

О моделировании акустических полей в морском волноводе с уточненными граничными условиями на поверхности и на дне

Ю.И. Папкова,^{1,*} С.О. Папков¹

¹ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33

(Поступила в редакцию 04.05.2025; подписана в печать 20.06.2025)

Рассматривается задача о звуковом поле точечного источника звука, помещенного в неидеальный морской волновод. Границы волновода полагаются плоскопараллельными, выделяются три слоя: водный слой с неоднородной рефракционной составляющей скорости звука, слой жидких осадков и упругий донный слой на жестком основании. Вверху водный слой стыкуется с однородным воздушным полупространством. Для данной модели волновода впервые получены аналитические выражения для импедансных функций на границах водного слоя, что позволяет построить функцию Грина вертикальной краевой задачи. Более того, найдены точные значения для вычетов от функции Грина, которые позволяют записать точное аналитическое представление для потенциала звукового давления в виде суммы нормальных мод. Показано, что в данной модели влияние непрерывного спектра (интегралы по берегам разреза) мало даже на небольших расстояниях от источника. При уменьшении толщины упругого слоя дискретный спектр задачи стремится к значениям для классического волновода, при достаточно большой толщине и затухании похож на дискретный спектр упругого волновода Pekeris. Приводятся примеры численной реализации для параметров волновода, характерных в причерноморской акватории.

PACS: 43.30.-k, 43.30.+m УДК: 534, 534.2

Ключевые слова: неоднородный гидроакустический волновод, упругое дно, импедансные граничные условия, нормальные моды.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2550302](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2550302)

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при исследовании морских геофизических волноводов широкое распространение получили плоскостойкие модели волноводов, принимающих в расчет геоакустические параметры дна и профиль скорости звука [1–6]. Подобные модели обычно используются в качестве основы компьютерного моделирования для анализа звуковых полей, создания специализированного программного обеспечения. Заметим, что моделирование звуковых полей в неоднородных волноводах требует учета множества факторов: физико-химической неоднородности среды, различной геометрии волноводов, разнообразных геоакустических свойств донных отложений и т.д. [7–10], поэтому актуальность создания гибких математических моделей, адаптированных под конкретные задачи, становится все более важной. Существует большое количество работ [11–15], в которых дан обзор подходов и методов, применяемых для расчета звуковых полей в неидеальных волноводах, учитывающих специфические требования как к модели, так и к вычислительной эффективности алгоритмов решения поставленных задач.

Исторически первая и наиболее известная мо-

дель — классический гидроакустический волновод с абсолютно жестким дном и мягкой поверхностью [16] — показала хорошие результаты для волноводов с каменистым дном, однако в эксперименте структура мод и затухание звука зачастую не соответствовали теории. Pekeris [17] в 1948 г. предложил модель неидеального волновода, состоящего из водного слоя, лежащего на жидком полупространстве. В этом случае спектр краевой задачи, кроме дискретной составляющей, будет также содержать и непрерывную часть — интеграл по берегам разреза. Модель Pekeris получила хорошее экспериментальное подтверждение при натурных экспериментах в мелких морях восточного побережья США [18]. Тем не менее наблюдаемый спад звукового давления происходил существенно быстрее, чем предсказывала модель. Поскольку поглощение звука в самой морской среде мало, то, очевидно, этот эффект был обусловлен диссипативными потерями в подводном грунте, т.е. наличием донного поглощения. В работах [19–21] проводится обобщение модели Pekeris на случай дна в форме упругого полупространства, исследуется вклад непрерывной части спектра и влияние разрезов на структуру поля. В работе [22] упругий волновод Pekeris используется как основа для численного моделирования акустических полей вблизи побережья Австралии при помощи метода конечных элементов. Заметим, что в данной работе даются уточненные граничные условия на границе вода–воздух.

* E-mail: yulia.papkova@gmail.com

Представленная в работе модель волновода является частным случаем неоднородного акустического волновода с осадками и упругим донным слоем на жестком основании, где сезонная изменчивость в верхнем водном слое описывается с помощью параметров рефракционного члена скорости звука в морской воде. Границы волновода полагаются плоскопараллельными. На поверхности волновода ставятся условия стыковки с воздушным слоем. Аналитическое решение для данной модели волновода представлено впервые.

1. МОДЕЛЬ ВОЛНОВОДА

Расположим начало цилиндрической системы координат на поверхности моря над точечным источником, размещенным на глубине z_0 . Акустические свойства водного слоя глубины h_0 описываются неоднородной рефракционной составляющей скорости звука в воде $c(z)$ и плотностью ρ . На поверхности моря волновод граничит с однородным полупространством, имеющим скорость звука c_a и плотность ρ_a . В частности, в роли данного полупространства может выступать воздушная среда. Для многих морских волноводов характерным является достаточно большой слой донных илистых осадков, которые моделируются жидким слоем с постоянной скоростью звука c_0 и плотностью ρ_0 . В предложенной модели глубина слоя жидких осадков составляет $h_1 = h - h_0$. Далее следует слой донных осадков с ярко выраженными упругими свойствами, которые описываются в рамках модели упругого изотропного тела двумя упругими константами и плотностью ρ_1 . В качестве таких констант можно выбрать число Пуассона λ и модуль сдвига G , однако удобнее использовать связанные с ними скорости распространения продольной и поперечной упругих волн, которые соответственно выражаются как

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho_1}}, c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho_1}}. \quad (1)$$

Положим глубину упругого осадочного слоя как $H_1 = H - h$. В основании плоскостростного волновода — абсолютно жесткое основание, которое можно интерпретировать как скалистую подложку. На рис. 1 представлено сечение описанного выше волновода.

