти слагаемые принято называть вращающими и антивращающими соответственно, что связано с их интерпретацией как вращательное движение вектора на сфере Блоха [19]. Зависимость от слагаемых обоих видов видна при записи гамильтонианов, определяющих модели, используемые в квантовой оптике [2–5, 20]. В оптических задачах обычно вывод кинетического уравнения осуществляют на основе пренебрежения антивращающими слагаемыми уже в исходном гамильтониане [21]. Однако это пренебрежение оказывается правомерным только для случая резонансных взаимодействий [22, 23]. Поэтому наивное использование уравнения Линдблада, без его строго корректного вывода, может приводить к различного рода явным нефизическим особенностям и противоречиям. Привычный вывод кинетического уравнения открытой квантовой системы осуществляется в предположении слабого характера взаимодействия системы с окружением. При этом предполагаются выполненными обычные условия, когда взаимодействие подсистемы с равновесным состоянием окружения осуществляется в широкой полосе частот и обратным воздействием системы на термостат можно пренебречь. В условиях квазирезонансного характера взаимодействия системы с окружением, где и пользуются приближением вращающейся волны, адекватно можно описывать только низший первый порядок по взаимодействию. Пренебрежение этим обстоятельством в ряде случаев приводит не только к неточностям, но и, возможно, к грубым ошибкам. Например, в работах [24–27] предложено кинетическое уравнение динамики открытой системы, полученное в рамках резонансного характера взаимодействия с введением целого ряда феноменологических слагаемых. Далее приведен анализ результатов в дисперсионном пределе, который отвечает сугубо нерезонансному характеру взаимодействия, что не может быть описано представленным уравнением. Такой подход приводит к явно нефизическому стационарному состоянию сильно связанных квантовых систем [28]. Противоречивость и парадоксальность этих результатов связана с потерей целого ряда слагаемых того же порядка малости, которые нельзя построить феноменологически.

Другим ярким примером такого рода может служить обнаруженная в [29] возможность нарушения второго начала термодинамики. В этой работе представлены результаты прямого вычисления потоков энергии между двумя термостатами, каждый из которых взаимодействует со своим квантовым гармоническим осциллятором, последние также взаимодействуют и между собой. Было обнаружено, что при некоторых значениях частот осцилляторов и других параметрах задачи возможна передача потока тепла от более холодного термостата к более горячему. Это естественно приводит к нарушению второго начала термодинамики в теории открытых систем. Такой подход получил название локального подхода, он представляет пример некорректного использования результатов расчетов выполненных в рамках резонансного характера взаимодействия к области, где взаимодействие систем оказывается существенно нерезонансным. Выход из противоречия в цитированной работе найден посредством выполнения диагонализации гамильтониана. В этом случае никакого нарушения второго начала термодинамики не наблюдается. Объяснение авторов состоит в том, что диагонализация приводит к изменению диссипативной части кинетического уравнения, которая учитывает теперь влияние отдельного осциллятора на термостат соседнего осциллятора. Такой подход, получивший название глобального подхода, с математической точки зрения обусловлен тем фактом, что квадратичные гамильтонианы взаимодействующих систем [30, 31] могут быть диагонализованы преобразованием Боголюбова [32]. Подобная задача, где в качестве системы для переноса энергии между термостатами использованы два двухуровневых атома, рассмотрена в [30]. Поэтому чтобы исключить разного рода неточности и некорректности, при выводе кинетического уравнения динамики подсистемы всегда следует исходить из первых принципов его построения [33].

В этой статье мы рассмотрим следствия из кинетических уравнений для квантового гармонического осциллятора как открытой системы в разных условиях в рамках алгебраической теории возмущений, что мы применяли в ряде работ [34–39]. Демонстрация эффективности применения алгебраической теории возмущений, отражающая непротиворечивость корректного локального подхода для описания квантового осциллятора как открытой системы, и является целью этой работы. Алгебраическая теория возмущений, основы которой заложены работами [22], [40–43], естественным образом приводит к квантовым стохастическим уравнениям, на основе которых и строится искомое уравнение динамики открытой системы. Такой метод позволяет избежать противоречий, возникающих между описаниями в рамках глобального и локального подходов [33]. Полученные методом алгебраической теории возмущений квантовые стохастические уравнения определены эффективным гамильтонианом задачи, который учитывает антивращающие слагаемые исходного гамильтониана [23, 44]. В работе [34] этот метод применен к системе резонансно взаимодействующих осцилляторов. Следует отметить, что такой подход к оптическим задачам позволил корректно применять приближение белого шума для описания окружения открытой системы [45]. С его помощью удается обосновывать использование приближения вращающейся волны для квантованных широкополосных полей, получить как следствие теорему Лакса о представлении квантованного широкополосного поля как совокупности независимых шумовых источников. Лэмбовские сдвиги квантовых уровней в рамках применения этого подхода возникают автоматически, как и описание диполь-дипольного взаимодействия в атомных системах. Кроме того, появляется возможность относительно простого учета поправок высоких порядков взаимодействий при выводе кинетического уравнения. В результате в кинетическом уравнении естественным образом возникают новые слагаемые, которые отвечают описанию новых каналов диссипации и релаксации, обусловленные проявлением квантовой интерференции различного рода альтернатив, возникающих в сложных системах. Разные подходы к выводу кинетического уравнения в марковском приближении в первом порядке по параметру связи система–термостат согласуются видом и формой оператора Линдблада [46–50].

## 1. ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Продемонстрируем применение алгебраической теории возмущений для построения эффективного гамильтониана в простом случае двух резонансно взаимодействующих осцилляторов, собственные частоты которых обозначим как $\Omega_c$ и $\Omega_r$. Будем также предполагать, что каждый из осцилляторов обладает бозонными коммутационными соотношениями $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$, отвечающими операторам рождения $c^\dagger, r^\dagger$ и уничтожения $c, r$ соответствующего осциллятора. Мы, в частности, предполагаем, например, что имеются две высокодобротные резонаторные моды, резонансно взаимодействующие между собой на общем зеркале. Каждый из осцилляторов взаимодействует также квазирезонансно с термостатами $A$ и $B$ с температурами $T_c$ и $T_r$. Каждый из термостатов или системы, обладающих большим числом степеней свободы, также описывается гейзенберговыми коммутационными соотношениями, характерными для бозонных систем. Операторы рождения и уничтожения первого из термостатов на частоте $\omega$ обозначим как $a^\dagger_\omega, a_\omega$, а второго — как $b^\dagger_\omega, b_\omega$, $[a_{\omega'}, a^\dagger_\omega] = \delta_{\omega',\omega}$, $[b_{\omega'}, b^\dagger_\omega] = \delta_{\omega',\omega}$.

