

Форм-фактор и среднеквадратический радиус векторного тока составной системы двух частиц произвольных масс и спинами $1/2$

Ю. Д. Черниченко^{1,*}

¹Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
кафедра «Высшая математика», Международный центр перспективных исследований
Республика Беларусь, 246746, г. Гомель, пр. Октября, д. 48
(Поступила в редакцию 15.04.2025; подписана в печать 22.04.2025)

Получены новые выражения компонент форм-фактора и среднеквадратического радиуса для векторного тока составной системы двух релятивистских частиц произвольных масс и спинами $1/2$. Рассмотрены псевдоскалярные, векторные и псевдовекторные составные системы и для них получено тождество, которое устанавливает зависимость между массами и спинами кварков, образующих составные системы. Вычислены значения среднеквадратического радиуса для векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов с кулоновским взаимодействием. Выполнен анализ и установлены различия и закономерности поведения среднеквадратического радиуса для векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов с кулоновским взаимодействием относительно различия масс кварков, образующих мезоны. Рассмотрение проводится в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

PACS: 11.55.Hx, 13.60.Nb, 11.55.Fv, 13.85.Lg, 13.85.Qk УДК: 539.1, 539.2

Ключевые слова: форм-фактор, среднеквадратический радиус, векторный ток, релятивистский квазипотенциальный подход, релятивистское конфигурационное представление, квантовая хромодинамика.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2540202](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2540202)

ВВЕДЕНИЕ

Изучение электромагнитных форм-факторов составных систем позволяет получать информацию об их пространственной структуре. Для описания электромагнитных форм-факторов составных систем используются различные подходы (см., например, работы [1–7]). Тем не менее задача ковариантного описания электромагнитных форм-факторов составных систем во всей области энергий, учитывающая спины и различия масс частиц (кварков), образующих составные системы, по-прежнему является актуальной. Для этого необходимо знать ковариантные волновые функции относительного движения кварков. Такой ковариантный подход был предложен в работах [8–11]. Разработанный в этих работах подход основан на релятивистском квазипотенциальном (РКП) подходе Логанова–Тавхелидзе, который был предложен ими в работе [12] и построен на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля. Естественным развитием этого подхода является подход, предложенный в работе [13]. Этот подход основан на РКП-подходе [14, 15], который не связан с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана–Дайсо-

на, а использует ковариантную гамильтонову формулировку квантовой теории поля [16–18]. Кроме того, этот вариант РКП-подхода позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению ($\mathbf{r}$ -представление), введенному в работе [19] для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс. При этом роль преобразования Фурье при переходе от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому $\mathbf{r}$ -представлению играет разложение по унитарным неприводимым представлениям группы Лоренца. Тем самым инвариантное описание пространственной структуры частиц проводится в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении, в котором модуль релятивистской относительной координаты $r = |\mathbf{r}|$ вводится с помощью разложений на группе Лоренца, нумерует собственные значения оператора Казимира группы Лоренца и, следовательно, является релятивистским инвариантом. Предложенный в работе [13] подход для инвариантного описания пространственной структуры частиц в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении учитывает как вклад в форм-фактор протона векторных мезонов, так и вклад от его центральной части, радиус которой равен комптоновской длине волны протона, играющей роль естественного масштаба. Возможность учета вклада центральной части протона в его форм-фактор, установленная в работе [13], бы-

* E-mail: chern@gstu.by chyud@mail.ru

ла использована в работе [20] для модификации его электромагнитного форм-фактора в модели векторной доминантности на малых расстояниях.

Два варианта ковариантных РКП-подходов — Логунова–Тавхелидзе [12] и Кадышевского [14, 15] — являются одними из эффективных ковариантных методов описания связанной системы двух релятивистских частиц, и они нашли широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний (см., например, работы [10, 11, 20–28]).

Так, в рамках трехмерного ковариантного формализма описания составных систем из двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс, развитого в [21] и основанного на РКП-подходе [12, 14], были получены для таких составных систем выражения упругих форм-факторов в [22, 23], представленные через ковариантные волновые РКП-функции относительного движения кварков в $\mathbf{r}$ -представлении [19]. Выражения упругих форм-факторов для скалярного и векторного токов связанной системы двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс были получены в работах [29, 30]. Здесь также был использован РКП-подход [14, 15], основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [16–18], путем перехода к трехмерному релятивистскому $\mathbf{r}$ -представлению для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс [31, 32].

Настоящая работа посвящена получению выра-

жений для упругого форм-фактора и среднеквадратического радиуса векторного тока составной системы двух фермионов произвольных масс и является продолжением работ [33, 34], в которых исследовались упругий форм-фактор и среднеквадратический радиус для скалярного и векторного токов составной системы двух фермионов равных масс. Как и в работах [33, 34], мы будем использовать РКП-подход [14, 15], основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [16–18], путем перехода к трехмерному релятивистскому $\mathbf{r}$ -представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс [31, 32].

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАДИАЛЬНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС

В основании нашего рассмотрения лежат полностью ковариантные РКП-уравнения в $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(\rho, \chi')$ составной системы с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц (кварков) произвольных масс m_1 и m_2 , взаимодействующих посредством сферически-симметричных квазипотенциалов. Эти РКП-уравнения в конечно-разностной и интегральной формах были построены в [35] и имеют следующий вид:¹

$$\left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch } \chi'\right) \varphi_\ell(\rho, \chi') = -V(\rho; \chi') \hat{A} \left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}\right) \varphi_\ell(\rho, \chi'), \quad (1)$$

$$\int_0^\infty d\chi (\text{sh } \chi)^{2\ell+2} (\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi) \left[\left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi}{\text{sh } \chi} \right) \right] \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \frac{1}{\text{sh } \chi} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin(\rho' \chi)}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi') = \quad (2)$$

$$= V(\rho; \chi') \int_0^\infty d\chi (\text{sh } \chi)^{2\ell+2} \hat{A}(\text{ch } \chi) \left[\left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi}{\text{sh } \chi} \right) \right] \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \frac{1}{\text{sh } \chi} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin(\rho' \chi)}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi').$$

Здесь

$$\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \text{ch} \left(i \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{2\rho(\rho+i)} \exp \left(i \frac{d}{d\rho} \right) \quad (3)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана²

$$\hat{H}_0 = 2m' \left[\text{ch} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{i}{\rho} \text{sh} \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{2\rho^2} \Delta_{\theta,\varphi} \exp \left(i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right], \quad (4)$$

являющегося конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\partial/\partial\rho)$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть, где $\rho = r/\lambda'$, а $\lambda' = 1/m'$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы с массой $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ и импульсом $\mathbf{q}'$, выступающей в качестве двухчастичной связанной системы [31, 32]; функция $(-\rho)^{(\ell)} = i^\ell \Gamma(\ell+i\rho)/\Gamma(i\rho)$ называется обоб-

¹ Аналогичные уравнения для случая двух спиновых частиц равных масс были получены в [36], а ранее в конечно-разностной форме в [37], но при ином определении волновой функции и квазипотенциала.

² Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой положено: $\hbar = c = 1$.

щенной степенью [19], где $\Gamma(z)$ — гамма-функция; χ' — быстрота, которая параметризует импульс $\Delta_{q',m'\lambda_Q}$ и энергию $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0$ эффективной релятивистской частицы и полную энергию M_Q составной системы соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta_{q',m'\lambda_Q} &= m' \operatorname{sh} \chi' \mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}, |\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}| = 1, \\ M_Q &= \frac{m'}{\mu} \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0, \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 = m' \operatorname{ch} \chi',\end{aligned}\quad (5)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса двух частиц произвольных масс; квазипотенциал $V(\rho; \chi')$ является локальным в смысле геометрии Лобачевского, причем модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$) — релятивистский инвариант [19], а оператор $\hat{A}$ дается выражением

$$\hat{A}(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}) = \frac{1}{4} \left[a' (\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}})^2 + b' \right]. \quad (6)$$

Спиновые параметры a' и b' в (6) выражаются через фактор

$$g' = \frac{m'}{2\mu} = \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{m_1 m_2}} \quad (7)$$

соотношениями

$$\begin{aligned}a' &= \begin{cases} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -\frac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases} \\ b' &= \begin{cases} 1 - g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5; \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu; \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu, \end{cases}\end{aligned}\quad (8)$$

причем значения спиновых параметров a' и b' в (8) при $m_1 = m_2 = m$ совпадают со значениями их аналогов a и b в работе [36], а при $a' = 0$ и $b' = 2/m'g'$ конечно-разностное РКП-уравнение (1) для спинного случая совпадает с его бесспиновым аналогом, полученным в работе [29]. Точно такое же соответствие имеется и для интегральных форм РКП-уравнений в спиновом [35] и в бесспиновом [38, 39] случаях.

Отметим, что временная, $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0$, и пространственная, $\Delta_{q',m'\lambda_Q}$, компоненты 4-вектора $\Delta_{q',m'\lambda_Q} = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q'$ из пространства Лобачевского, моделью которого служит верхняя полá массового гиперболоида

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = \Delta_{q',m'\lambda_Q}^{02} - \Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = m'^2, \quad (9)$$

а группа Лоренца является группой движения на его поверхности, подчиняются чистому преобразованию Лоренца («буст») $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1}$, которое дается выра-

жением

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q' &= \Delta_{q',m'\lambda_Q} = q'(-) m' \lambda_Q = \\ &= q' - \lambda_Q \left(q'_0 - \frac{\mathbf{q}' \cdot \lambda_Q}{1 + \lambda_Q^0} \right), \\ (\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q')^0 &= \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 = q'_0 \lambda_Q^0 - \mathbf{q}' \cdot \lambda_Q = \\ &= \sqrt{m'^2 + \Delta_{q',m'\lambda_Q}^2},\end{aligned}\quad (10)$$

где $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2} - 4$ -вектор скорости составной частицы с 4-импульсом $Q = q_1 + q_2$, а $q_i, i = 1, 2$ — 4-импульсы составляющих.

Развитый в [35, 36] подход позволил найти точные решения РКП-уравнений (1) и (2) с кулоновским (хромодинамическим) потенциалом

$$V_{\text{Coul}} = -\frac{\alpha_s}{r}, \alpha_s > 0, \quad (11)$$

которому в импульсном пространстве Лобачевского соответствует его образ

$$\tilde{V}(\chi_\Delta) \sim \frac{1}{\chi_\Delta \operatorname{sh} \chi_\Delta},$$

где квадрат переданного 4-импульса t связан с быстротой χ_Δ соотношением

$$t = (\mathcal{P} - Q)^2 = -Q^2 = 2M^2 (1 - \operatorname{ch} \chi_\Delta). \quad (12)$$

При больших $-t = Q^2$ в соответствии с выражением (12) быстрота $\chi_\Delta \approx \ln(Q/M)^2$ и, следовательно, потенциал $\tilde{V}(\chi_\Delta)$ ведет себя как $[(Q/M)^2 \ln(Q/M)^2]^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ — инвариантный заряд. Такое КХД-подобное поведение потенциала (11) в РКП-подходе впервые было отмечено в работе [40]. Кулоновский (хромодинамический) потенциал (11) в случае взаимодействия $\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu$ является определяющим [37, 41], а возможность его использования как образа кулоновской части фейнмановского матричного элемента (квазипотенциала), содержащего все спиновые эффекты, была детально рассмотрена в работах [42–44]. В частности, опираясь на точное решение полностью ковариантного интегрального РКП-уравнения (2) для составной системы с кулоновским взаимодействием (11) и с относительным орбитальным моментом $\ell = 0$, найденного в работе [35], можно с помощью теории вычетов при $\chi' = i\kappa_1$ получить выражение для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1)$, отвечающей основному уровню ($n = 1$) s -состояния ($\ell = 0$) составной системы с кулоновским взаимодействием (11) и не содержащей i -периодических констант (см. приложение). Результирующее выражение для $\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1)$ имеет вид:³

$$\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1) = C_0^{(1)}(\kappa_1) (\rho - \rho'_{\kappa_1}) e^{-\kappa_1(\rho - \rho'_{\kappa_1})}, \quad (13)$$