Акустическое поле в представленном волноводе может быть выражено при помощи потенциалов верхнего полупространства $\Phi_a(r, z)$ ($z \leq 0$), потенциала водного слоя $\Phi(r, z)$ ($0 \leq z \leq h_0$), потенциала слоя жидких осадков $\Phi_0(r, z)$ ($h_0 \leq z \leq h$) и двух упругих потенциалов $\varphi(r, z)$ и $\theta(r, z)$ при $h \leq z \leq H$.

Тогда звуковое давление в водном слое выражается в виде

$$P = \rho \omega^2 \Phi. \quad (2)$$

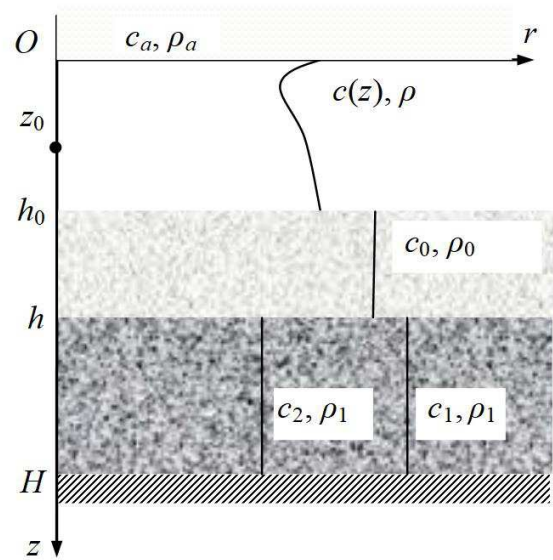


Рис. 1. Модель плоскостростного акустического волновода с радиальной симметрией

Аналогичным образом вычисляется звуковое давление в верхнем полупространстве и жидком осадочном слое.

Как известно, компоненты вектора смещений, а также нормальные и касательные напряжения в упругом слое можно выразить через упругие потенциалы в виде:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + k_2^2 \theta, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + k_2^2 \theta \right) + 2G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \lambda k_1^2 \varphi, \\ \sigma_{rz} &= 2G \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{k_2^2}{2} \theta \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где для удобства введены волновые числа $k_j = \frac{\omega}{c_j + i\alpha_j}$, ($j = 1, 2$), а малые величины α_j описывают затухание звука в упругом слое.

Все введенные выше потенциалы должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца в каждом слое соответственно

$$\frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial r^2} + k_a^2 \Phi_a = 0, \quad (z \leq 0), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c^2(z)} \Phi &= \\ &= -\frac{\delta(z - z_0) \delta(r)}{2\pi r}, \quad (0 \leq z \leq h_0), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + k_0^2 \Phi_0 = 0, \quad (h_0 \leq z \leq h), \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + k_1^2 \varphi = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + k_2^2 \theta = 0, \end{cases} \quad (h \leq z \leq H), \quad (8)$$

где $k_a = \frac{\omega}{c_a}$ и $k_0 = \frac{\omega}{c_0 + i\alpha_0}$ — волновые числа в верхнем полупространстве и слое жидких осадков соответственно; α_0 — коэффициент затухания в слое жидких осадков.

В представленной модели условие жесткого дна $u_r = u_z = 0$ ставится при $z = H$. Также выполняются условия затухания [2] на бесконечности при $z \rightarrow -\infty$ и при $z \rightarrow \infty$. Условия непрерывности звукового поля в слоистом волноводе имеют вид:

$$z = 0: \quad \rho \Phi = \rho_a \Phi_a; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial z}, \quad (9)$$

$$z = h_0: \quad \rho \Phi = \rho_0 \Phi_0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \quad (10)$$

а также на границе жидких осадков и упругого слоя при $z = h$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = u_z; \quad P_0 = -\sigma_{zz}; \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (11)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Будем искать решение краевой задачи (5)–(11) в форме

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \bar{\Phi}(z) H_0^{(1)}(\xi r); \quad \Phi_0(r, z) = \bar{\Phi}_0(z) H_0^{(1)}(\xi r); \\ \varphi(r, z) &= \bar{\varphi}(z) H_0^{(1)}(\xi r); \quad \theta(r, z) = \bar{\theta}(z) H_0^{(1)}(\xi r), \end{aligned} \quad (12)$$

где ξ — константа разделения.

Заметим, что затухающее решение для верхнего полупространства имеет при $Re \xi \geq 0$ следующий вид:

$$\Phi_a(r, z) = A e^{\sqrt{\xi^2 - k_a^2} z} H_0^{(1)}(\xi r). \quad (13)$$

Подстановка (13) в условия сопряжения (9)

$$\begin{cases} \rho \bar{\Phi} = \rho_a A \\ \bar{\Phi}' = A \sqrt{\xi^2 - k_a^2} \end{cases}$$

позволяет, исключив константу A , записать импедансное условие для $\bar{\Phi}$ на поверхности водного слоя $z = 0$:

$$\bar{\Phi} + g_a \bar{\Phi}' = 0, \quad (14)$$

где $g_a = \frac{i \rho_a}{\rho \sqrt{k_a^2 - \xi^2}}$.