Запишем уравнение Шредингера для всей системы в представлении взаимодействия

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{1}$$

где $H(t) = V_{c-r}(t) + V_c(t) + V_r(t)$ и определен следующими явными выражениями

$$V_{c-r}(t) = g(ce^{-i\Omega_c t} + c^\dagger e^{i\Omega_c t})(re^{-i\Omega_r t} + r^\dagger e^{i\Omega_r t}), \tag{2}$$
$$V_c(t) = \gamma_c \sum_\omega (ce^{-i\Omega_c t} + c^\dagger e^{i\Omega_c t})(a^\dagger_\omega e^{i\omega t} + a_\omega e^{-i\omega t}),$$
$$V_r(t) = \gamma_r \sum_\omega (re^{-i\Omega_r t} + r^\dagger e^{i\Omega_r t})(b^\dagger_\omega e^{i\omega t} + b_\omega e^{-i\omega t}),$$

Нетрудно видеть, что в выписанных выражениях представлены в том числе и антивращательные слагаемые.

В основе метода алгебраической теории возмущений лежит возможность построения гамильтониана, который не содержит быстроменяющихся, антивращающих слагаемых. Эту возможность удается реализовать благодаря унитарной симметрии. Совершим унитарное преобразование исходного вектора состояния и перейдем к новому представлению $|\tilde{\Psi}\rangle = \exp(-iS)|\Psi(t)\rangle$, посредством генератора $S$. В новом представлении для уравнения Шредингера все соотношения мы будем помечать знаком тильда. Это уравнение имеет тот же вид, что и исходное (1). Генератор преобразования и преобразованный к новому представлению гамильтониан задачи разложим в ряды по константам взаимодействий:

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + \\ + S^{(0,0,1)}(t) + S^{(2,0,0)}(t) + ...,$$

$$\tilde{H}(t) = \tilde{H}(t)^{(1,0,0)} + \tilde{H}(t)^{(0,1,0)} + \\ + \tilde{H}(t)^{(0,0,1)} + \tilde{H}(t)^{(2,0,0)} + ....$$

Левый индекс каждой тройки верхних индексов описывает порядок слагаемого по константе связи между квантованными осцилляторами, а оставшаяся пара индексов — порядок по константе связи подсистем с окружением — термостатом $A$ и $B$, соответственно.

Посредством формул Беккера–Кемпбелла–Хаусдорфа получим следующие уравнения:

$$\tilde{H}^{(1,0,0)}(t) = \hbar \frac{dS^{(1,0,0)}(t)}{dt} + V_{c-r}(t),$$
$$\tilde{H}^{(0,1,0)}(t) = \hbar \frac{dS^{(0,1,0)}(t)}{dt} + V_c(t),$$
$$\tilde{H}^{(0,0,1)}(t) = \hbar \frac{dS^{(0,0,1)}(t)}{dt} + V_r(t),$$

$$\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = \hbar \frac{dS^{(1,1,0)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), V_c(t)\Big] - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,1,0)}(t)\Big] - \\ - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}(t), V_{c-r}(t)\Big] - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t)\Big],$$
$$\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) = \hbar \frac{dS^{(1,0,1)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), V_r(t)\Big] - \frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t), \tilde{H}^{(0,0,1)}(t)\Big] - \\ - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}(t), V_{c-r}(t)\Big] - \frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}(t), \tilde{H}^{(1,0,0)}(t)\Big],$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{H}^{(0,1,1)}(t)=\hbar\frac{dS^{(0,1,1)}(t)}{dt}-\frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}(t),V_r(t)\Big]-\frac{i}{2}\Big[S^{(0,1,0)}(t),\tilde{H}^{(0,0,1)}(t)\Big]-\\
-\frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}(t),V_A(t)\Big]-\frac{i}{2}\Big[S^{(0,0,1)}(t),\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)\Big],\\
\tilde{H}^{(2,0,0)}(t)=\hbar\frac{dS^{(2,0,0)}(t)}{dt}-\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t),V_{c-r}(t)\Big]-\frac{i}{2}\Big[S^{(1,0,0)}(t),\tilde{H}^{(1,0,0)}(t)\Big],\\
\dots
\end{gathered}
\tag{3}
$$

В предположении адиабатического включения полей, отсутствие в выводимом эффективном гамильтониане только медленно меняющихся во времени слагаемых однозначно определяет величины $S^{(i,j,m)}$ и накладывает ограничение на спектр мод широкополосных полей. Это обстоятельство приводит к тому, что величины $S^{(i,j,m)}(t)$ определены быстро изменяющимися во времени слагаемыми.

Для резонансного характера взаимодействия между осцилляторами эффективный гамильтониан в первом порядке определяется следующими выражениями:

$$
\begin{gathered}
\tilde{H}^{(Eff),(1)}(t)=\tilde{H}^{(1,0,0)}(t)+\tilde{H}^{(0,0,1)}(t)+\tilde{H}^{(1,0,0)}(t),\\
\tilde{H}^{(1,0,0)}(t)=g\Big(cr^\dagger+c^\dagger r\Big),\\
\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)=\gamma_c\sum_{\omega\in(\Omega_c)}\Big(ca_\omega^\dagger e^{-i(\Omega_c-\omega)t}+c^\dagger a_\omega e^{i(\Omega_c-\omega)t}\Big),\\
\tilde{H}^{(0,0,1)}(t)=\gamma_r\sum_{\omega\in(\Omega_r)}\Big(rb_\omega^\dagger e^{-i(\Omega_r-\omega)t}+r^\dagger b_\omega e^{i(\Omega_r-\omega)t}\Big).
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Здесь и в дальнейшем внизу у знаков сумм показаны области спектров частот осцилляторов окружения вблизи указанных частот.