³ Решение спектральной задачи, основанное на конечно-раз-

где

$$\rho'_{\kappa_1} = \frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{2} \cos \kappa_1, \quad M_1 = 2m' g' \cos \kappa_1, \quad (14)$$

$$0 < \kappa_1 < \pi/2, \quad \tilde{\alpha}'_s = m' \alpha_s,$$

нормировочный множитель $C_0^{(1)}(\kappa_1)$ находится из условия нормировки

$$4\pi \int_0^\infty dr |\varphi_0^{(1)}(r, \kappa_1)|^2 = 1, \quad (15)$$

а быстрота κ_1 для s -состояния составной системы двух фермионов произвольных масс с потенциалом (11) находится из условия квантования уровней энергии [35], которое для основного уровня дается выражением

$$\tilde{\alpha}'_s(b' + a' \cos^2 \kappa_1) = 4 \sin \kappa_1. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} | J_\nu | \mathcal{Q} \rangle = & - \frac{z_1}{\sqrt{M_P M_Q} (4\pi)^3} \int \frac{d\tau_P d\tau_Q d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_1}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}_2^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}'_1^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{\Gamma_{M_P}^*(\mathcal{P} k_2)}{\tau_P + i\varepsilon} \times \\ & \times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}'_1 + m_1)\hat{O}(\hat{k}_2 - m_2)](k_1 + k'_1)_\nu \frac{\Gamma_{M_Q}(\mathcal{Q} k_2)}{\tau_Q - i\varepsilon} \times \\ & \times \delta^{(4)}(-\mathcal{Q} + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q) \delta^{(4)}(\mathcal{P} - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (18)$$

Выражению (18) отвечает диаграмма на рис. 1⁵: штриховые линии соответствуют квазичастицам-шпуронам, а сплошные линии — ее составляющим, которые переносят 4-импульсы $k'_1, k_i, i = 1, 2$, $\hat{k}_i = k_i^\mu \gamma_\mu$ — свертка компонент 4-импульса k_i i -й составляющей массы m_i ($i = 1, 2$) с матрицами Дирака γ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), причем все 4-импульсы при-

Из (13) и (15) находим:

$$\pi |C_0^{(1)}(\kappa_1) e^{\kappa_1 \rho'_{\kappa_1}}|^2 = \frac{m' \kappa_1^3}{2\kappa_1^2 \rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1 \rho'_{\kappa_1} + 1}. \quad (17)$$

2. ФОРМ-ФАКТОР ВЕКТОРНОГО ТОКА СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС

Следуя работам [22, 23], основанными на работах [8–11], матричному элементу локального оператора векторного тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний с 4-импульсами $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$ двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс может быть сопоставлено инвариантное выражение:⁴

надлежат верхним полкам массовых гиперболоидов

$$k_i^2 = k_{i0}^2 - \mathbf{k}_i^2 = m_i^2, i = 1, 2. \quad (19)$$

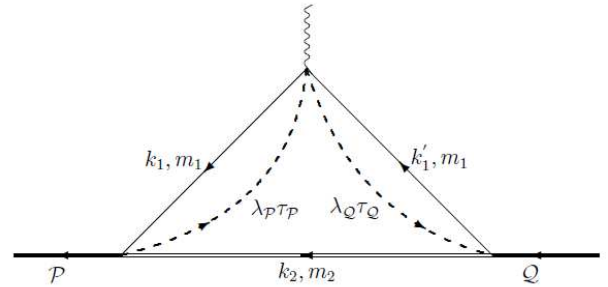


Рис. 1. Диаграмма для матричного элемента оператора векторного тока между связанными состояниями с 4-импульсами $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$ для случая двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс

В качестве векторов 4-скорости составной частицы выбраны векторы $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = \mathcal{Q}/\sqrt{\mathcal{Q}^2} = \mathcal{Q}/M_Q$, $M_Q^2 = s_q = \mathcal{Q}^2 = (q_1 + q_2)^2$ и $\lambda_P = (\lambda_P^0; \lambda_P) = \mathcal{P}/\sqrt{\mathcal{P}^2} = \mathcal{P}/M_P$, $M_P^2 = s_p = \mathcal{P}^2 = (p_1 + p_2)^2$. Значение шпура в (18) с матрицами $\hat{O} = \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ дается выражением

$$\begin{aligned} \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}'_1 + m_1)\hat{O}(\hat{k}_2 - m_2)] = \\ = -4(\tilde{a}m_2 k_1 k'_1 + \tilde{b}m_1 k_1 k_2 + \tilde{b}m_1 k'_1 k_2 + \tilde{a}m_2 m_1^2), \end{aligned} \quad (20)$$

ностной форме РКП-уравнения в $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции основного уровня s -состояния связанной системы двух фермионов произвольных масс и с тем же взаимодействием (11), приводит к такому же по форме решению, но с точностью до i -периодических констант.

⁴ Напомним, что для простоты рассмотрения в работе [35], как и в работах [36, 37], считалось, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $\hat{O} \otimes \hat{O}$, а вершинные функции $\Gamma_P^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$ и $\Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$ также имеют спинорную структуру, пропорциональную матрице $\hat{O}$, т.е.

$$\Gamma_P^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P) = \hat{O}^{\alpha\beta} \Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P),$$

$$\Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q) = \hat{O}^{\delta\kappa} \Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q),$$

где $\alpha, \beta, \delta, \kappa$ — биспинорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, причем матрица $\hat{O}$ не зависит от импульсных переменных и шпур $\text{Sp}[\hat{O}^+ \hat{O}] \neq 0$, а в качестве $\hat{O}$ выбираются матрицы Дирака $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) (подробности см. в работах [33–36]).

⁵ Отметим, что из-за перехода к различным собственным временам системы до (τ_Q) и после взаимодействия (τ_P) диаграмма на рис. 1 отличается от диаграмм, которые возникают в подходе Кадышевского для S -матрицы. Также будут различны и векторы 4-скорости составной частицы до, λ_Q , и после взаимодействия, λ_P .

которое при $m_1 = m_2 = m$ совпадает с аналогичным выражением для шпура и с теми же значениями спиновых параметров $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, что и для случая равных масс [33, 34]:

$$\tilde{a} = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5, (\text{псевдоскаляр}); \\ 4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu, (\text{вектор}); \\ 4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu, (\text{псевдовектор}); \end{cases} \quad (21)$$

$$\tilde{b} = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5; \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu; \\ -2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu. \end{cases}$$

Для связанной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс, которая находится в состоянии движения с относительным орбитальным моментом J , выполняются условия коллинеарности $\lambda_Q \uparrow\uparrow Q$, $\lambda_P \uparrow\uparrow P$ и законы сохранения:

$$\begin{aligned} -Q + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q &= 0, \\ P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Поэтому скалярные части $\Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q) = \Gamma_{M_Q}(Q k_2)$ и $\Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P) = \Gamma_{M_P}(P k_2)$ вершинных функций $\Gamma_P^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$ и $\Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$ зависят каждая, как это было показано в работах [29, 30, 33, 34], только от одного скалярного лоренц-инвариантного параметра, в качестве которого выбраны $Q k_2$ и $P k_2$.

Теперь отметим, что в 4-векторе (18) будет присутствовать и его поперечная составляющая, которая приводит к нарушению условия поперечности [30, 34]:

$$(P - Q)^\nu < P | J_\nu | Q > = 0.$$

$$\begin{aligned} F^{(+)}(t) = & -\frac{z_1 G(\chi_\Delta)}{M(4M^2 - t)(4\pi)^3} \int \frac{d\tau_P d\tau_Q d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_1}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}_2^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}'_1{}^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{\Gamma_{M_P}^*(P k_2)}{\tau_P + i\varepsilon} \times \\ & \times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}'_1 + m_1)\hat{O}(\hat{k}_2 - m_2)](P + Q)(k_1 + k'_1) \frac{\Gamma_{M_Q}(Q k_2)}{\tau_Q - i\varepsilon} \times \\ & \times \delta^{(4)}(-Q + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q) \delta^{(4)}(P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P) + (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} F^{(-)}(t) = & -\frac{z_1 G(\chi_\Delta)}{itM(4\pi)^3} \int \frac{d\tau_P d\tau_Q d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_1}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}_2^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}'_1{}^2} \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{\Gamma_{M_P}^*(P k_2)}{\tau_P + i\varepsilon} \times \\ & \times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}'_1 + m_1)\hat{O}(\hat{k}_2 - m_2)](P - Q)(k_1 + k'_1) \frac{\Gamma_{M_Q}(Q k_2)}{\tau_Q - i\varepsilon} \times \\ & \times \delta^{(4)}(-Q + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q) \delta^{(4)}(P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (27)$$

В выражениях (26) и (27) выполним чистые преобразования Лоренца $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1}$ и $\Lambda_{\lambda_P}^{-1}$ по формулам (10) соответственно в интегралах по $\mathbf{k}'_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_1$ и учтем, что $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} Q = (M_Q; \mathbf{0})$, $\Lambda_{\lambda_P}^{-1} P = (M_P; \mathbf{0})$, $Q k_2 = M_Q \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^0$, $P k_2 = M_P \Delta_{k_2, m_2 \lambda_P}^0$, а меры ин-

тегрирования, полная энергия и δ -функции в (26) и (27) на массовых гиперболоидах (19) инвариантны при преобразованиях Лоренца $\Lambda_{\lambda_{Q(P)}}^{-1}$ (подробности см. в работах [29, 30, 33, 34]). Кроме того, при преобразованиях Лоренца $\Lambda_{\lambda_{Q(P)}}^{-1}$ из законов сохранения (22) следуют формулы ($M_Q = M_P = M$):

$$\begin{aligned} G(\chi_\Delta) \langle P | J_\nu | Q \rangle &= F^{(+)}(t) (P + Q)_\nu + \\ &+ i F^{(-)}(t) (P - Q)_\nu, \end{aligned} \quad (23)$$

где квадрат переданного 4-импульса t связан с быстротой χ_Δ соотношением (12), а фактор

$$G(\chi_\Delta) = \frac{\chi_\Delta}{\text{sh } \chi_\Delta} \quad (24)$$

— релятивистский геометрический фактор, возникающий в РКП-подходе [14]. Фактор (24) впервые обоснованно появился в работе [13] для инвариантного описания пространственной структуры частиц в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении [19]. Фактор (24) имеет ясный физический смысл, поскольку, как было показано в работе [13], он описывает величину вклада в форм-фактор нуклона от его центральной сферы, внутри которой движутся кварки, с радиусом, равным его комптоновской длине волны ($r_0 = 1/M$). В нерелятивистском пределе ($\chi_\Delta \rightarrow 0$) $G(\chi_\Delta) \rightarrow 1$, что отвечает точечной частице. Таким образом, фактор (24) служит мерой вклада релятивистских эффектов, обусловленных динамикой кварков.