Относительно функций $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}_0$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) \bar{\Phi} = -\delta(z - z_0), \quad (0 \leq z \leq h_0), \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}_0}{dz^2} + (k_0^2 - \xi^2) \bar{\Phi}_0 = 0, \quad (h_0 \leq z \leq h), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} + (k_1^2 - \xi^2) \bar{\varphi} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\theta}}{dz^2} + (k_2^2 - \xi^2) \bar{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (h \leq z \leq H). \quad (17)$$

Для данной системы, кроме граничного условия (14), добавляются условия, возникающие из (10)–(11):

$$\begin{aligned} \rho \bar{\Phi}(h_0; \xi) &= \rho_0 \bar{\Phi}_0(h_0; \xi), \\ \bar{\Phi}'(h_0; \xi) &= \bar{\Phi}_0'(h_0; \xi), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{\Phi}_0'(h; \xi) = \frac{k_2^2}{2} \bar{\theta}(h; \xi), \quad (19)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{k_2^2}{2} \bar{\Phi}_0(h; \xi) + \xi^2 \bar{\theta}'(h; \xi) + \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \bar{\varphi}(h; \xi) = 0, \quad (20)$$

$$\bar{\varphi}'(h; \xi) + \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \bar{\theta}(h; \xi) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(H; \xi) + \bar{\theta}'(H; \xi) &= 0; \\ \bar{\varphi}'(H; \xi) + \xi^2 \bar{\theta}(H; \xi) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Положим, что однородное дифференциальное уравнение (15) допускает точное решение:

$$\bar{\Phi} = C_1 \psi_1(z; \xi) + C_2 \psi_2(z; \xi). \quad (23)$$

Тогда можно существенно упростить как нахождение собственных чисел и функций соответствующей однородной краевой задачи (15)–(22), так и построение функции Грина в водном слое, учитывая тот факт, что дифференциальные уравнения (16)–(17) в силу того, что скорость звука в данных слоях постоянна, допускают элементарные решения

$$\bar{\Phi}_0 = C_3 \sin \mu_0 z + C_4 \cos \mu_0 z, \quad (24)$$

$$\bar{\varphi} = C_5 \sin \mu_1 z + C_6 \cos \mu_1 z, \quad (25)$$

$$\bar{\theta} = C_7 \sin \mu_2 z + C_8 \cos \mu_2 z, \quad (26)$$

где $\mu_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}$, $(j = 0, 1, 2)$.

Действительно, опираясь на общие решения для упругих потенциалов, можно их исключить из системы. Для этого рассмотрим условия (21)–(22), подставляя в них (25)–(26):

$$\begin{cases} \mu_1 \cos \mu_1 h C_5 - \mu_1 \sin \mu_1 h C_6 + \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2}\right) \sin \mu_2 h C_7 + \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2}\right) \cos \mu_2 h C_8 = 0, \\ \sin \mu_1 H C_5 + \cos \mu_1 H C_6 + \mu_2 \cos \mu_2 H C_7 - \mu_2 \sin \mu_2 H C_8 = 0, \\ \mu_1 \cos \mu_1 H C_5 - \mu_1 \sin \mu_1 H C_6 + \xi^2 \sin \mu_2 H C_7 + \xi^2 \cos \mu_2 H C_8 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Относительно неизвестных $Y_6 = C_6/C_5$, $Y_7 = C_7/C_5$, $Y_8 = C_8/C_5$ данная система представляет собой систему трех линейных уравнений, решение которой может быть выражено явно по формулам Крамера:

$$Y_6 = \Delta_6/\Delta_5, \quad Y_7 = \Delta_7/\Delta_5, \quad Y_8 = \Delta_8/\Delta_5, \quad (28)$$

где определитель системы обозначен как

$$\Delta_5 = \det \begin{pmatrix} -\mu_1 \sin \mu_1 h & \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2}\right) \sin \mu_2 h & \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2}\right) \cos \mu_2 h \\ \cos \mu_1 H & \mu_2 \cos \mu_2 H & -\mu_2 \sin \mu_2 H \\ -\mu_1 \sin \mu_1 H & \xi^2 \sin \mu_2 H & \xi^2 \cos \mu_2 H \end{pmatrix},$$

а Δ_6 , Δ_7 и Δ_8 — соответствующие вспомогательные определители.

Тогда можно получить аналитические выражения

$$\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}'} = \frac{1}{\mu_1} \frac{C_5 \sin \mu_1 h + C_6 \cos \mu_1 h}{C_5 \cos \mu_1 h - C_6 \sin \mu_1 h} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\Delta_5 \sin \mu_1 h + \Delta_6 \cos \mu_1 h}{\Delta_5 \cos \mu_1 h - \Delta_6 \sin \mu_1 h}, \quad (29)$$

$$\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\theta}} = \mu_2 \frac{C_7 \cos \mu_2 h - C_8 \sin \mu_2 h}{C_7 \sin \mu_2 h + C_8 \cos \mu_2 h} = \mu_2 \frac{\Delta_7 \cos \mu_2 h - \Delta_8 \sin \mu_2 h}{\Delta_7 \sin \mu_2 h + \Delta_8 \cos \mu_2 h}. \quad (30)$$

Далее из условий (19) и (20) можно найти отношение при $z = h$:

$$-\frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_0'} = \frac{4\rho_1}{k_2^4 \rho_0} \left(\left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\theta}} + \xi^2 \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\theta}} \right),$$

которое, учитывая связь из (21) $\bar{\theta} = -\frac{\bar{\varphi}'}{\xi^2 - \frac{k_2^2}{2}}$, может быть записано в виде:

$$-\frac{\bar{\Phi}_0}{\bar{\Phi}_0'} = \frac{4\rho_1}{k_2^4 \rho_0} \left(\xi^2 \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\theta}} - \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right)^2 \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}'} \right). \quad (31)$$

Таким образом, получаем импендансное условие на дне слоя жидких осадков

$$\bar{\Phi}_0(h; \xi) + g_0(\xi) \bar{\Phi}_0'(h; \xi) = 0, \quad (32)$$

где импендансную функцию

$$g_0(\xi) = \frac{4\rho_1}{k_2^4 \rho_0} \left(\xi^2 \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\theta}} - \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right)^2 \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}'} \right)$$

можно существенно упростить путем элементарных преобразований:

$$g_0(\xi) = \frac{4\rho_1}{k_2^4 \rho_0} \frac{\xi^2 \left(\mu_1^2 \mu_2^2 + \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right)^2 \right) \sin \mu_1 H_1 \sin \mu_2 H_1}{\eta(\xi)} + \frac{2\xi^2 \mu_1 \mu_2 \left(\xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) - \mu_1 \mu_2 \left(\frac{k_2^4}{4} - k_2^2 \xi^2 + 2\xi^4 \right) \cos \mu_1 H_1 \cos \mu_2 H_1}{\eta(\xi)}, \quad (33)$$

где $\eta(\xi) = \mu_1 (\xi^2 \cos \mu_1 H_1 \sin \mu_2 H_1 + \mu_1 \mu_2 \sin \mu_1 H_1 \cos \mu_2 H_1)$.