Два типа слагаемых определяют гамильтониан системы во втором порядке теории возмущений. Прежде всего это слагаемые второго порядка по соответствующим им константам взаимодействий $\tilde{H}^{(2,0,0)}(t),\tilde{H}^{(0,2,0)}(t),\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)$, а также слагаемые определенные их билинейными комбинациями. Приведем окончательные выражения, определяющие второй порядок взаимодействий:

$$
\begin{gathered}
\tilde{H}^{(2,0,0)}(t)=-\frac{g^2}{2\hbar\Omega_c}\Big(c^\dagger c+r^\dagger r+1\Big),\\
\tilde{H}^{(0,2,0)}(t)=-\gamma_c^2\Big(c^\dagger c+1\Big)\sum_{\forall\omega\notin(-\Omega_c)}\frac{1}{\hbar(\Omega_c+\omega)}-\gamma_c^2\sum_{\forall(\omega,\omega')\notin(-\Omega_c)}\frac{a_\omega^\dagger a_{\omega'}e^{i(\omega-\omega')t}}{2\hbar(\omega+\Omega_c)}-\\
-\gamma_c^2\sum_{\forall(\omega,\omega')\notin(-\Omega_c)}\frac{a_{\omega'}^\dagger a_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\Omega_c+\omega)},\\
\tilde{H}^{(0,0,2)}(t)=-\gamma_r^2\Big(r^\dagger r+1\Big)\sum_{\forall\omega\notin(-\Omega_r)}\frac{1}{\hbar(\Omega_r+\omega)}-\gamma_r^2\sum_{\forall(\omega,\omega')\notin(-\Omega_c)}\frac{b_\omega^\dagger b_{\omega'}e^{i(\omega-\omega')t}}{2\hbar(\omega+\Omega_r)}-\\
-\gamma_r^2\sum_{\forall(\omega,\omega')\notin(-\Omega_c)}\frac{b_{\omega'}^\dagger b_\omega e^{i(\omega'-\omega)t}}{2\hbar(\Omega_r+\omega)}
\end{gathered}
\tag{5}
$$

При выводе этого выражения мы учитывали тот факт, что собственные частоты осцилляторов равны ввиду резонансного характера их взаимодействий. Эти приведенные слагаемые отвечают лембовскому и штарковскому сдвигу собственных частот осцилляторов и в дальнейшем легко могут бы устранены (восстановлены) дополнительным необходимым последующим унитарным преобразованием к вектору системы.

Более интересными оказываются слагаемые, происходящие вследствие билинейных комбинаций констант взаимодействий, они и описывают возможные возникающие интерференции альтернатив. Эти слагаемые ответственны за последующее появление в системе дополнительных квантовых каналов релаксации, поскольку они возникают благодаря квантовой интерференции и не могут быть описаны никакими феноменологическими константами. Их окончательный вид определен исключительно полученным видом эффективного гамильтониана, а изначально они завуалированы в исходном взаимодействии. Приведем явный вид этих операторов, необходимых для дальнейшего рассмотрения:

$$\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\Omega_c}\sum_{\forall\omega\in\Omega_r} a_\omega r^\dagger e^{-i(\omega-\Omega_r)t} - \frac{g\gamma_c}{2\hbar\Omega_c}\sum_{\forall\omega\in\Omega_r} a_\omega^\dagger r e^{i(\omega-\Omega_r)t},$$
$$\tilde{H}^{(1,0,1)}(t) = -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\Omega_r}\sum_{\forall\omega\in\Omega_c} b_\omega c^\dagger e^{-i(\omega-\Omega_c)t} - \frac{g\gamma_r}{2\hbar\Omega_r}\sum_{\forall\omega\in\Omega_c} b_\omega^\dagger c e^{i(\omega-\Omega_c)t}. \tag{6}$$

В итоге эффективный гамильтониан задачи представлен суммой приведенных слагаемыми (4), (5), (6). На основе полученного эффективного гамильтониана далее производится построение квантового стохастического уравнения. Слагаемые эффективного гамильтониана, отвечающие за связь с широкополосными полями, представим квантовым порождающим и уничтожающим случайными процессами, заменяя соответствующие суммы по частотам интегралами с бесконечным пределами, например:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)dt &= \gamma_c\Big(c dA^\dagger(t) + c^\dagger dA(t)\Big),\\ \tilde{H}^{(1,1,0)}(t)dt &= -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\Omega_c}\Big(r^\dagger dA(t) + r dA^\dagger(t)\Big),\\ \tilde{H}^{(0,0,1)}(t)dt &= \gamma_r\Big(r dB^\dagger(t) + r^\dagger dB(t)\Big),\\ \tilde{H}^{(1,0,1)}(t)dt &= -\frac{g\gamma_r}{2\hbar\Omega_r}\Big(c^\dagger dB(t) + c dB^\dagger(t)\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

Из этих формул видно возникновение теоремы Лакса, где каждый стохастический источник на определенной частоте является независимым от другого источника, отвечающего другой частоте. Описываемые инкременты введены следующими соотношениями:

$$dA(t) = A(t+dt) - A(t), \quad A(t) = \int_0^t dt' a(t'),$$
$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega-\Omega_c)t} a_\omega,$$
$$dB(t) = B(t+dt) - B(t), \quad B(t) = \int_0^t dt' b(t'),$$
$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\omega-\Omega_r)t} b_\omega.$$

Дифференциалы введенных квантовых случайных процессов рождения и уничтожения отвечают алгебре Ито:

$$\begin{gathered} dA(t)dA^\dagger(t) = (n_c^A + 1)dt, \quad dA^\dagger(t)dA(t) = n_c^A dt,\\ dB(t)dB^\dagger(t) = (n_r^B + 1)dt, \quad dB^\dagger(t)dB(t) = n_r^B dt,\\ dA(t)dA(t) = dA(t)dB(t) = dA^\dagger(t)dB(t) =\\ = dB(t)dB(t) = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где $n_c, n_r$ отвечают плотностям фотонов термостатов с соответствующими центральными частотами $\Omega_c, \Omega_r$.

Использование формальной записи решения для оператора эволюции системы через известную T-экспоненту позволяет получить квантовое стохастическое дифференциальное уравнение для его декремента, которое удобно представить в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} dU(\tau) = &-iH^{eff-S}(\tau)d\tau U(\tau) -\\ &-\Big(\sum_{k=1,2} i\sqrt{\overline{\gamma_k}}Y_k^\dagger dB_k(\tau) + i\sqrt{\overline{\gamma_k}}Y_k dB_k^\dagger(\tau) +\\ &+ \frac{(n_k+1)}{2}\overline{\gamma_k}Y_k^\dagger Y_k d\tau + \frac{n_k}{2}\overline{\gamma_k}Y_k Y_k^\dagger d\tau\Big).\end{aligned}$$

Здесь

$$H^{eff-S}(\tau) = \frac{H^{1,0,0}(t)}{\hbar\Omega_c},$$
$$dB_1(\tau) = dA(\tau), \quad dB_2(\tau) = dB(\tau),$$
$$Y_1 = c - \lambda r, Y_2 = r - \lambda c$$

и введены следующие безразмерные величины:

$$\overline{\gamma_1} = \frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar^2\Omega_c^2}, \quad \overline{\gamma_2} = \frac{2\pi\gamma_r^2}{\hbar^2\Omega_c^2},$$
$$\lambda = \frac{g}{2\hbar\Omega_c}, \quad \overline{g} = \frac{g}{\hbar\Omega_c},$$

величина безразмерного времени выбрана здесь в виде $\tau = \Omega_c t$ и, поскольку резонансные частоты одинаковы, $\Omega_c = \Omega_r$, под $n_1$ имеется ввиду плотность числа фотонов термостата $A$, а под $n_2$ понимается плотность числа фотонов термостата $B$.