При $Q^2 = M_Q^2$ и $P^2 = M_P^2$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} t &= (P - Q)^2 = -Q^2 = M_Q^2 + M_P^2 - 2PQ, \\ (P + Q)^2 &= M_Q^2 + M_P^2 + 2PQ = 2(M_Q^2 + M_P^2) - t. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (23) и (25), выражения для компонент упругого форм-фактора в 4-векторе (18) принимают вид ($M_Q = M_P = M$):

$$\begin{aligned}
 \tau_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})} + M_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})} &= \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}}}, \quad \Delta_{k'_1, m_1 \lambda_{\mathcal{Q}}} = -\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}, \quad \Delta_{k_1, m_1 \lambda_{\mathcal{P}}} = -\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}, \\
 (\mathcal{P} \pm \mathcal{Q})(k_1 + k'_1) &= M \left[1 - \frac{t}{2M^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}}} \right] \left(\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} \pm \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}}} \right), \\
 2k_1 k_2 &= s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} - m_1^2 - m_2^2, \quad 2k'_1 k_2 = s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}} - m_1^2 - m_2^2, \\
 2k_1 k'_1 &= 2m_1^2 - s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} - s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}} + 2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}}, \\
 \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}}} &= \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}^2} + \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}^2}, \quad \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}^0 = \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}^2},
 \end{aligned} \tag{28}$$

которые также позволяют представить шпур в (20) в виде

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m_1)(\hat{k}'_1 + m_1)\hat{O}(\hat{k}_2 - m_2)] &= -2 \left[4\tilde{a}m_1^2 m_2 - 2\tilde{b}m_1(m_1^2 + m_2^2) + \right. \\
 &\left. + 2\tilde{a}m_2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + (\tilde{b}m_1 - \tilde{a}m_2) (s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} + s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}) \right].
 \end{aligned} \tag{29}$$

В результате выражения (26) и (27) с учетом равенств (28) и (29) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 F^{(+)}(t) &= \frac{2z_1 G(\chi_{\Delta})}{(4M^2 - t)(4\pi)^3} \int \frac{d\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}{\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}^2}} \times \\
 &\times \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{P}}}^*(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}})}{M_{\mathcal{P}} - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}}} - i\varepsilon} \left[4\tilde{a}m_1^2 m_2 - 2\tilde{b}m_1(m_1^2 + m_2^2) + \right. \\
 &\left. + 2\tilde{a}m_2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + (\tilde{b}m_1 - \tilde{a}m_2) (s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} + s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}) \right] \times \\
 &\times \left[1 - \frac{t}{2M^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}}} \right] \left(\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}}} \right) \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}})}{M_{\mathcal{Q}} - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + i\varepsilon} + (1 \leftrightarrow 2),
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 F^{(-)}(t) &= \frac{2z_1 G(\chi_{\Delta})}{it(4\pi)^3} \int \frac{d\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}{\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}^2}} \times \\
 &\times \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{P}}}^*(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}})}{M_{\mathcal{P}} - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}}} - i\varepsilon} \left[4\tilde{a}m_1^2 m_2 - 2\tilde{b}m_1(m_1^2 + m_2^2) + \right. \\
 &\left. + 2\tilde{a}m_2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + (\tilde{b}m_1 - \tilde{a}m_2) (s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} + s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}) \right] \times \\
 &\times \left[1 - \frac{t}{2M^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}} s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}}} \right] \left(\sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}}} \right) \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}})}{M_{\mathcal{Q}} - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}}} + i\varepsilon} + (1 \leftrightarrow 2),
 \end{aligned} \tag{31}$$

где введены обозначения

$$\Gamma_{M_{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}k_2) = \Gamma_{M_{\mathcal{P}}}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{P}}}), \quad \Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{Q}k_2) = \Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}}).$$

Далее в выражениях (30) и (31) выполним замену переменных вида [29, 30]:

$$\Delta_{k_2, m_2 \lambda_{\mathcal{Q}}} = g' \Delta_{k', m' \lambda_{\mathcal{Q}}} \frac{\sqrt{4\mu^2 + \Delta_{k', m' \lambda_{\mathcal{Q}}}^2}}{\Delta_{k', m' \lambda_{\mathcal{Q}}}^0} \tag{32}$$

и учетом соотношения

$$\begin{aligned}
 \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q(P)}^2} &= g' f_+^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}), \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q(P)}^2} = g' f_-^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}), \\
 m_1 > m_2, m_1 &= m'(g' + \sqrt{g'^2 - 1}), m_2 = m'(g' - \sqrt{g'^2 - 1}); \\
 \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q(P)}^2} &= g' f_-^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}), \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q(P)}^2} = g' f_+^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}), \\
 m_1 < m_2, m_1 &= m'(g' - \sqrt{g'^2 - 1}), m_2 = m'(g' + \sqrt{g'^2 - 1}); \\
 M_Q &= 2g' \Delta_{q', m' \lambda_Q}^0, M_P = 2g' \Delta_{p', m' \lambda_P}^0, \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q(P)}}} = 2g' \Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^0, \\
 \frac{d\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}{\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2}} &= g' \frac{d\Delta_{k', m' \lambda_Q}}{\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0} f(\Delta_{k', m' \lambda_Q}),
 \end{aligned} \tag{33}$$

где энергия $\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^0$ и импульс $\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}$ определены выражениями (5), (9) и (10) и введены функции

$$f_{\pm}(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}) = \frac{\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^0}{\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^{02} \pm m'^2 \sqrt{1 - g'^{-2}}}, \quad f(\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}) = \frac{\sqrt{4\mu^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^2}}{\Delta_{k', m' \lambda_Q(P)}^{02}}. \tag{34}$$

Наконец, в выражениях (30) и (31) введем, как и в бесспиновом случае [29, 30], волновую РКП-функцию в пространстве импульсов $\Psi_M(\Delta_{k', m' \lambda_Q})$, которая связана со скалярной частью вершинной функции $\Gamma_{M_Q}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}) = \Gamma_{M_Q}(\Delta_{k', m' \lambda_Q})$ выражением

$$\Psi_M(\Delta_{k', m' \lambda_Q}) = \frac{f(\Delta_{k', m' \lambda_Q}) \Gamma_{M_Q}(\Delta_{k', m' \lambda_Q})}{2^{3/2} \sqrt{m'} (2\Delta_{q', m' \lambda_Q}^0 - 2\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0 + i\varepsilon)}. \tag{35}$$

Тогда выражения (30) и (31) с учетом соотношений (32)–(35) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 F^{(+)}(t) &= \frac{(2m')^4 (z_1 + z_2) G(\chi_{\Delta})}{(4M^2 - t)(2\pi)^3} \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)^2 \int d\Omega_{\Delta_{k', m' \lambda_Q}} \Psi_M^*(\Delta_{k', m' \lambda_P}) \times \\
 &\times \left\{ \left[2\tilde{a} g'^2 \frac{\Delta_{k', m' \lambda_P}^0 \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'^2} + \frac{1}{1 - \frac{t}{2M^2}} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b} g'^2 + g'^2 (\tilde{b} - \tilde{a}) \frac{\Delta_{k', m' \lambda_P}^{02} + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^{02}}{m'^2} \right) \right] \times \right. \\
 &\times \left[\frac{f_+(\Delta_{k', m' \lambda_P}) + f_-(\Delta_{k', m' \lambda_P})}{2f(\Delta_{k', m' \lambda_P})} + \frac{m'^2 \sqrt{g'^2 - 1} (f_+(\Delta_{k', m' \lambda_P}) - f_-(\Delta_{k', m' \lambda_P}))}{2g' f(\Delta_{k', m' \lambda_P}) \Delta_{k', m' \lambda_P}^0 \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)} \right] + \\
 &+ \left[-2\tilde{a} g'^2 \frac{\Delta_{k', m' \lambda_P}^0 \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'^2} + \frac{1}{1 - \frac{t}{2M^2}} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b} g'^2 + g'^2 (\tilde{b} + \tilde{a}) \frac{\Delta_{k', m' \lambda_P}^{02} + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^{02}}{m'^2} \right) \right] \times \\
 &\times \left[\frac{m'^2 (g'^2 - 1) (f_+(\Delta_{k', m' \lambda_P}) + f_-(\Delta_{k', m' \lambda_P}))}{2g'^2 f(\Delta_{k', m' \lambda_P}) \Delta_{k', m' \lambda_P}^0 \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)} + \frac{\sqrt{g'^2 - 1} (f_+(\Delta_{k', m' \lambda_P}) - f_-(\Delta_{k', m' \lambda_P}))}{2g' f(\Delta_{k', m' \lambda_P})} \right] \Big\} \times \\
 &\times \frac{\Delta_{k', m' \lambda_P}^0 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'} \Psi_M(\Delta_{k', m' \lambda_Q}), \tag{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{(-)}(t) = & \frac{(2m')^4(z_1 + z_2)G(\chi_\Delta)}{-it(2\pi)^3} \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)^2 \int d\Omega_{\Delta_{k',m'\lambda_Q}} \Psi_M^*(\Delta_{k',m'\lambda_P}) \times \\
 & \times \left\{ \left[2\tilde{a}g'^2 \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'^2} + \frac{1}{1 - \frac{t}{2M^2}} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 + g'^2 (\tilde{b} - \tilde{a}) \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^{02} + \Delta_{k',m'\lambda_Q}^{02}}{m'^2} \right) \right] \times \right. \\
 & \times \left[\frac{f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) + f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P})}{2f(\Delta_{k',m'\lambda_P})} + \frac{m'^2 \sqrt{g'^2 - 1} (f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) - f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P}))}{2g'f(\Delta_{k',m'\lambda_P}) \Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)} \right] + \\
 & + \left[-2\tilde{a}g'^2 \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'^2} + \frac{1}{1 - \frac{t}{2M^2}} \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 + g'^2 (\tilde{b} + \tilde{a}) \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^{02} + \Delta_{k',m'\lambda_Q}^{02}}{m'^2} \right) \right] \times \\
 & \times \left[\frac{m'^2 (g'^2 - 1) (f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) + f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P}))}{2g'^2 f(\Delta_{k',m'\lambda_P}) \Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)} + \frac{\sqrt{g'^2 - 1} (f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) - f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P}))}{2g'f(\Delta_{k',m'\lambda_P})} \right] \Big\} \times \\
 & \times \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 - \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'} \Psi_M(\Delta_{k',m'\lambda_Q}), \quad (37)
 \end{aligned}$$

где $d\Omega_{\Delta_{k',m'\lambda_Q}} = m' d\Delta_{k',m'\lambda_Q} / \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, причем теперь все 4-импульсы принадлежат верхней полé массового гиперboloида (9), которая погружена в 4-мерное импульсное пространство и служит моделью этого релятивистского неевклидова пространства импульсов, а группа Лоренца на этой поверхности является его группой движения, осуществляющая трансляцию в этом пространстве импульсов. Роль плоских волн, соответствующих этим трансляциям в пространстве Лобачевского, выполняют функции Шапиро [45, 46]:

$$\xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) = \left(\frac{\Delta_{k',m'\lambda_Q}^0 - \Delta_{k',m'\lambda_Q} \cdot \mathbf{n}}{m'} \right)^{-1 - ir/\lambda'}. \quad (38)$$

Эти функции соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и в нерелятивистском пределе ($|\Delta_{k',m'\lambda_Q}| \ll 1/\lambda', r \gg \lambda'$) $\xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \rightarrow \exp(i\Delta_{k',m'\lambda_Q} \cdot \mathbf{r})$. Кроме того, функции (38) удовлетворяют условиям полноты и ортогональности:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{k',m'\lambda_Q}} \xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \\
 & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \xi(\Delta_{q',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) = \frac{\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0}{m'} \delta(\Delta_{k',m'\lambda_Q} - \Delta_{q',m'\lambda_Q}),
 \end{aligned} \quad (39)$$

и уравнению с оператором свободного гамильтониана (4):

$$(\hat{H}_0 - 2\Delta_{k',m'\lambda_Q}^0) \xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) = 0. \quad (40)$$

Заметим, что вектор $\Delta_{k',m'\lambda_P}$ из пространства Лобачевского может быть представлен в виде

$$\Delta_{k',m'\lambda_P} = \mathbf{k}'(-)m'\lambda_P = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \mathbf{k}' = V(\Lambda_{\lambda_Q}, \mathcal{P}) \Delta_{k',m'\lambda_Q}(-) \frac{m'}{M} \Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}. \quad (41)$$

Здесь $V(\Lambda_{\lambda_Q}, \mathcal{P}) = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \Lambda_{\lambda_Q} \Lambda_{\Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}}$ — матрица вигнеровского вращения, $\Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} \mathcal{P}$ — 4-вектор передачи импульса в пространстве Лобачевского с компонентами

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} &= \Lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{P} = \mathcal{P}(-) \mathcal{Q} = \mathcal{P} - \frac{\mathcal{Q}}{M} \left(\mathcal{P}_0 - \frac{\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}_0 + M} \right) = M \operatorname{sh} \chi_\Delta \mathbf{n}_\Delta, \\
 \Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^0 &= (\Lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{P})^0 = \frac{\mathcal{P}_0 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}}{M} = \frac{\mathcal{P} \mathcal{Q}}{M} = M \operatorname{ch} \chi_\Delta, \\
 \mathcal{P} &= M \operatorname{sh} \chi_{\mathcal{P}} \mathbf{n}_{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{Q} = M \operatorname{sh} \chi_{\mathcal{Q}} \mathbf{n}_{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{P}_0 = M \operatorname{ch} \chi_{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{Q}_0 = M \operatorname{ch} \chi_{\mathcal{Q}}, \\
 |\mathbf{n}_{\mathcal{P}}| &= |\mathbf{n}_{\mathcal{Q}}| = |\mathbf{n}_\Delta| = 1, \quad \Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^{02} - \Delta_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^2 = M^2,
 \end{aligned} \quad (42)$$