Описанный выше подход может также быть использован для выполнения оставшихся условий (18). Действительно, если учесть, что в слое осадков функция потенциала $\bar{\Phi}_0$ выражается через тригонометрические функции (24), то можно получить импендансное условие на границе водного слоя — слоя жидких осадков. Подставим данное общее решение в условия непрерывности (18) и в условие (32):

$$\begin{cases} \sin \mu_0 h C_3 + \cos \mu_0 h C_4 + g_0(\xi) \mu_0 \cos \mu_0 h C_3 - g_0(\xi) \mu_0 \sin \mu_0 h C_4 = 0, \\ \rho \bar{\Phi}(h_0) = \rho_0 (\sin \mu_0 h_0 C_3 + \cos \mu_0 h_0 C_4), \\ \bar{\Phi}'(h_0) = \mu_0 (\cos \mu_0 h_0 C_3 - \sin \mu_0 h_0 C_4). \end{cases} \quad (34)$$

Откуда легко найти, что

$$\bar{\Phi}(h_0; \xi) + g(\xi) \bar{\Phi}'(h_0; \xi) = 0, \quad (35)$$

где

$$g(\xi) = \frac{\rho_0 \sin \mu_0 h_1 + g_0(\xi) \mu_0 \cos \mu_0 h_1}{\rho \mu_0 \cos \mu_0 h_1 - g_0(\xi) \mu_0 \sin \mu_0 h_1}.$$

Таким образом, построение потенциала водного слоя сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения (15) с импедансными краевыми условиями (14), (35). Для построения функции Грина этой задачи воспользуемся подходом, изложенном в монографии [7]. В частности, если ввести в рассмотрение функции $V(z; \xi)$ и $U(z; \xi)$ — решения однородного уравнения (15), удовлетворяющие соответственно условию (14) и условию (35):

$$\begin{aligned} V(0; \xi) + g_a(\xi) V'(0; \xi) &= 0, \\ U(h_0; \xi) + g(\xi) U'(h_0; \xi) &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

то функция Грина может быть записана как

$$G(z, z_0; \xi) = \begin{cases} \frac{U(z_0; \xi) V(z; \xi)}{W(\xi)}, & z < z_0; \\ \frac{U(z; \xi) V(z_0; \xi)}{W(\xi)}, & z > z_0. \end{cases} \quad (37)$$

$$V(z; \xi) = \psi_1(z; \xi) - \frac{\psi_1(0; \xi) + g_a(\xi) \psi_1'(0; \xi)}{\psi_2(0; \xi) + g_a(\xi) \psi_2'(0; \xi)} \psi_2(z; \xi);$$

$$U(z; \xi) = \psi_1(z; \xi) - \frac{\psi_1(h_0; \xi) + g(\xi) \psi_1'(h_0; \xi)}{\psi_2(h_0; \xi) + g(\xi) \psi_2'(h_0; \xi)} \psi_2(z; \xi);$$

$$W(\xi) = \det \begin{pmatrix} U & V \\ U' & V' \end{pmatrix}.$$

Функция Грина (37) позволяет записать потенциал водного слоя в виде контурного интеграла на плоскости ξ , где контур охватывает все особые точки $G(z, z_0; \xi)$ — нули $W(\xi)$:

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{4\pi} \oint_C G(z, z_0; \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi. \quad (38)$$

Так как функция $W(\xi)$ равна нулю лишь на собственных числах $\{\xi_n\}$ краевой задачи (14)–(22), то для того, чтобы вычислить интеграл (38) по основной теореме о вычетах, найдем явное выражение для $\frac{dW(\xi_n)}{d\xi}$, опираясь на решение схожей задачи в [7].

Заметим, что при $\xi \rightarrow \xi_n$ введенные функции $V(z; \xi)$ и $U(z; \xi)$ будут стремиться к соответствующим собственным функциям краевой задачи $\bar{\Phi}_n(z)$, и, как следствие, будут линейно-зависимыми:

$$V(z; \xi_n) = \bar{\Phi}_n(z); \quad U(z; \xi_n) = K \bar{\Phi}_n(z), \quad (39)$$

где K — некоторая константа.

Вычитая тождества для функций $\bar{\Phi}_n(z)$ и $U(z; \xi)$, верные при $0 \leq z \leq h_0$,

$$\begin{aligned} U \left(\bar{\Phi}_n'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_n^2 \right) \bar{\Phi}_n \right) &= 0; \\ \bar{\Phi}_n \left(U'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right) U \right) &= 0, \end{aligned}$$

получаем

$$U'' \bar{\Phi}_n - U \bar{\Phi}_n'' - (\xi^2 - \xi_n^2) U \bar{\Phi}_n = 0.$$

Откуда, интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до h_0 , находим, что

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n(h_0) U'(h_0; \xi) - \bar{\Phi}_n'(h_0) U(h_0; \xi) + \bar{\Phi}_n'(0) U(0; \xi) - \\ - \bar{\Phi}_n(0) U'(0; \xi) = (\xi^2 - \xi_n^2) \int_0^{h_0} \bar{\Phi}_n U dz. \end{aligned} \quad (40)$$