Искомое уравнение для матрицы плотности открытой системы нетрудно теперь получить, определяя ее изменение $d\rho(\tau) = \rho(\tau+d\tau) - \rho(\tau)$ с помощью оператора эволюции:

$$\begin{aligned} d\rho(\tau) = &\, dU(\tau)|\tilde{\Psi}(0)\rangle\langle\tilde{\Psi}(0)|U^\dagger(\tau) +\\ &+ U(\tau)|\tilde{\Psi}(0)\rangle\langle\tilde{\Psi}(0)|dU^\dagger(\tau) +\\ &+ dU(\tau)|\tilde{\Psi}(0)\rangle\langle\tilde{\Psi}(0)|dU^\dagger(\tau)\end{aligned} \tag{9}$$

и последующего усреднения по равновесному состоянию термостатов, считая независимыми подсистемы в начальный момент времени, и выполнения соотношений алгебры Ито (8).

В итоге имеет место следующее обезразмеренное уравнение, описывающее динамику двух резонансно взаимодействующих осцилляторов, с учетом их взаимодействия со своими термостатами и влиянием каждого их осцилляторов на термостат соседнего осциллятора:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(\tau)}{d\tau} = &-i\Big[H^{eff-S}(\tau), \rho(\tau)\Big] +\\ &+ \Gamma_A\rho(\tau) + \Gamma_B\rho(\tau),\end{aligned} \tag{10}$$

где релаксационные операторы имеют следующее действие на матрицу плотности системы:

$$\Gamma_A\rho(\tau) = \overline{\gamma_1}\Big[ -n_1 Y_1^\dagger \rho(\tau) Y_1 - (n_1+1) Y_1 \rho(\tau) Y_1^\dagger + \\ + \Big(\frac{n_1+1}{2} Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2} Y_1 Y_1^\dagger\Big)\rho(\tau) + \rho(\tau)\Big(\frac{n_1+1}{2} Y_1^\dagger Y_1 + \frac{n_1}{2} Y_1 Y_1^\dagger\Big)\Big].$$

Явный вид релаксационного оператора $\Gamma_B\rho(\tau)$ получается из уравнения для $\Gamma_A\rho(\tau)$ заменой нижнего индекса 1 на 2 во всех выражениях. Заметим, что уравнение (10) имеет типичную структуру уравнения Линдблада, что является одним из критериев проверки правильности его вывода.

## 2. ПОТОКИ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ РЕЗОНАНСНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Из уравнения (10) нетрудно получить систему уравнений для средних чисел осцилляторов системы $\langle c^\dagger c\rangle = Sp(c^\dagger c\rho(\tau))$, $\langle r^\dagger r\rangle = Sp(r^\dagger r\rho(\tau))$, которая совместно с величинами $\langle X\rangle = Sp((c^\dagger r + cr^\dagger)\rho(\tau))$, $\langle Y\rangle = Sp(i(c^\dagger r - cr^\dagger)\rho(\tau))$, характеризующими их взаимодействие, образует замкнутую систему. На основе ее последующего стационарного решения нетрудно определить стационарные потоки энергии в термостаты. Так, например, стационарные потоки энергии от осциллятора на частоте $\Omega_c$ в термостат осциллятора $A$ $Q_{c\to A} = \hbar\Omega_c Sp(\Gamma_A \rho c^\dagger c)$ и термостат осциллятора $B$ $Q_{c\to B} = \hbar\Omega_c Sp(\Gamma_B\rho c^\dagger c)$, приходящиеся на единичный квант энергии этого осциллятора определяются в явном виде следующими выражениями:

$$\overline{Q}_{c\to A} = \frac{\overline{\gamma_1\gamma_2}}{\overline{\gamma_1}+\overline{\gamma_2}} \frac{\frac{16\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} + 2\overline{\gamma_1\gamma_2}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}}{\frac{16\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} + \overline{\gamma_1\gamma_2}}(n_1 - n_2), \quad (11)$$

$$\overline{Q}_{c\to B} = \frac{\overline{\gamma_1\gamma_2}}{\overline{\gamma_1}+\overline{\gamma_2}} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \frac{\frac{16\lambda^2}{1+\lambda^2} + 2\overline{\gamma_1\gamma_2}}{\frac{16\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} + \overline{\gamma_1\gamma_2}}(n_2 - n_1). \quad (12)$$

Поток энергии $Q_{r\to B} = \hbar\Omega_r Sp(\Gamma_B\rho r^\dagger r)$ осциллятора на частоте $\Omega_r$ в термостат $B$, с которым непосредственно и взаимодействует этот осциллятор, в безразмерном виде (энергии, приходящийся на единичный квант его энергии) в точности равен величине безразмерного потока $\overline{Q}_{c\to A}$, но имеет противоположный знак:

$$\overline{Q}_{r\to B} = -\overline{Q}_{c\to A}$$

Тепловой поток от этого же осциллятора в термостат соседа, в данном случае это термостат $A$, вычисляется согласно формуле $Q_{r\to A} = \hbar\Omega_r Sp(\Gamma_A\rho r^\dagger r)$. В обезразмеренном виде он оказывается равным по величине, но противоположным по знаку безразмерному потоку от осциллятора $\Omega_c$ в термостат $B$, а именно $\overline{Q}_{r\to A} = -\overline{Q}_{c\to B}$.