где $\chi_\Delta, \chi_P, \chi_Q$ — соответствующие быстроты, а вектор передачи импульса $\Delta_{P,Q}$ в (42) связан с квадратом переданного 4-импульса t и быстротой χ_Δ , согласно (12), выражением

$$Q^2 = -t = -2M^2 + 2M\sqrt{M^2 + \Delta_{P,Q}^2} = 2M^2 (\text{ch } \chi_\Delta - 1). \quad (43)$$

Из выражений (41) и (42) также следует, что

$$\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \approx \frac{m'^2 \Delta_{P,Q}^0}{2M \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}. \quad (44)$$

Тогда, принимая во внимание выражения (34) и (42)–(44), факторы в (36) и (37) можно упростить к виду

$$\begin{aligned} \frac{f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) + f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P})}{2f(\Delta_{k',m'\lambda_P})} &\approx 1 + \frac{m'^2(g'^2 - 1)}{2g'^2 \Delta_{k',m'\lambda_P}^2} \approx 1 + \frac{8M^4(g'^2 - 1)}{g'^2(2M^2 - t)^2} \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'^2}, \\ \frac{f_+(\Delta_{k',m'\lambda_P}) - f_-(\Delta_{k',m'\lambda_P})}{2f(\Delta_{k',m'\lambda_P})} &\approx -\frac{m'^2 \sqrt{g'^2 - 1}}{g' \Delta_{k',m'\lambda_P}^2} \approx -\frac{16M^4 \sqrt{g'^2 - 1}}{g'(2M^2 - t)^2} \frac{\Delta_{k',m'\lambda_P}^0 \Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'^2}, \\ \frac{m' \sqrt{m'^2 - 4\mu^2}}{m'^2 + \Delta_{k',m'\lambda_P}^2} &< 1, \quad \frac{m'^2 - 4\mu^2}{4\mu^2 + \Delta_{k',m'\lambda_P}^2} < 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, соотношения (41)–(45) означают, что выражения (36) и (37) являются функциями инвариантной переменной $\Delta_{P,Q}^2$, а следовательно, они представляют собой свертки волновых РКП-функций в пространстве импульсов. Значит, принимая во внимание соотношения (44), (45) и применяя к волновым функциям $\Psi_M(\Delta_{k',m'\lambda_{Q(P)}})$ в выражениях (36) и (37) преобразования Шапиро [45, 46]

$$\psi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{k',m'\lambda_Q}} \xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \Psi_M(\Delta_{k',m'\lambda_Q}), \quad \Psi_M(\Delta_{k',m'\lambda_Q}) = \int d\mathbf{r} \xi^*(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \psi_M(\mathbf{r})$$

а также используя условие эрмитовости оператора свободного гамильтониана (4), теорему сложения для релятивистских плоских волн (38) [32],

$$\int d\omega_n \xi(\Delta_{P',m'\lambda_Q}(-)\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) = \int d\omega_n \xi(\Delta_{P',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}),$$

условие полноты (39) и уравнение (40), компоненты $F^{(\pm)}(t)$ можно представить в виде релятивистских фурье-образов от ковариантных волновых РКП-функций $\psi_M(\mathbf{r})$ (подробности см. в работах [29, 30, 33, 34])⁶. Результаты удобно записать в виде:

$$\begin{aligned} F^{(+)}(t) &= \frac{2(2m')^4(z_1 + z_2)G(\chi_\Delta)}{4M^2 - t} \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right) \int d\mathbf{r} \xi^*\left(\frac{m'}{M} \Delta_{P,Q}, \mathbf{r}\right) \times \\ &\times \text{Re} \left\{ R_1^{(+)}(r, \chi') - \frac{t}{2M^2} R_0(r, \chi') + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)^2} \left[R_2^{(+)}(r, \chi') - \frac{t}{2M^2} R_3(r, \chi') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} F^{(-)}(t) &= \frac{2(2m')^4(z_1 + z_2)G(\chi_\Delta)}{-t} \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right) \int d\mathbf{r} \xi^*\left(\frac{m'}{M} \Delta_{P,Q}, \mathbf{r}\right) \times \\ &\times \text{Im} \left\{ R_1^{(-)}(r, \chi') - \frac{t}{2M^2} R_0(r, \chi') + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2 \left(1 - \frac{t}{2M^2}\right)^2} \left[R_2^{(-)}(r, \chi') - \frac{t}{2M^2} R_3(r, \chi') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

⁶ Аналогичный подход был использован для получения выражений форм-факторов для скалярного и векторного то-

ков как в случае двух бесспиновых частиц произвольных масс [29, 30], так и спиновых частиц равных масс [33, 34].

где введены функции

$$\begin{aligned}
 R_0(r, \chi') &= 2\tilde{a}g'^2 \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}), \quad R_1^{(+)}(r, \chi') = (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \psi_M(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) \right)^* + \\
 &+ g'^2 (\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) + g'^2 (\tilde{b} - \tilde{a}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^*, \\
 R_2^{(+)}(r, \chi') &= (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \psi_M(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) \right)^* + g'^2 (\tilde{b} - \tilde{a}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) - \\
 &- (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) + g'^2 (\tilde{a} + \tilde{b}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* + \\
 &+ g'^2 (3\tilde{a} - \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) - g'^2 (3\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^4 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}), \\
 R_3(r, \chi') &= -2\tilde{a}g'^2 \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) + 6\tilde{a}g'^2 \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}), \\
 R_1^{(-)}(r, \chi') &= (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \psi_M(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) \right)^* + \\
 &+ g'^2 (3\tilde{a} - \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) + g'^2 (\tilde{b} - \tilde{a}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^*, \\
 R_2^{(-)}(r, \chi') &= (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \psi_M(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) \right)^* - g'^2 (3\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) - \\
 &- (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}) + g'^2 (\tilde{a} + \tilde{b}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* + \\
 &+ g'^2 (9\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) - g'^2 (3\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right)^4 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \frac{\hat{H}_0}{2m'} \psi_M(\mathbf{r}).
 \end{aligned} \tag{49}$$

Отметим, что компоненты $F^{(\pm)}(t)$ в (46) и (47) при $-t \ll 2M^2$ и $m_1 = m_2 = m (g' = 1)$ совпадают с их аналогами для случая двух спиновых частиц равных масс, которые были найдены в работе [34].

Компоненты $F^{(\pm)}(t)$ в (46) и (47) для случая s -состояния ($\ell = 0$) составной системы после интегрирования по угловым переменным удобно представить в виде ($\rho = rm'$):

$$\begin{aligned}
 F_{\ell=0}^{(+)}(t) &= \frac{16\pi(2m')^3(z_1 + z_2)G(\chi_\Delta)}{4M^2 - t} \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \int_0^\infty d\rho \frac{\sin(\rho\chi_\Delta)}{\rho \operatorname{sh} \chi_\Delta} \times \\
 &\times \operatorname{Re} \left\{ \tilde{R}_1^{(+)}(\rho, \chi_n) - \frac{t}{2M^2} \tilde{R}_0(\rho, \chi_n) + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right)^2} \left[\tilde{R}_2^{(+)}(\rho, \chi_n) - \frac{t}{2M^2} \tilde{R}_3(\rho, \chi_n) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\ell=0}^{(-)}(t) &= \frac{16\pi(2m')^3(z_1 + z_2)G(\chi_\Delta)}{-t} \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right) \int_0^\infty d\rho \frac{\sin(\rho\chi_\Delta)}{\rho \operatorname{sh} \chi_\Delta} \times \\
 &\times \operatorname{Im} \left\{ \tilde{R}_1^{(-)}(\rho, \chi_n) - \frac{t}{2M^2} \tilde{R}_0(\rho, \chi_n) + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2 \left(1 - \frac{t}{2M^2} \right)^2} \left[\tilde{R}_2^{(-)}(\rho, \chi_n) - \frac{t}{2M^2} \tilde{R}_3(\rho, \chi_n) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь быстрота χ_Δ связана с квадратом вектора передачи импульса $\Delta_{P,Q}^2$ и квадратом переданного 4-импульса t соотношением (43), а быстрота χ_n соответствует уровню n связанного состояния с энергией

$M = M_n = 2m'g' \operatorname{ch} \chi_n$ и введены функции

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_0(\rho, \chi_n) &= 2\tilde{a}g'^2 \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n), \\
 \tilde{R}_1^{(+)}(\rho, \chi_n) &= \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) \right)^* + \\
 &+ g'^2 \left(\tilde{a} + \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) + g'^2 \left(\tilde{b} - \tilde{a} \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* , \\
 \tilde{R}_2^{(+)}(\rho, \chi_n) &= \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) \right)^* + \\
 &+ g'^2 \left(\tilde{b} - \tilde{a} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) - \\
 &- \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) + g'^2 \left(\tilde{a} + \tilde{b} \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* + \\
 &+ g'^2 \left(3\tilde{a} - \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) - g'^2 \left(3\tilde{a} + \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^4 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n), \\
 \tilde{R}_3(\rho, \chi_n) &= -2\tilde{a}g'^2 \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) + 6\tilde{a}g'^2 \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n), \\
 \tilde{R}_1^{(-)}(\rho, \chi_n) &= \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) \right)^* + \\
 &+ g'^2 \left(3\tilde{a} - \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) + g'^2 \left(\tilde{b} - \tilde{a} \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* , \\
 \tilde{R}_2^{(-)}(\rho, \chi_n) &= \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) \right)^* - g'^2 \left(3\tilde{a} + \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) - \\
 &- \left(\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n) + g'^2 \left(\tilde{a} + \tilde{b} \right) \varphi_0(\rho, \chi_n) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* + \\
 &+ g'^2 \left(9\tilde{a} + \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi_n) - g'^2 \left(3\tilde{a} + \tilde{b} \right) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^4 \varphi_0(\rho, \chi_n) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi_n),
 \end{aligned} \tag{53}$$

где радиальная часть $\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}$ оператора свободного гамильтониана (4) определена в (3).

Отметим, что если потенциал $V(r)$ является вещественной функцией переменной r , то, согласно уравнению (1), по крайней мере величина $\varphi_\ell(r, \chi') [(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}})^3 \varphi_\ell(r, \chi')]^*$ при $\ell \neq 0$ не является вещественной. Следовательно, поперечная компонента $F_\ell^{(-)}(t)$ упругого форм-фактора векторного тока при $\ell \neq 0$, в отличие от бесспинового случая [30], даже при равных массах ($m_1 = m_2 = m$) в нуль не обращается. В тоже время $F_{\ell=0}^{(-)}(t)$ для действительных потенциалов обращается в нуль.

3. ПРОДОЛЬНАЯ КОМПОНЕНТА ФОРМ-ФАКТОРА ВЕКТОРНОГО ТОКА СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИОНОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Для вычисления продольной компоненты (50) упругого форм-фактора векторного тока s -состояния составной системы необходимо знать ее радиальную волновую РКП-функцию $\varphi_0(\rho, \chi_n)$, которая отвечает полному взаимодействию между ее составляющими (кварками). При этом,

в соответствии с КХД, полное взаимодействие между кварками содержит не только кулоновский потенциал, но и запирающую их часть. Ни точных, ни приближенных решений РКП-уравнений для РКП-функции $\varphi_0(\rho, \chi_n)$ с полным взаимодействием до сих пор не найдено. Поэтому при вычислении продольной компоненты (50) упругого форм-фактора векторного тока основного уровня ($n = 1$) s -состояния составной системы мы ограничимся кулоновской частью полного взаимодействия, используя выражение (13), которое не содержит i -периодических констант и было получено с помощью теории вычетов из точного решения интегрального РКП-уравнения (2) при $\ell = 0$ и с кулоновским взаимодействием (11) при $\chi' = i\kappa_1$ (см. приложение).

Отметим, что такие вычисления форм-факторов скалярного и векторного токов основного уровня s -состояния составной системы с использованием точных решений РКП-уравнений в релятивистском $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции основного уровня s -состояния составной системы с кулоновским потенциалом проводились различными авторами и ранее в случае как двух бесспиновых частиц равных и произвольных масс, так и спиновых частиц равных масс (см., например, работы [22, 23, 29, 30, 33, 34]).