Далее, учитывая из граничных условий, что

$$U'(h_0; \xi) = -\frac{U(h_0; \xi)}{g(\xi)}; \quad \bar{\Phi}_n'(h_0) = -\frac{\bar{\Phi}_n(h_0)}{g(\xi_n)};$$

$$V(0; \xi) = -g_a(\xi) V'(0; \xi); \quad \bar{\Phi}_n(0) = -g_a(\xi_n) \bar{\Phi}_n'(0),$$

преобразуем (40) к виду:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n(h_0) U(h_0; \xi) \left(\frac{1}{g(\xi_n)} - \frac{1}{g(\xi)} \right) + \\ + \bar{\Phi}_n'(0) U'(0; \xi) (g_a(\xi_n) - g_a(\xi)) + \frac{\bar{\Phi}_n'(0)}{V'(0; \xi)} W(\xi) = \\ = (\xi^2 - \xi_n^2) \int_0^{h_0} \bar{\Phi}_n U dz. \end{aligned}$$

Здесь используется тот факт, что $W(\xi) = (UV' - U'V)|_{z=0} = V'(0; \xi) (U(0; \xi) + g_a(\xi) U'(0; \xi))$.

Так как $W(\xi_n) = 0$, то из последнего соотношения следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Phi}_n'(0)}{V'(0; \xi)} \frac{W(\xi) - W(\xi_n)}{\xi - \xi_n} = \\ = (\xi + \xi_n) \int_0^{h_0} \bar{\Phi}_n U dz - \frac{\bar{\Phi}_n(h_0) U(h_0; \xi) g(\xi) - g(\xi_n)}{g(\xi_n) g(\xi)} \frac{\xi - \xi_n}{\xi - \xi_n} + \\ + \bar{\Phi}_n(0) U(0; \xi) \frac{g_a(\xi) - g_a(\xi_n)}{\xi - \xi_n}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\xi \rightarrow \xi_n$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW(\xi_n)}{d\xi} = K \left(2\xi_n \int_0^{h_0} \bar{\Phi}_n^2 dz - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\Phi}_n^2(h_0)}{g^2(\xi_n)} \frac{dg(\xi_n)}{d\xi} + \frac{\bar{\Phi}_n^2(0)}{g_a^2(\xi_n)} \frac{dg_a(\xi_n)}{d\xi} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда контурный интеграл (38) можно представить в виде суммы дискретной составляющей поля, получающейся как сумма вычетов от подынтегральной функции в полюсах $\{\xi_n\}$ и непрерывной составляющей поля — интегралы по берегам разрезов от точек ветвления радикалов, входящих в выражение функции Грина. Легко заметить, что импедансная функция $g_0(\xi)$ является четной по $\mu_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}$, ($j = 1, 2$) так же, как и функция $g(\xi)$ является четной по $\mu_0 = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}$, то есть граничное условие (35) на дне водного слоя не зависит

от знака этих радикалов. Следовательно, построенная функция Грина также не зависит от знака этих радикалов, и интегралы по берегам разрезов от точек ветвления этих радикалов будут равны нулю. По этой причине в непрерывной составляющей поля будут присутствовать интегралы по берегам разреза только от радикала $\mu_a = \sqrt{k_a^2 - \xi^2}$.

Проведем P — разрез на комплексной плоскости ξ , аналогично разрезу Пекериса [20], который используется для волноводов с моделью дна в виде жидкого (упругого) полупространства. Данный разрез проводится от точки k_a вертикально вверх и соответствует определению радикала, при котором слева от разреза радикал берется с положительным знаком, а справа с отрицательным:

$$\mu_a = \begin{cases} -\left(\sqrt{k_a^2 - \xi^2}\right)_0, & \xi \in \Omega, \\ \left(\sqrt{k_a^2 - \xi^2}\right)_0, & \xi \notin \Omega \end{cases}, \quad (42)$$

где $\left(\sqrt{k_a^2 - \xi^2}\right)_0$ — главная ветвь радикала, а область $\Omega = \left\{ \text{Im} \left(\sqrt{k_a^2 - \xi^2} \right)_0 < 0, \text{Re } \xi > \text{Re } k_a \right\}$.

Вычисляя интеграл (38) как сумму вычетов, получаем выражение для потенциала $\Phi(r, z)$ в виде суммы дискретной составляющей поля (сумма нормальных мод) и непрерывной составляющей (интегралы по берегам разреза):

$$\Phi(r, z) = \Phi_D(r, z) + \Phi_C(r, z), \quad (43)$$

где

$$\Phi_D(r, z) = \frac{i}{4} \sum_n \frac{\overline{\Phi}_n(z) \overline{\Phi}_n(z_0)}{\gamma_n} H_0^{(1)}(\xi_n r),$$

$$\begin{aligned} \Phi_C(r, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{P_-} G(z, z_0; \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{P_+} G(z, z_0; \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n = \frac{1}{2\xi_n} \frac{dW(\xi_n)}{d\xi} = & \int_0^{h_0} \overline{\Phi}_n^2 dz - \frac{\overline{\Phi}_n^2(h_0)}{2\xi_n g^2(\xi_n)} \frac{dg(\xi_n)}{d\xi} + \\ & + \frac{\overline{\Phi}_n^2(0)}{2\xi_n g_a^2(\xi_n)} \frac{dg_a(\xi_n)}{d\xi}. \end{aligned}$$