Полная энергия всей системы включает в себя также и энергию взаимодействия осцилляторов, при этом соответствующие потоки от одного к другому осциллятору оказываются равными:

$$Sp(\Gamma_B\rho\overline{g}(cr^\dagger + c^\dagger r)) = -Sp(\Gamma_A\rho\overline{g}(cr^\dagger + c^\dagger r)) = \\ = 2\lambda\frac{\overline{\gamma_1\gamma_2}}{\overline{\gamma_1}+\overline{\gamma_2}}(n_2 - n_1).$$

Очевидно, что сумма потоков от осцилляторов к термостатам оказывается равной нулю, а направление потока определяется температурами термостатов или соотношением между плотностями фотонов термостатов. При этом никогда не возникает потока энергии от более холодного термостата к горячему. Подчеркнем, что метод алгебраической теории возмущений, использованный здесь для описания динамики двух резонансно взаимодействующих осцилляторов, не прибегает к каким-либо феноменологическим моделям, а проистекает из первых принципов и предположения о марковости взаимодействий с термостатами. Наряду с этим, этот метод в нашем случае накладывает и достаточно жесткие ограничения. Действительно, в резонансном взаимодействии частоты осцилляторов равны друг другу, поэтому какие-либо манипуляции частотами фотонов термостатов лишены смысла и их плотности фотонов должны быть выбраны строго на одной и той же резонансной частоте $\Omega_r = \Omega_c$.

## 3. НЕРЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. РЕЛАКСАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрим теперь аналогичную ситуацию в случае нерезонансного взаимодействия осцилляторов. Этот случай отличается от резонансного взаимодействия тем, что такое взаимодействие осуществляется далеко в крыле линии поглощения каждого из осцилляторов, где их собственные частоты существенно отличаются по величине. Далее, не ограничивая общности, полагаем выполненным условие $\Omega_r \ll \Omega_c$.

В этом случае проявление такого взаимодействия описывается вторым порядком теории по константе взаимодействия осцилляторов между собой. В методе алгебраической теории возмущений этот факт приводит, ввиду изменения вида оператора унитарного преобразования, к отсутствию взаимодействия между осцилляторами в первом порядке по константе их взаимодействия. В этом разделе мы ограничимся рассмотрением ситуации, где взаимодействие одного из выделенных осцилляторов со своим термостатом полностью отсутствует. В качестве такого осциллятора, который в данном случае является изолированным, выберем осциллятор на частоте $\Omega_r$ и положим в исходном взаимодействии (последняя формула в (2)) $\gamma_r$ равным нулю.

Эффективный гамильтониан в такой задаче (подробнее см. [35]) представляет собой сумму слагаемых трех видов:

$$\tilde{H}^{(Eff)}(t) = \tilde{H}^{(1,0)}(t) + \tilde{H}^{(2,0)}(t) + \tilde{H}^{(1,1)}(t), \quad (13)$$

где временной аргумент по-прежнему означает использование картины взаимодействия. Первое слагаемое (13) $\tilde{H}^{(1,0)}(t)$ отвечает первому порядку взаимодействия осциллятора на частоте $\Omega_c$ со своим термостатом, оно описывает его квазирезонансное взаимодействие, центральная частота которого определена собственной частотой названного осциллятора и определено выражением $\tilde{H}^{(0,1,0)}(t)$ в уравнении (4). Именно это слагаемое определяет релаксацию и накачку этого осциллятора собственным термостатом.

Взаимодействие осцилляторов описывается вторым слагаемым приведенной суммы в (13), оно определяется следующим явным выражением:

$$\tilde{H}^{(2,0)}(t) = -c^\dagger c\Pi_c(\Omega_r) - r^\dagger r\Pi_r(\Omega_c) - \frac{g^2}{\hbar(\Omega_c+\Omega_r)},$$
$$\Pi_c(\Omega_r) = \frac{g^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_c+\Omega_r} + \frac{1}{\Omega_c-\Omega_r}\Big),$$
$$\Pi_r(\Omega_c) = \frac{g^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\Omega_r+\Omega_c} + \frac{1}{\Omega_r-\Omega_c}\Big). \quad (14)$$

Выражение (14) показывает, что влияние одного осциллятора на другой проявляется только в сдвигах их собственных частот, которые, как и в предыдущем пояснении, можно успешно снять соответствующими дополнительными унитарными преобразованиями. Таким образом, непосредственно взаимодействие осцилляторов между собой не играет сколько-нибудь значительной роли.

Наконец, третье слагаемое выражения (13) появляется благодаря учету квантовой интерференции нерезонансного характера взаимодействия осцилляторов между собой и учету нерезонансных (антивращательных) слагаемых взаимодействия осциллятора на частоте $\Omega_c$ со своим термостатом $A$. Это взаимодействие эффективно для фотонов термостата, частоты которых лежат вблизи собственной частоты $\Omega_r$ изолированного осциллятора. Явный вид этого слагаемого задан выражением

$$\tilde{H}^{(1,1)}(t) = = -\frac{2g\gamma_c}{\hbar\Omega_c}\sum_{\omega\in(\Omega_r)}\Big(ra^\dagger_\omega e^{-i(\Omega_r-\omega)t} + r^\dagger a_\omega e^{i(\Omega_r-\omega)t}\Big). \quad (15)$$

В последующем выводе кинетического уравнения открытой системы слагаемые от представленных операторов эффективных взаимодействий (13) позволяют в марковском приближении интерпретировать их как квантовые винеровские процессы с алгеброй определенной (8). Дальнейший вывод кинетического уравнения аналогичен приведенному выше и приводит к уравнению вида (10), для которого $H^{(eff-S)}(\tau) = 0$, а релаксационые операторы $\Gamma_A$ и $\Gamma_B$ определяют следующий вид их действия на матрицу плотности системы:

$$\Gamma_i\rho(\tau) = \overline{\gamma_i}\Big[-n_iY_i^\dagger\rho(\tau)Y_i - (n_i+1)Y_i\rho(\tau)Y_i^\dagger + \Big(\frac{n_i+1}{2}Y_i^\dagger Y_i + \frac{n_i}{2}Y_iY_i^\dagger\Big)\rho(\tau) + \rho(\tau)\Big(\frac{n_i+1}{2}Y_i^\dagger Y_i + \frac{n_i}{2}Y_iY_i^\dagger\Big)\Big], \quad (16)$$

где $i = c, r$, безразмерное время $\tau = \Omega_c t$, операторы $Y_c = c, Y_r = r$, безразмерные константы релаксации определены выражениями

$$\overline{\gamma_c} = \frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar^2\Omega_c^2}, \quad \overline{\gamma_r} = \frac{8\pi g^2\gamma_c^2}{\hbar^4\Omega_c^3\Omega_r},$$

а $n_c$, $n_r$ являются плотностями числа фотонов термостата на единицу безразмерной частоты на частотах $\Omega_c$ и $\Omega_r$ соответственно

Из представленного уравнения следует, что оба осциллятора развиваются независимо друг от друга в случае их несвязанного начального состояния. В то же время основной результат этого параграфа состоит в том, что даже изолированный осциллятор при нерезонансном взаимодействии с другим осциллятором может распадаться (накачиваться) в термостат основного осциллятора. При этом, однако, эффективное взаимодействие изолированного осциллятора с непосредственно невзаимодействующим с ним термостатом осуществляется в частотной области вблизи его собственной частоты. Поскольку сам эффект обусловлен квантовой интерференцией, он может быть явно и просто получен именно в рамках алгебраической теории возмущений, где и проявляются все особенности представленного метода вывода кинетического уравнения открытой системы. Особенно ярко этот же эффект проявляется при параметрическом взаимодействии осцилляторов, когда могут измениться не только скорость, но и сам характер релаксационного распада изолированного осциллятора [35].