Используя выражения (13)–(17) и (52), результаты вычисления продольной компоненты (50) упругого форм-фактора для векторного тока основного уровня s -состояния составной системы двух фер-

мионов произвольных масс с кулоновским взаимодействием (11) и энергией M_1 можно представить в виде:

$$F_{\ell=0,n=1}^{(+),\text{Coul}}(t) = \frac{8(z_1 + z_2)(2m')^4 \kappa_1^3 G(\chi_\Delta)}{(4M_1^2 - t)(2\kappa_1^2 \rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1 \rho_{\kappa_1}' + 1) \text{sh } \chi_\Delta} \left(1 - \frac{t}{2M_1^2}\right) \left\{ F_1(\kappa_1, \chi_\Delta) - \right. \\ \left. - \frac{t}{2M_1^2} F_0(\kappa_1, \chi_\Delta) + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2 \left(1 - \frac{t}{2M_1^2}\right)^2} \left[F_2(\kappa_1, \chi_\Delta) - \frac{t}{2M_1^2} F_3(\kappa_1, \chi_\Delta) \right] \right\}, \quad (54)$$

где

$$F_i(\kappa_1, \chi_\Delta) = \frac{4\kappa_1 A_i \chi_\Delta}{(\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2)^2} + \frac{B_i \chi_\Delta}{\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2} + C_i \arctg \frac{\chi_\Delta}{2\kappa_1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (55)$$

$$A_0 = 2\tilde{a}g'^2 \cos^3 \kappa_1, \quad B_0 = 2\tilde{a}g'^2 \cos^2 \kappa_1 \sin \kappa_1 \frac{3b' - a' \cos^2 \kappa_1}{b' + a' \cos^2 \kappa_1}, \quad (56)$$

$$C_0 = 4\tilde{a}b'g'^2 \cos \kappa_1 \sin^2 \kappa_1 \frac{b' - a' \cos^2 \kappa_1}{(b' + a' \cos^2 \kappa_1)^2},$$

$$A_1 = \cos \kappa_1 (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \sin^2 \kappa_1), \quad B_1 = \sin \kappa_1 (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 - 2\tilde{b}g'^2 \cos^2 \kappa_1),$$

$$C_1 = 2(\tilde{a} - \tilde{b})g'^2 \cos \kappa_1 \sin^2 \kappa_1, \quad A_2 = \cos \kappa_1 \sin^2 \kappa_1 (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \sin^2 \kappa_1),$$

$$B_2 = \sin \kappa_1 \left[\sin^2 \kappa_1 (\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \sin^2 \kappa_1) - 2(\tilde{a} + \tilde{b}) \cos^2 \kappa_1 \right],$$

$$C_2 = -2 \cos \kappa_1 \sin^2 \kappa_1 [\tilde{a} + \tilde{b} - 2\tilde{b}g'^2 \sin^2 \kappa_1 - (\tilde{a} + \tilde{b})g'^2 (3 \cos^2 \kappa_1 - 1)],$$

$$A_3 = 2\tilde{a}g'^2 \cos^3 \kappa_1 (3 \cos^2 \kappa_1 - 1), \quad B_3 = \frac{2\tilde{a}g'^2 \cos^2 \kappa_1 \sin \kappa_1}{b' + a' \cos^2 \kappa_1} [a' \cos^2 \kappa_1 (3 \cos^2 \kappa_1 + 1) +$$

$$+ 3b'(5 \cos^2 \kappa_1 - 1)], \quad C_3 = \frac{4\tilde{a}b'g'^2 \cos \kappa_1 \sin^2 \kappa_1}{b' + a' \cos^2 \kappa_1} \left[\frac{2b'(3 \cos^2 \kappa_1 - 1)}{b' + a' \cos^2 \kappa_1} + 3 \cos^2 \kappa_1 + 1 \right].$$

Подчеркнем, что выражения для коэффициентов в (56) не содержат константу взаимодействия $\tilde{\alpha}'_s$, которая была исключена в процессе их вычисления, используя не только условие (16), но и установленное в процессе этих вычислений тождество

$$a'(\tilde{a} + \tilde{b}) - 2\tilde{b}g'^2(a' + b') \equiv 0, \quad (57)$$

справедливое относительно фактора $g' \geq 1$ и спиновых параметров $a', b', \tilde{a}$ и $\tilde{b}$, значения которых даны в (8) и (21)⁷. Таким образом, тождество (57) устанавливает зависимость между массами и спинами кварков, образующих псевдоскалярные, векторные и псевдовекторные составные системы. Следовательно, его можно рассматривать как закон сохранения для псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных составных систем относительно масс и спинов кварков, образующих их. Это, в свою очередь, является следствием наличия внутренней симметрии у этих систем. При этом спиновые параметры $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не зависят от значений фактора g'

(масс кварков m_1, m_2) и отвечают за форму связанного состояния. Спиновые же параметры a' и b' зависят от значений фактора g' и характеризуют внутреннюю структуру связанного состояния.

4. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЙ РАДИУС ВЕКТОРНОГО ТОКА СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИОНОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Инвариантный среднеквадратический радиус для векторного тока s -состояния составной системы двух релятивистских фермионов (кварков) произвольных масс в терминах продольной компоненты (50) ее упругого форм-фактора имеет классическую форму [13, 20]:

$$\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\ell=0} = \frac{6\partial F_{\ell=0}^{(+)}(t)/\partial t|_{t=0}}{F_{\ell=0}^{(+)}(0)}. \quad (58)$$

Тогда выражение (58) для инвариантного среднеквадратического радиуса векторного тока s -состояния составной системы с полной энергией

⁷ Аналогичное тождество было установлено и для составной системы двух фермионов равных масс ($g' = 1$) в работе [34].

M_n , используя выражения (50) и (52) для продольной компоненты ее упругого форм-фактора,

$$\begin{aligned} \langle r_{0,v}^2 \rangle|_{\ell=0} = \frac{1}{M_n^2} \left\{ \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\int_0^\infty d\rho \left\{ \rho^2 \tilde{R}_1^{(+)}(\rho, \chi_n) - 3\tilde{R}_0(\rho, \chi_n) + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} [(\rho^2 + 6)\tilde{R}_2^{(+)}(\rho, \chi_n) - 3\tilde{R}_3(\rho, \chi_n)] \right\}}{\int_0^\infty d\rho \left[\tilde{R}_1^{(+)}(\rho, \chi_n) + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} \tilde{R}_2^{(+)}(\rho, \chi_n) \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Выражение (59) отличается от его аналогов как для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс [30], так и для случая двух спиновых частиц равных масс [34].

Выражение (59) для среднеквадратического радиуса векторного тока основного уровня s -состояния составной системы с кулоновским взаимодействием (11) и полной энергией M_1 можно вычислить, как и выражение (54) для продольной компоненты ее упругого форм-фактора, используя выражения (13)–(17) и (52). Результат этих вычислений также удобно представить в виде

$$\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{\text{Coul}} = \frac{1}{M_1^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa_1^2} \left[1 + \frac{E_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} E_2}{D_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} D_2} \right] - \frac{3 \left\{ D_0 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} [D_3 - 2D_2] \right\}}{D_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} D_2} \right\}, \quad (60)$$

где коэффициенты E_i и D_i определяются через коэффициенты A_i , B_i и C_i в (56) выражениями

$$E_i = 5A_i + 2\kappa_1 B_i, \quad i = 1, 2, \quad D_i = A_i + \kappa_1 B_i + 2\kappa_1^2 C_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Полученные здесь результаты применим для численного расчета среднеквадратического радиуса векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов с массами M_1 , равными $M_{\pi^\pm} = 0.13957$ ГэВ, $M_{K^\pm} = 0.49368$ ГэВ и $M_{K_0} = 0.49760$ ГэВ [47], которые являются исходными данными. В качестве волновой функции для них была выбрана радиальная кулоновская волновая РКП-функция (13). Для выполнения численных расчетов выражение (60) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \langle r_{0,v}^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{\text{Coul}} = \frac{0.03894}{M_1^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\kappa_1^2} \left[1 + \frac{(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{E}_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} \hat{E}_2}{(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{D}_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} \hat{D}_2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{3 \left[(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{D}_0 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} (\hat{D}_3 - 2\hat{D}_2) \right]}{(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{D}_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} \hat{D}_2} \right\} \text{фм}^2, \end{aligned} \quad (61)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \hat{E}_i = 5\hat{A}_i + 2\kappa_1 \text{tg} \kappa_1 \hat{B}_i, \quad i = 1, 2, \quad \hat{D}_i = \hat{A}_i + \kappa_1 \text{tg} \kappa_1 \hat{B}_i + 2\kappa_1^2 \text{tg}^2 \kappa_1 \hat{C}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\ \hat{A}_0 = \tilde{\beta}, \quad \hat{B}_0 = \frac{\tilde{\beta}(3\hat{A}_1 - 4)}{\hat{A}_1}, \quad \hat{C}_0 = \frac{2\tilde{\beta}(\hat{A}_1 - 1)(\hat{A}_1 - 2)}{\hat{A}_1^2}, \quad \hat{A}_1 = \beta'(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) + 1, \quad \hat{B}_1 = \hat{A}_1 - 2, \quad \hat{C}_1 = \tilde{\beta} - 1, \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \text{tg}^2 \kappa_1, \quad \hat{B}_2 = \hat{A}_1(\text{tg}^2 \kappa_1 - 2) - 2\text{tg}^2 \kappa_1, \quad \hat{C}_2 = -2\hat{A}_1 - (\tilde{\beta} + 1)(\text{tg}^2 \kappa_1 - 2), \quad \hat{A}_3 = -\tilde{\beta}(\text{tg}^2 \kappa_1 - 2), \\ \hat{B}_3 = \tilde{\beta} \left[\text{tg}^2 \kappa_1 + 4 - \frac{4(\hat{A}_1 - 1)(\text{tg}^2 \kappa_1 - 2)}{\hat{A}_1} \right], \quad \hat{C}_3 = \frac{2\tilde{\beta}(\hat{A}_1 - 1)}{\hat{A}_1} \left[\text{tg}^2 \kappa_1 + 4 - \frac{2(\hat{A}_1 - 1)(\text{tg}^2 \kappa_1 - 2)}{\hat{A}_1} \right], \end{aligned} \quad (62)$$

а вместо спиновых параметров a' , b' , $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, значения которых даны в (8) и (21), теперь удобно использовать относительные спиновые параметры $\beta' = b'/a'$ и $\tilde{\beta} = \tilde{a}/\tilde{b}$, удовлетворяющие тождеству

$$\tilde{\beta} + 1 - 2g'^2(\beta' + 1) \equiv 0 \quad (63)$$

со значениями

$$\beta' = \begin{cases} \frac{1}{g'^2} - 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр)}; \\ \frac{3}{2g'^2} - 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор)}; \\ -\frac{1}{2g'^2} - 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор)}; \end{cases} \quad \tilde{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5; \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu; \\ -2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu. \end{cases} \quad (64)$$

Отметим, что выбор параметров для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов не является произвольным и их количество не превышает количество результатов, а вычисление среднеквадратических радиусов $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов происходит не за счет подбора параметров модели. Задача состоит в том, чтобы определить массы m_u, m_d, m_s и кулоновские константы связи для u -, d - и s -кварков (параметры модели), соответствующие пары которых образуют $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезоны. Эти параметры модели должны отвечать значениям величин среднеквадратических радиусов основного уровня s -состояния $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов, значения которых должны находиться в доверительных интервалах их экспериментальных значений из работ [48–51]. Для этого, используя выражения (61)–(64) и выбранные значения массы M_1 для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов, находим те значения фактора g' и соответствующие им значения быстроты κ_1 , которые приводят к значениям величин среднеквадратических радиусов основного уровня s -состояния $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов, принадлежащих доверительным интервалам их экспериментальных значений. Тогда значения масс $m'_{\pi^\pm}, m'_{K^\pm}$ и m'_{K_0} эффективной релятивистской частицы вычисляются, в соответствии с формулами (5) и (7), по выбранным значениям массы M_1 для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов и найденным ранее значениям фактора g' и быстроты κ_1 для них из таблицы с помощью выражений

$$M_{\pi^\pm} = 2m'_{\pi^\pm} g'_{\pi^\pm} \cos \kappa_{\pi^\pm}, \quad M_{K^\pm} = 2m'_{K^\pm} g'_{K^\pm} \cos \kappa_{K^\pm}, \\ M_{K_0} = 2m'_{K_0} g'_{K_0} \cos \kappa_{K_0}.$$