Заметим, что даже для акустических волноводов с моделью дна в виде жидкого (упругого) полупространства интегралы по берегам разреза вносят малый вклад [8, 20], который замечен лишь на небольших расстояниях от источника. В представленной работе полупространство моделирует воздушную среду со значительно меньшими величинами плотности и скорости звука, то есть разрез P будет расположен на значительном удалении справа от дискретного спектра $\{\xi_n\}$, как следствие интегралы по берегам разреза фактически не влияют на значение $\Phi(r, z)$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численной реализации предложенного подхода использовался пакет Mathematica. В качестве тестового примера рассмотрим плоскостойкий волновод, в котором водный слой глубины $h_0 = 80$ м лежит на слоистом основании. Слой ила моделируется слоем жидких осадков со скоростью звука $c_0 = 1600$ м/с и плотностью $\rho_0 = 1500$ кг/м³, что соответствует усредненным значениям илистых пород. Далее расположен упругий слой с плотностью $\rho_1 = 2200$ кг/м³, продольной скоростью распространения упругих волн $c_1 = 1800$ м/с и поперечных волн $c_2 = 1000$ м/с. В основании полагаем абсолютно жесткую подложку на глубине 200 м. Скорость звука в воздухе полагалась $c_a = 335$ м/с, плотность — равной $\rho_a = 1.2$ кг/м³.

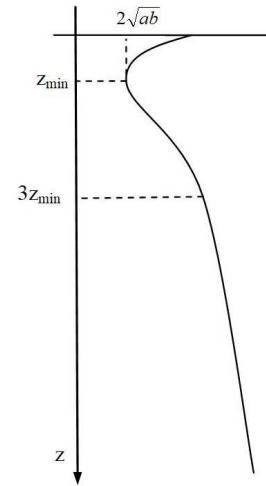


Рис. 2. Неоднородный рефракционный член скорости звука в воде

Неоднородный рефракционный член скорости звука в воде моделируется аналитической зависимостью (рис. 2), которая приближенно описывает поведение скорости звука у побережья Крыма:

$$c(z) = a\sqrt{z+d} + \frac{b}{\sqrt{z+d}}. \quad (44)$$

Заметим, что в случае зависимости (44) общее решение волнового уравнения может быть выражено через функции Whittaker:

$$\begin{aligned} \psi_1(z; \xi) &= M_{\kappa, m}(2\xi(z + \frac{b}{a} + d)) \\ \psi_2(z; \xi) &= M_{\kappa, -m}(2\xi(z + \frac{b}{a} + d)) \\ \kappa &= \frac{\omega^2}{2a^2\xi}; \quad m = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b\omega^2}{a^3}}, \end{aligned} \quad (45)$$

что позволяет для данного профиля скорости звука построить аналитическое решение задачи согласно представленным выше формулам.

На рис. 3 для указанных параметров волновода представлен модуль непрерывной составляющей поля $|\Phi_C(r, z)|$ при фиксированных глубинах

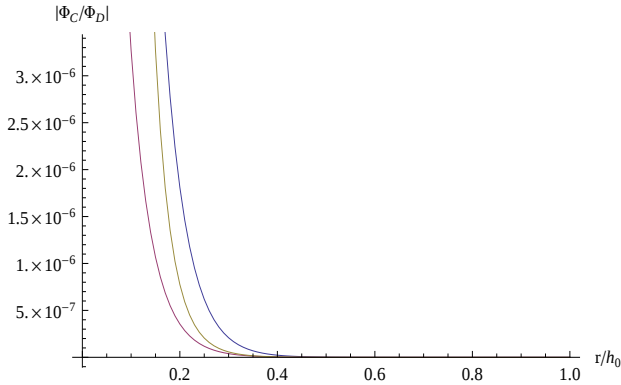


Рис. 3. Модуль непрерывной составляющей поля на различных глубинах

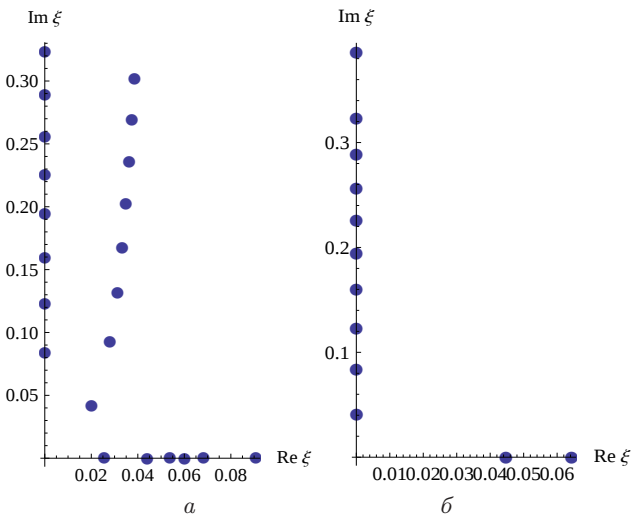


Рис. 4. Дискретный спектр краевой задачи при $H = 200$ м, $\omega = 100$ рад/с, при глубине упругого слоя: а — $H_1 = 100$ м, б — $H_1 = 1$ м

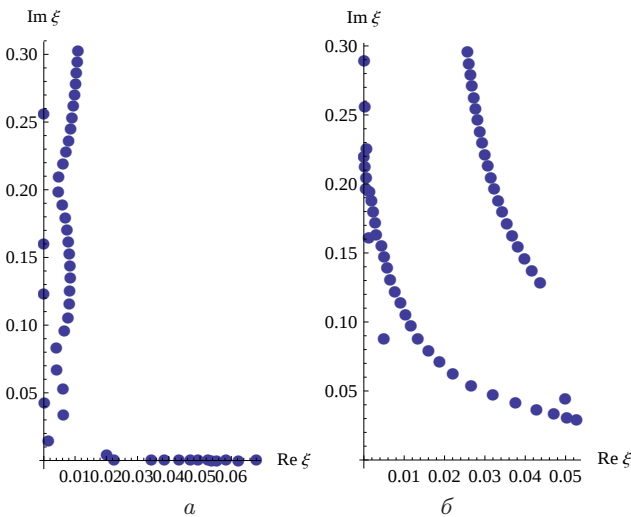


Рис. 5. Дискретный спектр краевой задачи при $H = 500$ м, $\omega = 100$ рад/с, при глубине упругого слоя $H_1 = 400$ м: а — $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.02$, б — $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$

$z = \{0.1h_0, 0.5h_0, 0.9h_0\}$ при удалении от источника звука (круговая частота $\omega = 100$ рад/с). Можно увидеть, что вкладом в представление звукового поля от непрерывной составляющей фактически можно пренебречь. Таким образом, звуковое поле будет определяться дискретной составляющей спектра. При вычислении спектра краевой задачи $\{\xi_n\}$ использовался метод Ньютона.