## 4. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ ПРИ НЕРЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим постановку задачи в случае двух нерезонансно взаимодействующих осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своим термостатом. Вновь полагаем, что частоты осцилляторов сильно различаются и считаем выполненным условие на их собственные частоты $\Omega_r \ll \Omega_c$. По-прежнему считаем, что осциллятор на частоте $\Omega_c$ непосредственно квазирезонансно взаимодействует с термостатом $A$, а осциллятор с собственной частотой $\Omega_r$ соответственно с термостатом $B$. Однако теперь, согласно выводам предыдущего параграфа, на термостат $A$ воздействует как сам осциллятор на частоте $\Omega_c$, так и другой осциллятор, выделяя в термостате взаимодействие с фотонами на центральной частоте $\Omega_r$. Аналогичным образом с другим термостатом также теперь взаимодействуют оба осциллятора. Для явного представления этого факта выпишем исходный анализируемый гамильтониан в картине взаимодействия:

$$
\begin{gathered}
H(t) = V_{c-r}(t) + V_A(t) + V_B(t),\\
V_{c-r}(t) = g(ce^{-i\Omega_c t} + c^\dagger e^{i\Omega_c t})(re^{-i\Omega_r t} + r^\dagger e^{i\Omega_r t}),\\
V_A(t) = V_{c-A}(t) + V_{r-A}(t),\\
V_{c-A}(t) = \gamma_{cA}\sum_\omega (ce^{-i\Omega_c t} + c^\dagger e^{i\Omega_c t})(a_\omega^\dagger e^{i\omega t} + a_\omega e^{-i\omega t}),\\
V_{r-A}(t) = \gamma_{rA}\sum_\omega (re^{-i\Omega_r t} + r^\dagger e^{i\Omega_r t})(a_\omega^\dagger e^{i\omega t} + a_\omega e^{-i\omega t}),\\
V_B(t) = V_{c-B}(t) + V_{r-B}(t),\\
V_{c-B}(t) = \gamma_{cB}\sum_\omega (ce^{-i\Omega_c t} + c^\dagger e^{i\Omega_c t})(b_\omega^\dagger e^{i\omega t} + b_\omega e^{-i\omega t}),\\
V_{r-B}(t) = \gamma_{rB}\sum_\omega (re^{-i\Omega_r t} + r^\dagger e^{i\Omega_r t})(b_\omega^\dagger e^{i\omega t} + b_\omega e^{-i\omega t}).
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Здесь релаксационные константы взаимодействия выделенного термостата с соответствующими осцилляторами обозначены отвечающими им нижними индексами.

Поскольку непосредственное взаимодействие осцилляторов считается нерезонансным, оно проявится слагаемыми эффективного гамильтониана только второго порядка. В первом порядке возникают слагаемые, отвечающие только резонансному характеру взаимодействия каждого из осцилляторов исключительно с непосредственно взаимодействующим с ним термостатом, и этот оператор имеет вид:

$$
\tilde{H}^{(Eff),(1)}(t) = \gamma_{cA}\Big(\sum_{\omega\in(\Omega_c)} ca_\omega^\dagger e^{-i(\Omega_c-\omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\Omega_c-\omega)t}\Big) + \gamma_{rB}\Big(\sum_{\omega\in(\Omega_r)} rb_\omega^\dagger e^{-i(\Omega_r-\omega)t} + r^\dagger b_\omega e^{i(\Omega_r-\omega)t}\Big) \tag{18}
$$

Эти квазирезонансные взаимодействия определяют накачку и распад каждого из осцилляторов ввиду их резонансного характера взаимодействий со своими термостатами.

Во втором порядке возникают следующие слагаемые. Во-первых, это слагаемое, описывающее нерезонансное взаимодействие осцилляторов, что сводится к выражению (14). Во-вторых, это слагаемые второго порядка по константам взаимодействия осцилляторов с термостатами. Эти взаимодействия, как мы уже указывали, можно корректно исключить последующими последовательными дополнительными унитарными преобразованиями волнового вектора всей системы, поскольку они описывают лэмбовские и штарковские сдвиги во всех рассматриваемых системах.

Наконец, билинейные комбинации констант взаимодействий определяют слагаемые, отвечающие за возникновение новых каналов релаксации, обусловленных проявлением квантовой интерференции. Так, например, слагаемое эффективного гамильтониана, определяемого первым порядком взаимодействия осцилляторов между собой и от констант их взаимодействий с термостатом $A$, имеет следующий явный вид:

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}^{(1,1,0)}(t) = &-\frac{g\gamma_{cA}}{2\hbar}\sum_{\forall\omega\notin-\Omega_c}\Big(\frac{1}{\Omega_c+\omega} + \frac{2}{\Omega_c-\omega} + \frac{1}{\Omega_c+\Omega_r}\Big)\Big(a_\omega r^\dagger e^{-i(\omega-\Omega_r)t} + a_\omega^\dagger r e^{i(\omega-\Omega_r)t}\Big) -\\
&-\frac{g\gamma_{rA}}{2\hbar}\sum_{\forall\omega\notin-\Omega_r\wedge\Omega_r}\Big(\frac{1}{\Omega_r+\omega} + \frac{1}{\Omega_r-\omega} + \frac{1}{\Omega_c+\Omega_r} - \frac{1}{\Omega_c-\Omega_r}\Big)\Big(a_\omega c^\dagger e^{-i(\omega-\Omega_c)t} + a_\omega^\dagger c e^{i(\omega-\Omega_c)t}\Big).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Выражение (19) описывает взаимодействие осцилляторов с термостатом $A$, обусловленное как нерезонансным взаимодействием осцилляторов между собой, так и влиянием воздействия термостата на каждый из осцилляторов. Это представлено записью произведения соответствующих констант взаимодействий на операторы рождения и уничтожения другого осциллятора (принадлежащего другой частотной полосе, но выделенного термостата). Другие слагаемые взаимодействий подобного типа имеют аналогичный вид. Так, чтобы получить слагаемое взаимодействия осцилляторов на термостат $B$, нужно в выражении (19) сделать соответствующие замены $A \to B$, $a_\omega \to b_\omega$ и $c \leftrightarrow r$ во всех приведенных слагаемых. Аналогично случаю предыдущего раздела, эти слагаемые могут в дальнейшем выводе для кинетического уравнения в марковском приближении быть интерпретированы как квантовые винеровские процессы, где инкременты соответствующих процессов представляют сумму по двум непересекающимся частотным областям и, естественно, являются независимыми между собой и от другого источника.