Таблица. Значения среднеквадратического радиуса и параметров векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов с кулоновским взаимодействием

Мезоны	M_1 , ГэВ	m_u , ГэВ	m_d , ГэВ	m_s , ГэВ	m' , ГэВ	g'	κ_1	$\tilde{\alpha}'_s$
$\pi^\pm$	0.13957	0.12802	0.15632		0.14147	1.00499	1.05773	14.93515
$K^\pm$	0.49368	0.12802		0.46733	0.24460	1.21700	0.59308	4.16075
K_0	0.49760		0.15632	0.46733	0.27028	1.15370	0.64702	4.66997
		Мезоны	$\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\text{теор}}$, фм ²	$\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\text{эксп}}$, фм ²				
		$\pi^\pm$	0.43642	0.439 ± 0.007				
		$K^\pm$	0.33946	0.34 ± 0.05				
		K_0	-0.10969	-0.090 ± 0.021				

Далее, принимая во внимание определения фактора g' в (7) и массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ эффективной релятивистской частицы, значения масс m_u, m_d и m_s для u -, d - и s -кварков, соответствующие пары которых образуют $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезоны, вычисляются однозначно по найденным ранее значениям фактора g' и массы m' для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов из таблицы с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} m_u = m'_{\pi^\pm} (g'_{\pi^\pm} - \sqrt{g'^2_{\pi^\pm} - 1}), & m_d = m'_{\pi^\pm} (g'_{\pi^\pm} + \sqrt{g'^2_{\pi^\pm} - 1}); \\ m_u = m'_{K^\pm} (g'_{K^\pm} - \sqrt{g'^2_{K^\pm} - 1}), & m_s = m'_{K^\pm} (g'_{K^\pm} + \sqrt{g'^2_{K^\pm} - 1}); \\ m_d = m'_{K_0} (g'_{K_0} - \sqrt{g'^2_{K_0} - 1}), & m_s = m'_{K_0} (g'_{K_0} + \sqrt{g'^2_{K_0} - 1}). \end{cases}$$

Наконец, используя условие квантования уровней энергии (16) для основного уровня s -состояния псевдоскалярной составной системы двух фермионов произвольных масс с кулоновским взаимодействием (11) ($a' = g'^2, b' = 1 - a'$), по найденным значениям фактора g' и быстроты κ_1 из таблицы были вычислены значения кулоновской константы взаимодействия $\tilde{\alpha}'_s$ для основного уровня s -состояния

$\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов. Значения всех величин приведены в таблице, а найденные значения величины среднеквадратического радиуса основного уровня s -состояния для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов находятся в доверительных интервалах их экспериментальных значений: $\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\text{эксп}}^{\pi^\pm} = 0.439 \pm 0.007$ фм² [48, 49], $\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\text{эксп}}^{K^\pm} = 0.34 \pm 0.05$ фм² [50], $\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\text{эксп}}^{K_0} = -0.090 \pm 0.021$ фм² [51].

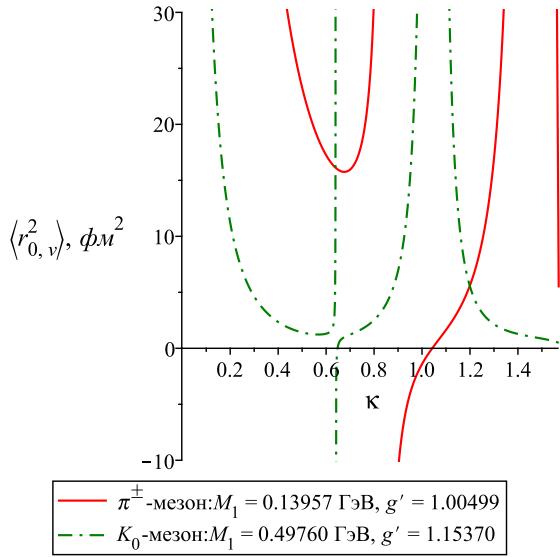


Рис. 2. Поведение среднеквадратического радиуса (61) как функции быстроты κ для векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$ - и K_0 -мезонов, отвечающих значениям их параметров из табл.

Для установления закономерностей поведения среднеквадратического радиуса (61) векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов, отвечающих значениям их параметров из таблицы, были построены графики функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{\text{Coul}} = \langle r_{0,v}^2 \rangle$ (κ) как функции переменной $\kappa_1 = \kappa$ (рис. 2–4). Из рис. 2–4 видно, что графики функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для среднеквадратического радиуса (61) псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов имеют два вида сингулярностей, которым отвечают «критические» значения быстроты κ . Первому виду сингулярностей отвечают «критические» значения быстроты $\kappa_{\pi^\pm}^{\text{conf}} \approx 1.47110$, $\kappa_{K^\pm}^{\text{conf}} \approx 0.96437$, $\kappa_{K_0}^{\text{conf}} \approx 1.04870$, которые определяют границу области конфайнмента кварков, образующих $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезоны: при $\kappa \geq \kappa_i^{\text{conf}}$ ($i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$) их кулоновские константы связи $\tilde{\alpha}'_s < 0$. Второму виду сингулярностей отвечают «критические» значения быстроты $\kappa_{\pi^\pm}^{\text{cr}} \approx 0.83910$, $\kappa_{K^\pm}^{\text{cr}} \approx 0.60387$, $\kappa_{K_0}^{\text{cr}} \approx 0.63973$, которые, по-видимому, определяют либо границу фазового перехода кварк-глюонной материи, либо границу изменения пространственной конфигурации кварков, либо при переходе через эти «критические» значения быстроты κ_i^{cr} ($i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$) происходит изменение как фазового состояния кварк-глюонной материи, так и ее пространственной конфигурации: при $\kappa = \kappa_i^{\text{cr}}$ ($i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$) их кулоновская константа связи $\tilde{\alpha}'_s > 0$, но при переходе через значения быстроты κ_i^{cr} происходит изменение знака предельных значений функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов. При малых значениях быстроты κ их кулоновская константа связи $\tilde{\alpha}'_s$ мала, а значит, в этой области кварки являются квази-

свободными.

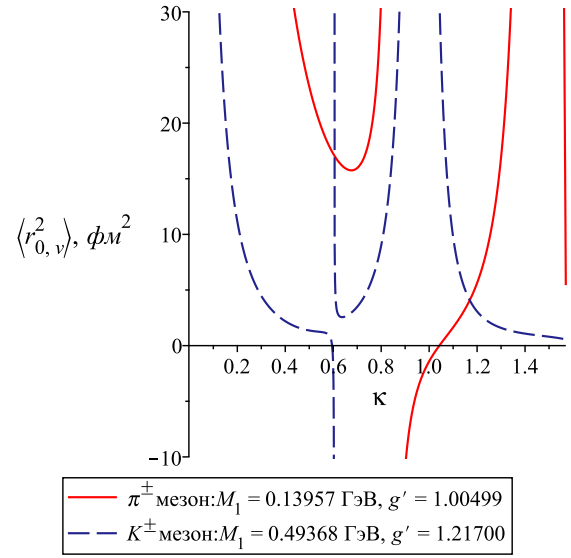


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для псевдоскалярных $\pi^\pm$ - и $K^\pm$ -мезонов, отвечающих значениям их параметров из табл.

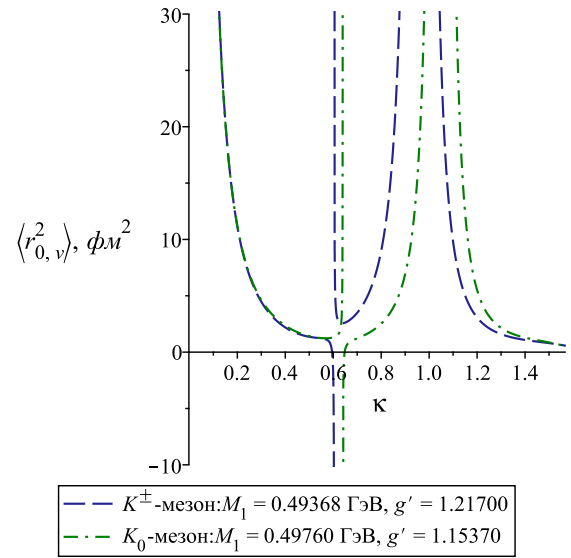


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, но для псевдоскалярных $K^\pm$ - и K_0 -мезонов, отвечающих значениям их параметров из табл.

Рис. 2–4 также показывают, что, несмотря на значительное различие значений массы M_1 и фактора g' для $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов из таблицы, графики функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для них имеют общую закономерность поведения в области конфайнмента их кварков, т.е. при $\kappa < \kappa_i^{\text{conf}}$ ($i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$) их кулоновские константы связи $\tilde{\alpha}'_s > 0$. Однако характер поведения функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $K^\pm$ -мезона существенно отличается от ее поведения для $\pi^\pm$ - и K_0 -мезонов в области конфайнмента их кварков:

в области конфайнмента кварков происходит изменение характера поведения («инверсия») графика функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $K^\pm$ -мезона относительно асимптоты $\kappa = \kappa_{K^\pm}^{\text{cr}}$ по сравнению с его характерным поведением для $\pi^\pm$ - и K_0 -мезонов относительно их асимптот $\kappa = \kappa_{\pi^\pm}^{\text{cr}}$ и $\kappa = \kappa_{K_0}^{\text{cr}}$. Это связано с тем, что у функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ в (61) для псевдоскалярных мезонов в области конфайнмента их кварков имеется «критическое» значение фактора $g'_{\text{cr}} \approx 1.18850$, относительно значения которого и происходит изменение ее характера поведения («инверсия»): поскольку $g'_{K^\pm} = 1.21700 > g'_{\text{cr}}$, то график функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $K^\pm$ -мезона является «инверсией» поведения графика функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $\pi^\pm$ - или K_0 -мезонов, для которых факторы $g'_{\pi^\pm} = 1.00499 < g'_{\text{cr}}$ и $g'_{K_0} = 1.15370 < g'_{\text{cr}}$.

В заключение данного раздела приведем асимптотику при больших $-t = Q^2 \gg M_1^2$ ($\chi_\Delta \approx \ln(Q/M_1)^2$) нормированного форм-фактора $F_v(t)$ векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов, которая дается выражением

$$F_v(t)|_{-t \gg M_1^2} \approx \frac{8\pi\kappa_1^3 \text{tg}^2 \kappa_1 (1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{C}_0}{(1 + \text{tg}^2 \kappa_1) \hat{D}_1 + \frac{2(g'^2 - 1)}{g'^2} \hat{D}_2} \times \frac{\ln(Q/M_1)^2}{(Q/M_1)^2} \left[1 + O\left(\ln^{-1}(Q/M_1)^2\right) \right], \quad (65)$$

где функция $F_v(t)$ определена как отношение продольной компоненты (54) форм-фактора векторного тока к его значению при $t = 0$. Из асимптотики (65) видно, что поведение нормированного форм-фактора $F_v(t)$ при больших $-t$ находится в хорошем согласии с его убыванием по закону $F(t) \sim |t|^{-1}$, который предсказывается правилом размерного кваркового счета для двухчастичных систем [52–55], в то время как нерелятивистская модель с кулоновским потенциалом (11) дает дипольный закон убывания $F(t) \sim t^{-2}$. В бесспиновом же случае убывание форм-фактора происходит по закону $F(t) \sim (|t| \ln^3 |t|)^{-1}$ (см. работу [29]).

Таким образом, именно учет спина приводит к такому поведению форм-фактора при больших $-t$, который предсказывается правилом размерного кваркового счета [52–55].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдены новые ковариантные выражения компонент упругого форм-фактора векторного тока составной системы двух релятивистских фермионов произвольных масс как функции инвариантной переменной $\Delta_{p,Q}^2$ — квадрата вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского. Для этой цели был использован РКП-подход, основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [14, 16–18], путем перехода к трехмерному релятивистскому

$\mathbf{r}$ -представлению для системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс [31, 32].