Распределение собственных значений представлено на рис. 4 для рассматриваемых параметров волновода при глубине $H = 200$ м, $\omega = 100$ рад/с. Затухание в упругом слое предполагается достаточно малым — $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.02$. Рис. 4, а соответствует глубине осадочного слоя $H_1 = 100$ м, рис. 4, б случаю $H_1 = 1$ м, т.е. фактически соответствует модели волновода, в которой осадочный слой моделируется слоем жидких осадков на жестком основании. В обоих случаях имеется конечное число «почти» вещественных собственных значений, отвечающих волноводному распространению звука, бесконечное число «почти» мнимых значений, соответствующих затухающим модам. На рис. 4, а можно увидеть также комплексные значения, которые, очевидно, являются вкладом упругого слоя. При малой толщине упругого слоя (рис. 4, б) собственные значения практически совпадают с классической моделью волновода с жестким дном [1, 16].

При увеличении глубины волновода H возрастает количество собственных значений, попадающих в рассматриваемую область комплексной плоскости ξ . На рис. 5 показан дискретный спектр краевой задачи (14)–(22) при $H = 500$ м, $\omega = 100$ рад/с в двух случаях: при малом затухании $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.02$ в упругом слое (рис. 5, а) и при больших в десять раз коэффициентах затухания (рис. 5, б).

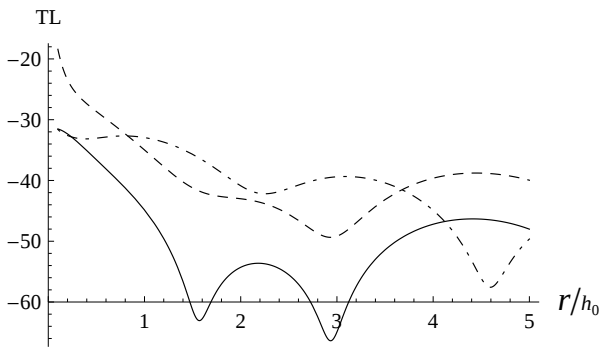
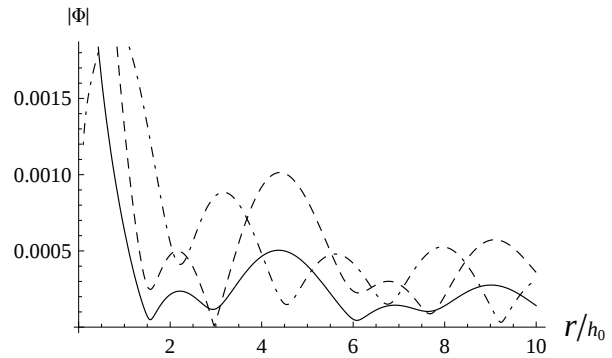
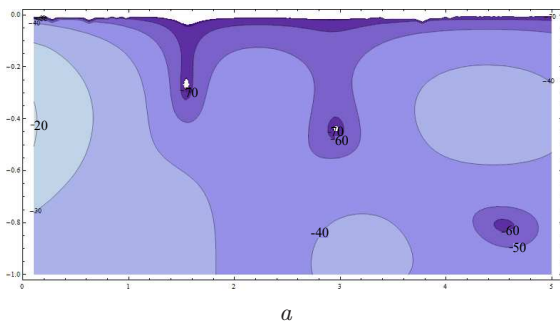
Здесь интересно отметить тот факт, что собственные значения на рис. 5, б ложатся на гиперболическую кривую совершенно таким же образом, что и дискретный спектр в модели волновода на упругом полупространстве.

Как известно, изменение амплитуды поля в волноводе характеризуется величиной потерь при распространении (интенсивность):

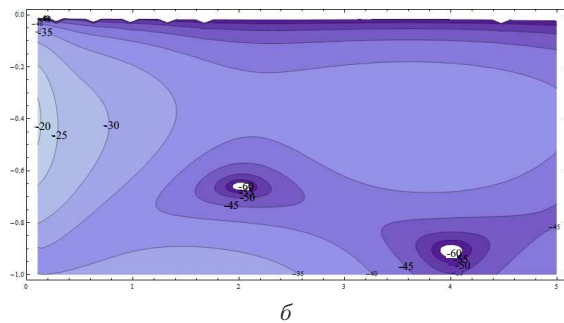
$$TL = 20 \lg \left| \frac{\Phi}{\Phi^*} \right|,$$

где Φ^* — амплитуда потенциала скоростей, создаваемая точечным источником звука на расстоянии $r = 1$ м в безграничной среде.

На рис. 6 показано изменение $TL(r, z)$ в зависимости от радиальной координаты r на различных глубинах — на поверхности волновода $z = 0.1h_0$ (сплошная линия), в середине волновода $z = 0.5h_0$ (штриховая линия) и возле дна $z = 0.9h_0$ (штрихпунктир) при глубине $H = 200$ м, $\omega = 100$ рад/с, источник расположен в точке $z_0 = 0.5h_0$. Из рис. 6 видно, что все три графика имеют схожий характер убывания при увеличении r . В целом потери на поверхности минимальны и максимальны у дна волновода.