Следуя рецепту рассуждении параграфа о резонансном взаимодействии осцилляторов, получаем кинетическое уравнение для открытой системы двух нерезонансно взаимодействующих осцилляторов, которое имеет вид (10). В этом уравнении $H^{(eff-S)} = 0$, а релаксационные операторы

$$\Gamma_A = \Gamma^c_A + \Gamma^r_A, \Gamma_B = \Gamma^c_B + \Gamma^r_B$$

следующим образом действуют на матрицу плотности осцилляторов:

$$\Gamma^\alpha_Q \rho^S = -\gamma^\alpha_Q \Big( n^\alpha_Q \alpha^\dagger \rho^S \alpha + (n^\alpha_Q + 1)\alpha \rho^S \alpha^\dagger \Big) + \\ + \gamma^\alpha_Q \Big( \frac{1}{2}\big( (n^\alpha_Q + 1)\alpha^\dagger \alpha \rho^S + n^\alpha_Q \alpha\alpha^\dagger \rho^S \big) + \frac{1}{2}\big( (n^\alpha_Q + 1)\rho^S \alpha^\dagger \alpha + n^\alpha_Q \rho^S \alpha\alpha^\dagger \big) \Big), \qquad (20)$$

где $Q = A,\, B$ — обозначение соответствующего термостата, индекс $\alpha = c, r$ отвечает соответствующему осциллятору открытой системы. Приведенные константы релаксации определены выражениями

$$\gamma^c_A = \frac{2\pi\gamma^2_{cA}}{\hbar^2\Omega^2_c}\Big(1 - \frac{g\gamma_{rA}}{\gamma_{cA}\hbar\Omega_r}\Big)^2,$$
$$\gamma^r_B = \frac{2\pi\gamma^2_{rB}}{\hbar^2\Omega_r\Omega_c}\Big(1 - \frac{2g\gamma_{cB}}{\gamma_{rB}\hbar\Omega_c}\Big)^2,$$
$$\gamma^r_A = \frac{8\pi g^2\gamma^2_{cA}}{\hbar^4\Omega^3_c\Omega_r}, \quad \gamma^c_B = \frac{9\pi g^2\gamma^2_{rB}}{2\hbar^4\Omega^2_c\Omega^2_r}.$$

Несимметрия в значениях коэффициентов обусловлена используемым условием на соотношения собственных частот осцилляторов. Нетрудно видеть, что отсутствие термостата осциллятора на частоте $\Omega_r$ осуществляется занулением констант релаксации $\gamma_{rB}, \gamma_{cB}$ и равенством нулю плотности числа фотонов $n^B_c = 0$. Для этого случая уравнение (20) в ведущих порядках переходит в уравнение (16) предыдущего раздела для релаксации изолированного осциллятора.

Из уравнения (20) следует система уравнений для средних чисел возбуждений осцилляторов, из которой следует факт независимого распада каждого из них:

$$\langle c^\dagger c(t)\rangle = \langle c^\dagger c\rangle_s \Big(1 - e^{-(\gamma^c_A + \gamma^c_B)t}\Big) + \langle c^\dagger c\rangle_0 e^{-(\gamma^c_A + \gamma^c_B)t},$$
$$\langle r^\dagger r(t)\rangle = \langle r^\dagger r\rangle_s \Big(1 - e^{-(\gamma^r_A + \gamma^r_B)t}\Big) + \langle r^\dagger r\rangle_0 e^{-(\gamma^r_A + \gamma^r_B)t}, \qquad (21)$$

где нижний индекс «0» отвечает начальному состоянию соответствующего осциллятора, а стационарные средние определены выражениями:

$$\langle c^\dagger c\rangle_s = \frac{n^c_A \gamma^c_A}{\gamma^c_A + \gamma^c_B}, \quad \langle r^\dagger r\rangle_s = \frac{n^r_B \gamma^r_A}{\gamma^r_A + \gamma^r_B}. \qquad (22)$$

Это обстоятельство означает, что влияние каждого из осцилляторов на термостат другого осциллятора проявляется только соответствующей константой релаксации и ни при каких обстоятельствах не может быть осуществлен поток от более холодного термостата к более горячему и второе начало термодинамики, естественно, выполнено.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе показана возможность использования метода алгебраической теории возмущений для простой модели двух взаимодействующих осцилляторов. Рассмотрено их резонансное и нерезонансное взаимодействия в системе, где каждый из осцилляторов взаимодействует и со своим термостатом. Показано, что, в отличие от работ других авторов, в рамках применения алгебраической теории возмущений не возникает никаких противоречий типа невыполнения второго начала термодинамики и других. Эти противоречия возникают ввиду некорректного учета действия осциллятора на термостат другого осциллятора соседа, что в рамках применения алгебраической теории возмущений появляется автоматически и не приводит к нефизическим последствиям.

Метод алгебраической теории возмущений в теории открытых квантовых систем не привлекает к описанию явлений каких-либо феноменологических представлений, а исходит из первых принципов и предположения о марковости взаимодействия открытой системы с резервуаром. Основным условием вывода кинетического уравнения динамики открытой системы является получение эффективного гамильтониана, который не содержит в представлении взаимодействия быстроизменяющихся временных слагаемых. Дальнейшее совмещение алгебраической теорией возмущений и метода квантовых стохастических уравнений, базирующегося на введении и адекватной интерпретации порождающего, уничтожающего, а при необходимости и считывающего процессов, приводит к возможности построения искомого кинетического уравнения открытой системы. Заметим, что при использовании резонансного приближения в первых порядках теории возмущения разные методы приводят к одинаковым результатам [16, 48, 49, 51, 52], а основные отличия возникают при учете проявления слагаемых более высоких порядков в основном кинетическом уравнении открытой системы. Эти слагаемые появляются в примененном методе учетом полного набора слагаемых, в том числе и антивращающих, в исходном взаимодействии без использования приближения вращающейся волны. Именно они и приводят к естественному появлению в уравнении новых каналов релаксации, обусловленных проявлением квантовой интерференции возникающих альтернатив. Подчеркнем, что такого рода слагаемые принципиально не могут быть получены посредством их феноменологического описания, они возникают именно благодаря используемому методу. Примеры такого рода открывающихся каналов взаимодействий часто опускают из рассмотрения, однако их проявление возможно и в других квантовых, не обязательно оптических системах.