В рамках рассматриваемого РКП-подхода было получено инвариантное выражение матричного элемента локального оператора векторного тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс через волновые РКП-функции в пространстве импульсов Лобачевского, удовлетворяющие уравнению Кадышевского для случая двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс. Рассмотрены случаи псевдоскаляра, вектора и псевдовектора.

Показано, что выражения для компонент (36) и (37) упругого форм-фактора векторного тока представляют собой свертки волновых РКП-функций в пространстве импульсов Лобачевского. Это позволило представить их в виде релятивистских фурье-образов от ковариантных волновых РКП-функций в $\mathbf{r}$ -представлении (см. формулы (46) и (47)).

Установлено, что если потенциал $V(r)$ является вещественной функцией переменной r , то поперечная компонента $F_\ell^{(-)}(t)$ упругого форм-фактора векторного тока при $\ell \neq 0$, в отличие от бесспинового случая [30], даже при равных массах ($m_1 = m_2 = m$) в нуль не обращается. Однако поперечная компонента $F_{\ell=0}^{(-)}(t)$ упругого форм-фактора векторного тока для действительных потенциалов обращается в нуль.

На примере кулоновского поля притяжения получены выражения продольной компоненты (54) форм-фактора и среднеквадратического радиуса (60) векторного тока составной системы двух релятивистских фермионов произвольных масс.

Установлено тождество (57), справедливое для псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных составных систем относительно их спиновых параметров $a', b', \tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в (8) и (21) (или его аналог (63) для значений относительных спиновых параметров β' и $\tilde{\beta}$ в (64)). Эти тождества не только устанавливают зависимость между массами и спинами кварков, образующих псевдоскалярные, векторные и псевдовекторные составные системы, но их также можно рассматривать как закон сохранения для этих составных систем относительно масс и спинов кварков, образующих составные системы. Это, в свою очередь, является следствием наличия внутренней симметрии у этих систем.

Найдены значения среднеквадратического радиуса векторного тока основного уровня s -состояния для псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов как двухкварковых составных систем с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием, величины которых находятся в доверительных интервалах их экспериментальных значений (табл.).

Исследованы закономерности поведения среднеквадратического радиуса векторного тока основного уровня s -состояния псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов с кулоновским взаимодействием. Показано, что при учете спина графики функ-

ции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для среднеквадратического радиуса псевдоскалярных $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезонов имеют два вида сингулярностей, которым отвечают «критические» значения быстроты κ . Первому виду сингулярностей отвечают «критические» значения быстроты $\kappa_{\pi^\pm}^{\text{conf}} \approx 1.47110$, $\kappa_{K^\pm}^{\text{conf}} \approx 0.96437$, $\kappa_{K_0}^{\text{conf}} \approx 1.04870$, которые определяют границу области конфайнмента кварков, образующих $\pi^\pm$ -, $K^\pm$ - и K_0 -мезоны. Второму виду сингулярностей отвечают «критические» значения быстроты $\kappa_{\pi^\pm}^{\text{cr}} \approx 0.83910$, $\kappa_{K^\pm}^{\text{cr}} \approx 0.60387$, $\kappa_{K_0}^{\text{cr}} \approx 0.63973$, которые, по-видимому, определяют границу изменения фазово-пространственного состояния кварк-глюонной материи. Также показано, что поведение среднеквадратического радиуса $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для псевдоскалярных мезонов в области конфайнмента их кварков существенно зависит от значения фактора g' , особенно по сравнению с «критическим» значением фактора $g'_{\text{cr}} \approx 1.18850$. Установлено, что в области конфайнмента кварков происходит изменение характера поведения («инверсия») графика функции $\langle r_{0,v}^2 \rangle$ для $K^\pm$ -мезона, для которого $g'_{K^\pm} = 1.21700 > g'_{\text{cr}}$, относительно асимптоты $\kappa = \kappa_{K^\pm}^{\text{cr}}$ по сравнению с его характерным поведением для $\pi^\pm$ - и K_0 -мезонов, для которых факторы $g'_{\pi^\pm} = 1.00499 < g'_{\text{cr}}$ и $g'_{K_0} = 1.15370 < g'_{\text{cr}}$, относительно их асимптот $\kappa = \kappa_{\pi^\pm}^{\text{cr}}$ и $\kappa = \kappa_{K_0}^{\text{cr}}$.

Показано, что при учете спина ковариантные волновые РКП-функции кулоновского поля притяже-

ния приводят при больших переданных импульсах t к поведению нормированной продольной компоненты форм-фактора векторного тока, которое находится в хорошем согласии с его убыванием по закону $F(t) \sim |t|^{-1}$, что предсказывается правилом размерного кваркового счета [52–55].

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой, В.В. Андрееву, А.Е. Дорохову и Ю.А. Курочкину за проявленный интерес к работе, полезное обсуждение полученных результатов и ценные замечания к ним.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. «Конвергенция-2025», подпрограмма «Микромир, плазма и Вселенная».

Приложение

Выражение для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_0(\rho, \kappa)$ s -состояния связанной системы двух релятивистских фермионов произвольных масс с кулоновским взаимодействием (11), не содержащее i -периодических констант, можно получить непосредственно из решения

$$\varphi_0(\rho, \chi') = 2 C_0(\chi') e^{iB'\chi'} \text{sh} [\pi(\rho - \tilde{\rho}')] \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp \left\{ \frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \text{sh } x + [1 + i(\rho - \tilde{\rho}')] x \right\}}{(e^x + e^{\chi'})^2} \left[\frac{e^x + e^{-\chi'}}{e^x + e^{\chi'}} \right]^{-1+iB'} \quad (\text{A.1})$$

при $\chi' = i\kappa$ ($0 < \kappa < \pi/2$), где быстрота κ определяется из условия квантования уровней энергии

$$\frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \cos^2 \kappa + b')}{4 \sin \kappa} = n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.2})$$

в котором значения параметров $\tilde{\rho}'$ и B' даются выражениями

$$\tilde{\rho}' = \frac{\tilde{\alpha}'_s a' \text{ch } \chi'}{4}, \quad B' = \frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \text{ch}^2 \chi' + b')}{4 \text{sh } \chi'}. \quad (\text{A.3})$$

Выражения (A.1) и (A.2) были найдены в работе [35] при решении задачи рассеяния, основанной на интегральной форме РКП-уравнения в $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции s -состояния составной системы двух релятивистских фермионов произвольных масс с кулоновским взаимодействием (11). Очевидно, что подынтегральная функция в правой части решения (A.1) при $\chi' = i\kappa$ и в силу условия квантования уровней энергии (A.2) имеет полюс $(n+1)$ -го порядка при $x = i\kappa + i\pi$:

$$\varphi_0(\rho, \kappa) = 2 C_0(\kappa) e^{in\kappa} \text{sh} \left[\pi \left(\rho - \frac{\rho'_\kappa}{2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp \left\{ \frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \text{sh } x + \left[1 + i \left(\rho - \frac{\rho'_\kappa}{2} \right) \right] x \right\}}{(e^x + e^{i\kappa})^2} \left[\frac{e^x + e^{-i\kappa}}{e^x + e^{i\kappa}} \right]^{n-1}, \quad (\text{A.4})$$

где ρ'_κ определено в (14). Значит, интеграл в правой части решения (A.4) может быть вычислен с помощью основной теоремы теории вычетов. В частности, для основного уровня ($n = 1$) s -состояния связанной

системы с кулоновским взаимодействием (11) тогда можно записать

$$\int_C dz \frac{\exp \left\{ \frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \operatorname{sh} z + \left[1 + i \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) \right] z \right\}}{(e^z + e^{i\kappa_1})^2} = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{\exp \left\{ \frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \operatorname{sh} z + \left[1 + i \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) \right] z \right\}}{(e^z + e^{i\kappa_1})^2}, z = i\kappa_1 + i\pi \right], \quad (\text{A.5})$$

где интегрирование выполняется в комплексной z -плоскости вдоль контура C , который содержит внутри себя точку $z = i\kappa_1 + i\pi$, являющуюся полюсом 2-го порядка подынтегральной функции в выражении (A.5) (см. рис. 5).

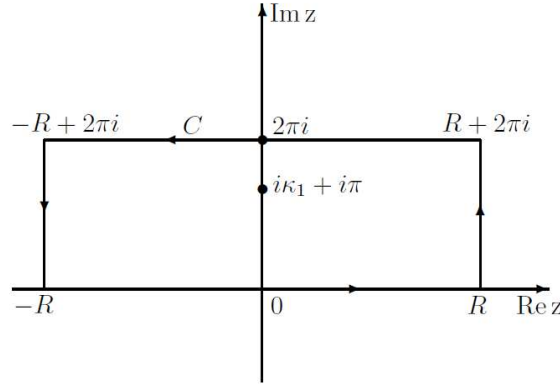


Рис. 5. Контур интегрирования C в комплексной z -плоскости, содержащий внутри себя точку $z = i\kappa_1 + i\pi$, являющуюся полюсом 2-го порядка подынтегральной функции в выражении (A.5)

Выполнив вычисления в левой и правой частях выражения (A.5), получим

$$\left\{ 1 - \exp \left[-2\pi \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) \right] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp \left\{ \frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \operatorname{sh} x + \left[1 + i \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) \right] x \right\}}{(e^x + e^{i\kappa_1})^2} = 2\pi \exp \left\{ -i\kappa_1 + \frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \sin \kappa_1 - \kappa_1 \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) - \pi \left(\rho - \frac{\rho'_{\kappa_1}}{2} \right) \right\} (\rho - \rho'_{\kappa_1}). \quad (\text{A.6})$$

Тогда, принимая во внимание соотношение (A.6), выражение (A.4) для радиальной волновой РКП-функции основного уровня s -состояния связанной системы с кулоновским взаимодействием (11), не содержащее i -периодических констант, принимает вид

$$\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1) = 2\pi C_0(\kappa_1) \times \exp \left[\frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \sin \kappa_1 - \frac{\kappa_1 \rho'_{\kappa_1}}{2} - \kappa_1 \left(\rho - \rho'_{\kappa_1} \right) \right] (\rho - \rho'_{\kappa_1}). \quad (\text{A.7})$$

Заметим, что безразмерный фактор

$$\sigma_{\text{conf}} = \frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \sin \kappa_1 - \frac{\kappa_1 \rho'_{\kappa_1}}{2} = \frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4} (\sin \kappa_1 - \kappa_1 \cos \kappa_1) \quad (\text{A.8})$$

в решении (A.7), который войдет в нормировочную

константу решения (13), по форме совпадает с левой частью квазиклассического условия квантования уровней энергии s -состояния связанной системы двух бесспиновых частиц произвольных масс с линейным потенциалом $V(r) = \sigma r$ [39]

$$\chi_n \operatorname{ch} \chi_n - \operatorname{sh} \chi_n = \frac{\pi \sigma}{2g' m'^2} \left(n - \frac{1}{4} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.9})$$

взятого при $\chi_n = -i\kappa_1$ и $n = 1$ (с точностью до множителей $\tilde{\alpha}'_s a'/4$ и i). Очевидно, множитель $\tilde{\alpha}'_s a'/4$ определяется кулоновской константой связи $\tilde{\alpha}'_s$ и спиновым параметром a' , зависящим от отношения масс кварков (фактор $g' \geq 1$, причем $g' = 1$ для случая равных масс $m_1 = m_2 = m$). При $a' = 0$ ($b' = 2/m'g'$) фактор (A.8) исчезает, что соответствует случаю s -состояния связанной системы двух бесспиновых частиц произвольных масс (см. комментарий на стр. 3 после формулы (8)). Кроме того, в конце раздела 4 было

установлено, что графики функции $\langle r_0^2 \rangle$ для среднеквадратического радиуса (61) псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов имеют сингулярность при «критических» значениях быстроты κ , определяющих границу области конфайнмента кварков мезонов: при $\kappa > \kappa_i^{\text{conf}}$ ($i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$) кулоновская константа связи $\alpha_s < 0$. Таким образом, появление безразмерного фактора (A.8) в решении (A.7), который войдет в нормировочную константу решения (13), не является случайным, а его природа обусловлена спинами кварков и кулоновским потенциалом. Следовательно, учет спина кварков с кулоновским взаимодействием (без учета запирающей части взаимодействия) приводит:

1) к появлению безразмерного фактора (A.8), входящего в нормировочную константу решения (13), а, значит, не влияющего на значения вычисляемых величин, но совпадающего по форме с безразмерной константой линейного взаимодействия

$\sigma_{\text{lin}} = \sigma/m'^2 = (8g'/3\pi)(\sin \kappa_1 - \kappa_1 \cos \kappa_1)$, которая входит в правую часть квазиклассического условия квантования (A.9) уровней энергии s -состояния связанной системы двух бесспиновых частиц произвольных масс с линейным потенциалом, взятого при $\chi_n = -i\kappa_1$ (без множителя i) для основного уровня энергии ($n = 1$);

2) к конфайнменту кварков мезонов, отвечающих линейному взаимодействию (как в модели струны) с безразмерной константой взаимодействия σ_{conf} в (A.8), зависящей от спинов и масс кварков (фактор a' , исчезающий в бесспиновом случае) и значений быстроты κ_1 , «критические» значения которой определяют границу области конфайнмента кварков мезонов ($\alpha_s < 0$ при $\kappa > \kappa_i^{\text{conf}}$ $i = \pi^\pm, K^\pm, K_0$), а для значений быстроты κ_1 и фактора g' для $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K_0 -мезонов из табл. безразмерная константа линейного взаимодействия σ_{conf} имеет следующие значения: $\sigma_{\text{conf}}^{\pi^\pm} = 1.32765$, $\sigma_{\text{conf}}^{K^\pm} = 0.10341$, $\sigma_{\text{conf}}^{K_0} = 0.13452$.