---


[1] *Gersch H.A., Knollman G.C.* // Phys. Rev. **129**, 959 (1963).
[2] *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика, М.: Физматлит, 2000.
[3] *Перина Я.* // Квантовая оптика линейных и нелинейных оптических явлений. М.: Мир, 1987.
[4] *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003.
[5] *Шляйх В.П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005.
[6] *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
[7] *Копвиллем У.Х., Пранц С.В.* Поляризационное эхо. М.: Наука, 1985.
[8] *Weisskopf V., Wigner E.* // Z. Phys. **63**, 54 (1930).
[9] *Senitzky I.R.* // Phys. Rev. **119**, 670 (1960).
[10] *Senitzky I.R.* // Phys. Rev. **124**, 642 (1961).
[11] *Schwinger J.* // J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
[12] *Lax M.* // Phys. Rev. **145**, 110 (1966).
[13] *Lindblad G.* // Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
[14] *Gorini V., Frigerio A., Verri M., Kossakowski A., Sudarshan E.S.G.* // Rep. Math. Phys. **13**, 149 (1978).
[15] *Холево А.С.* // Квантовая вероятность и квантовая статистика, Итоги науки и техники, совр. проблемы математики, фундаментальные направления. ВИНИТИ, **83**, 3 (1991).
[16] *Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. М.-Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
[17] *Zwanzig R.* // J. Chem. Phys. **33**, 1338 (1960).
[18] *Zwanzig R.* // Phys. Rev. **124**, 983 (1961).
[19] *Аллен Л., Эберли Дж.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978.
[20] *Могилевцев Д.С., Килин С.Я.* Методы квантовой оптики. Минск: Беларусская наука, 2007.
[21] *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise. Berlin, Springer-Verlag, 2004.
[22] *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
[23] *Башаров А.М.* // ЖЭТФ **142**, 419 (2012).
[24] *Klimov A.B., Romero J.L., Delgado J., Sanchez-Soto L.L.* // J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **5**, 34 (2003).
[25] *Lalumiere K., Gambetta J.M., Blais A.* // Phys. Rev. A. **81**, 040301(R) (2010).
[26] *Boissonneault M., Gambetta J.M., Blais A.* // Phys. Rev. A. **79**, 013819 (2009).
[27] *Ogden C.D., Irish E.K., Kim M.S.* // Phys. Rev. A. **78**, 063805 (2008).
[28] *Walls D.F.* // Z. Phys. **234**, 231 (1970).
[29] *Levy A., Kozloff R.* // EPL. **107**, 20004 (2014).
[30] *Trushechkin A.S., Volovich I.V.* // EPL. **113**, 30005 (2016).
[31] *Teretenkov A.E.* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. **22**, 1930001 (2019).
[32] *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. Изд-во АН СССР, 1958.
[33] *Башаров А.М.* // ЖЭТФ. **158**, 978 (2020).
[34] *Трубилко А.И., Башаров А.М.* // ЖЭТФ. **156**, 407 (2019).
[35] *Трубилко А.И., Башаров А.М.* // Письма в ЖЭТФ. **110**, 110, 505 (2019).
[36] *Трубилко А.И., Башаров А.М.* // ЖЭТФ. **157**, 74 (2020).
[37] *А.М.Башаров, Трубилко А.И.* // ЖЭТФ. **160**, 498 (2021).
[38] *Башаров А.М., Трубилко А.И.* // ЖЭТФ. **160**, 865 (2021).
[39] *Алексашин М.К., Башаров А.М., Трубилко А.И.* // Изв. РАН. сер. физ. **87**, 1482 (2023).
[40] *Башаров А.М.* Фотоника. Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике. М.: МИФИ, 1990.
[41] *Башаров А.М., Маймистов А.И., Маныкин Э.А.* // ЖЭТФ. **84**, 487 (1983).
[42] *Иванова А.В., Меликян Г.Г.* // Хим. физ. **3**, 297 (1983).
[43] *Перлин Е.Ю., Федоров А.В., Кашевник М.Б.* // ЖЭТФ. **85**, 1357 (1983).
[44] *Basharov A.M.* // Phys. Rev. A. **84**, 013801 (2011).
[45] *Трубилко А.И., Башаров А.М.* // Письма в ЖЭТФ. **111**, 632 (2020).
[46] *Colla A., Breuer H.-P.* // Phys. Rev. A. **105**, 052216 (2022).
[47] *Trushechkin A.S.* // Phys. Rev. A. **103**, 062226 (2021).
[48] *Teretnkov A.E.* // Int. J. Mod. Phys. A. **37**, 243020 (2022).
[49] *Linowski T., Teretenkov A., Rudnicki L.* // Phys. Rev. A. **106**, 052206 (2022).
[50] *Andrejic P.,Palffy A.* // Phys. Rev. A. **104**, 033702 (2021).
[51] *Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. Springer-Verlag, 2002.
[52] *Teretenkov A.E.* // Entropy. **26**, 14 (2024).

## Quantum oscillator as a open system

**A.I. Trubilko**

*St. Petersburg State University of State Fire Service of Emercom of Russia*
*St. Petersburg, 196105 Russia*
*E-mail: trubilko.andrey@gmail.com*

The possibility of using the quantum oscillator model in the theory of open quantum systems is demonstrated by means of algebraic perturbation theory. The case of resonant and non-resonant interactions of two spatially separated oscillators is considered, each of which interacts with its own thermostat at different temperatures. The possibility of decay of an isolated oscillator during its non-resonant interaction into an oscillator-mediator in the environment of the latter is demonstrated. In all the cases presented, algebraic perturbation theory does not lead to any non-physical features or contradictions such as violation of the second law of thermodynamics and discrepancies in the description of these cases within the framework of the global and local approaches.

PACS: 42.50.Ct, 03.65.Yz
*Keywords*: quantum oscillator, quantum open system, algebraic perturbation theory.
*Received 25 Novemder 2024.*
English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

**Сведения об авторе**
Трубилко Андрей Игоревич — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: trubilko.andrey@gmail.com.