- [1] Körner J.G., Kuroda M. // *Phys. Rev. D.* **16.** 2165. (1977).
- [2] Dubnička S. // *Nuovo Cim. A.* **103.** 1417. (1990).
- [3] Далкаргов О.Д. // *Письма в ЖЭТФ.* **28.** 183. (1978). (Dalkarov O.D. // *JETP Lett.* **28.** 170. (1978)).
- [4] Dalkarov O.D., Protasov K.V. // *Nucl. Phys. A.* **504.** 845. (1989).
- [5] Dalkarov O.D., Protasov K.V. // *Mod. Phys. Lett. A.* **4.** 1203. (1989).
- [6] Далькаргов О.Д., Протасов К.В. // *Письма в ЖЭТФ.* **49.** 241. (1989). (Dalkarov O.D., Protasov K.V. // *JETP Lett.* **49.** 273. (1989)).
- [7] Dalkarov O.D., Khakhulin P.A., Voronin A.Yu. // *Nucl. Phys. A.* **833.** 104. (2010). (arXiv : 0906.0266v1 [nucl-th]).
- [8] Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. // Preprint No. E2-3498. JINR (Dubna, 1967).
- [9] Хелашвили А.Л. // Сообщение P2-8750. ОИЯИ (Дубна, 1976).
- [10] Фаустов Р.Н. // *ТМФ.* **3.** 240. (1970). (Faustov R.N. // *Theor. Math. Phys.* **3.** 478. (1970)).
- [11] Faustov R.N. // *Ann. Phys. (N.Y.).* **78.** 176. (1973).
- [12] Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. // *Nuovo Cim.* **29.** 380. (1963).
- [13] Скачков Н.Б. // *ТМФ.* **25.** 313. (1975). (Skachkov N.B. // *Theor. Math. Phys.* **25.** 1154. (1975)).
- [14] Kadyshevsky V.G. // *Nucl. Phys. B.* **6.** 125. (1968).
- [15] Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. // *Nuovo Cim. A.* **55.** 275. (1968).
- [16] Кадышевский В.Г. // *ЖЭТФ.* **46.** 654. (1964). (Kadyshevsky V.G. // *Sov. Phys. JETP.* **19.** 443. (1964)).
- [17] Кадышевский В.Г. // *ЖЭТФ.* **46.** 872. (1964). (Kadyshevsky V.G. // *Sov. Phys. JETP.* **19.** 597. (1964)).
- [18] Кадышевский В.Г. // Докл. АН СССР. **160.** 573. (1965). (Kadyshevsky V.G. // *Sov. Phys. Dokl.* **10.** 46. (1965)).
- [19] Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. // *Nuovo Cim. A.* **55.** 233. (1968).
- [20] Биленькая С.И., Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // *ЯФ.* **26.** 1051. (1977). (Bilenkaya S.I., Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // *Sov. J. Nucl. Phys.* **26.** 556. (1977)).
- [21] Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // *ТМФ.* **41.** 205. (1979). (Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // *Theor. Math. Phys.* **41.** 977. (1979)). Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // Preprint No. E2-11678. JINR (Dubna, 1978).
- [22] Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // *ЯФ.* **30.** 1079. (1979). (Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // *Sov. J. Nucl. Phys.* **30.** 562. (1979)). Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // Preprint No. E2-11727. JINR (Dubna, 1978).
- [23] Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // *ТМФ.* **43.** 330. (1980). (Skachkov N.B., Solovtsov I.L. // *Theor. Math. Phys.* **43.** 494. (1980)).
- [24] Линкевич А.Д., Саврин В.И., Скачков Н.Б. // *ТМФ.* **53.** 20. (1982). (Linkevich A.D., Savrin V.I., Skachkov N.B. // *Theoret. Math. Phys.* **53.** 955. (1982)).
- [25] Боос Э.Э., Саврин В.И., Шаблыгин Е.М. // *ТМФ.* **72.** 197. (1987). (Boos E.E., Savrin V.I., Shablygin E.M. // *Theoret. Math. Phys.* **72.** 819. (1987)).
- [26] Боос Э.Э., Саврин В.И., Шичанин С.А. // *ТМФ.* **77.** 247. (1988). (Boos E.E., Savrin V.I., Shichanin S.A. // *Theoret. Math. Phys.* **77.** 1176. (1988)).
- [27] Арбузов Б.А., Боос Э.Э., Саврин В.И., Шичанин С.А. // *ТМФ.* **83.** 175. (1990). (Arbuzov B.A., Boos E.E., Savrin V.I., Shichanin S.A. // *Theoret. Math. Phys.* **83.** 457. (1990)).
- [28] Матвеев В.А., Саврин В.И., Сисакян А.Н., Тавхелидзе А.Н. // *ТМФ.* **132.** 267. (2002). (Matveev V.A., Savrin V.I., Sisakyan A.N., Tavkhelidze A.N. // *Theoret. Math. Phys.* **132.** 1119. (2002)).
- [29] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ.* **77.** 251. (2014). (Chernichenko Yu.D. // *Phys. At. Nucl.* **77.** 229. (2014)).
- [30] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ.* **78.** 226. (2015). (Chernichenko Yu.D. // *Phys. At. Nucl.* **78.** 201. (2015)).
- [31] Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. // *ЯФ.* **11.** 692. (1970). (Kadyshevsky V.G.,

- Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. // *Sov. J. Nucl. Phys.* **11**. 388. (1970)).
- [32] Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. // *ЭЧАЯ*. **2**. 635. (1972). (*Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.* // *Sov. J. Part. Nucl.* **2**. 69. (1972)).
- [33] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **81**. 346. (2018). (*Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **81**. 360. (2018)).
- [34] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **82**. 287. (2019). (*Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **82**. 334. (2019)).
- [35] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **84**. 262. (2021). (*Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **84**. 339. (2021)).
- [36] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **80**. 396. (2017). (*Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **80**. 707. (2017)).
- [37] Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // *ТМФ*. **54**. 183. (1983). (*Skachkov N.B., Solovtsov I.L.* // *Theor. Math. Phys.* **54**. 116. (1983)). *Skachkov N.B., Solovtsov I.L.* // Preprint No. E2-81-760. JINR (Dubna, 1981).
- [38] Соловцова О.П., Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **73**. 1658. (2010). (*Solovtsova O.P., Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **73**. 1612. (2010)).
- [39] Черниченко Ю.Д. Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния. Изд. центр УО ГГТУ им. П.О. Сухого. Гомель, 2011.
- [40] Savrin V.I., Skachkov N.B. // *Lett. Nuovo Cim.* **29**. 363. (1980).
- [41] Скачков Н.Б. // *ТМФ*. **22**. 213. (1975). (*Skachkov N.B.* // *Theor. Math. Phys.* **22**. 149. (1975)); *Скачков Н.Б.* // Preprint No. P2-12152. ОИЯИ (Дубна, 1979).
- [42] Сидоров А.В., Скачков Н.Б. // *ТМФ*. **46**. 213. (1981). (*Sidorov A.V., Skachkov N.B.* // *Theor. Math. Phys.* **46**. 141. (1981). *Сидоров А.В., Скачков Н.Б.* // Препринт P2-80-45. ОИЯИ (Дубна, 1980).
- [43] Savrin V.I., Sidorov A.V., Skachkov N.B. // *Hadronic J.* **4**. 1642. (1981).
- [44] Черниченко Ю.Д. // *ЯФ*. **85**. 159. (2022). (*Chernichenko Yu.D.* // *Phys. At. Nucl.* **85**. 205. (2022)).
- [45] Шаниро И.С. // Докл. АН СССР. **106**. 647. (1956). (*Shapiro I.S.* // *Sov. Phys. Dokl.* **1**. 91. (1956)).
- [46] Шаниро И.С. // *ЖЭТФ*. **43**. 1727. (1962). (*Shapiro I.S.* // *Sov. Phys. JETP*. **16**. 1219. (1963)).
- [47] Olive K.A. et al. (*Particle Data Group*) // *Chin. Phys. C*. **38**. 090001. (2014).
- [48] Amendolia S.R. et al. // *Phys. Lett. B*. **146**. 116. (1984).
- [49] Amendolia S.R. et al. // *Nucl. Phys. B*. **277**. 168. (1986).
- [50] Amendolia S.R. et al. // *Phys. Lett. B*. **178**. 435. (1986).
- [51] Lai A. et al. (*NA48 Collaboration*) // *Eur. Phys. J. C*. **30**. 33. (2003).
- [52] Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. // *Lett. Nuovo Cim.* **5**. 907. (1972).
- [53] Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. // *Lett. Nuovo Cim.* **7**. 719. (1973).
- [54] Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. // *ТМФ*. **40**. 329. (1979). (*Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N.* // *Theor. Math. Phys.* **40**. 778. (1979)).
- [55] Brodsky S.J., Farrar G.R. // *Phys. Rev. Lett.* **31**. 1153. (1973).

Form Factor and Mean-Square Radius for the Vector Current of Composite System of Two Particles with Arbitrary Masses and Spin 1/2

Yu. D. Chernichenko^{a,b}

*Department of Higher Mathematics, International Center for Advanced Studies,
P.O. Sukhoi Gomel State Technical University. Gomel 246746, Belarus
E-mail: ^achyud@mail.ru, ^bchern@gstu.by*

The new expressions for the form factor components and mean-square radius for the vector current of the composite system of two relativistic particles with arbitrary masses and spin 1/2 are obtained. The pseudoscalar, vector, and pseudovector composite systems were considered. For them, an identity was derived that establishes the dependence between masses and quark spins forming the composite systems. Values of the mean-square radius of the ground-state *s*-wave level of pseudoscalar $\pi^\pm$, $K^\pm$, and K_0 -mesons with Coulomb interaction are calculated. The analysis is performed, and the dependence of the behaviour of the mean-square radius concerning the differences in quark masses forming the mesons is established. The consideration is conducted within the framework of the relativistic quasipotential approach based on the covariant Hamiltonian formulation of quantum field theory by transition to the three-dimensional relativistic configurational representation in the case of two relativistic spinor particles with arbitrary masses.

PACS: 11.55.Hx, 13.60.Hb, 11.55.Fv, 13.85.Lg, 13.85.Qk

Keywords: form factor, mean-square radius, vector current, relativistic quasipotential approach, relativistic configurational representation, quantum chromodynamic.

Received 15 April 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторе

Черниченко Юрий Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, доцент кафедры «Высшая математика»; e-mail: chyud@mail.ru, chern@gstu.by.