Рис. 6. Зависимость TL от радиальной координатыРис. 7. Зависимость $|\Phi|$ от радиальной координаты при $z = 33$ м ($z = 0.1h_0$ — сплошная линия; $z = 0.4h_0$ — штриховая линия; $z = 0.9h_0$ — штрихпунктир)

а



б

Рис. 8. Зависимость $TL(r/h_0, z/h_0)$ при различной глубине слоя упругих осадков: а — $H_1 = 100$ м, б — $H_1 = 1$ м

На рис. 7 показано изменение амплитуды звукового давления $\Phi(r, z)$ в зависимости от r при фиксированном значении глубины $z = 33$ м. На данном рисунке варьировалась глубина погружения источника звука z_0 . Можно увидеть, что при расположении источника у поверхности волновода амплитуда звукового давления является наименьшей.

Для наглядной оценки влияния упругого слоя на величину потерь представлен рис. 8, где показаны значения TL для двух случаев: а — при толщине слоя ила $h_1 = 20$ м и упругого слоя $H_1 = 100$ м; б — при толщине слоя ила $h_1 = 20$ м и упругого слоя $H_1 = 1$ м. Несмотря на то, что глубина водного слоя и слоя жидких осадков остается той же, можно увидеть существенные отличия в распределении звуковых потерь, что указывает на существенное влияние структуры донных осадков на звуковое поле в волноводе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получено точное аналитическое решение задачи о распространении звука точечным источником в морском геофизическом волноводе. Дно волновода моделируется как состоящее из слоя жидких осадков и упругой подложки

на жестком основании. Ставится уточненное граничное условие на поверхности волновода. Акустические свойства морской среды во многом определяются неоднородным рефракционным членом профиля скорости звука. Предложенная аппроксимация типичного профиля скорости звука в водном слое функциями, с помощью которых строится аналитическое решение уравнения Гельмгольца, является одной из необходимых процедур при решении прямых и обратных задач распространения звука в морской среде, поэтому в статье затрагивается вопрос построения аппроксимирующих функций, допускающих аналитическое решение.

Впервые выводятся импедансные граничные условия (импедансные функции) на границах водного слоя для рассматриваемой модели волновода. Это, в свою очередь, позволяет построить функцию Грина и найти точное аналитическое решение задачи в виде суммы нормальных мод и интегралов по берегам разреза. Показано, что влияние верхнего воздушного полупространства ничтожно мало. Представлены численные примеры, которые иллюстрируют влияние донных слоев волновода на его характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ и города Севастополь в рамках научного проекта № 24-27-20021.

- 1969.
- [3] *Jensen F.B., Porter M.B., Kuperman W.A., Schmidt H.* Computational Ocean Acoustic. N.Y.: Springer-Verlag, 2011.
 - [4] *Papadakis J., Keller J.* Waves propagation and underwater acoustics. M: Mir, 1980.
 - [5] *Шендеров Е.Л.* Волновые проблемы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
 - [6] *Бреховский Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
 - [7] *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997.
 - [8] *Grigoriev V.A., Petnikov V.G., Shatravin A.V.* // *Acoustical Physics*. **63**(4). 433 (2017).
 - [9] *Buckingham M.J.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **48**(2). 962 (2020).
 - [10] *Luo W., Schmidt H.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **1**. 52 (2009).
 - [11] *Ballard M.S., Sagers J.D.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **146**(3). 1858 (2019).
 - [12] *Jensen F.B., Ferla C.M.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **87**(4). 1499 (1990).
 - [13] *Chapman C., Hobro J., Robertsson J.* // *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010. Society of Exploration Geophysicists*, 3013–3017. (2010).
 - [14] *Vendhan C.P., Diwan G.C., Bhattacharyya S.K.* // *Engineering analysis with boundary elements*. **21**. 131 (1998).
 - [15] *Etter P.C.* Underwater Acoustic Modeling and Simulation. CRC Press, 2018.
 - [16] *Бреховский Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
 - [17] *Pekeris C.L.* // *Geological Society of America Memoirs*. **27**. 1 (1948).
 - [18] *Stickler D.C.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **57**. 856 (1975).
 - [19] *Buckingham M. J., Giddens E. M.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **119**. 123 (2006).
 - [20] *Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В.* // *Акустический журнал*. **63**, № 4. 389 (2017).
 - [21] *Schneiderwind D. J., Collis. J. M., Simpson H.J.* // *The Journal of the Acoustical Society of America*. **132**. EL182 (2012).
 - [22] *Kirby R., Duan W.* // *Proceedings of ACOUSTICS*. 2018, 7-9 November 2018, Adelaide, Australia, 10 p.

On the Modelling of Acoustic Fields in a Marine Waveguide with Refined Boundary Conditions at the Surface and Bottom

Yu. I. Papkova^a, S. O. Papkov

Department of Mathematics, Sevastopol State University

Sevastopol 299053, Russia

E-mail: ^ayulia.papkova@gmail.com

The problem of the sound field of a point sound source placed in a non-ideal marine waveguide is considered. The boundaries of the waveguide are assumed to be plane-parallel, and three layers are distinguished: a water layer with an inhomogeneous refractive component of the sound speed, a layer of liquid sediments, and an elastic bottom layer on a rigid base. At the top, the water layer adjoins a homogeneous air half-space. For the given waveguide model, analytical expressions for the impedance functions at the boundaries of the water layer are obtained for the first time, which makes it possible to construct the Green's function of the vertical boundary-value problem. Moreover, exact values for the residues of the Green's function are found, which allows for writing down an exact analytical representation for the acoustic pressure potential in the form of a sum of normal modes. It is shown that, in this model, the influence of the continuous spectrum (integrals along the branch cuts) is small even at short distances from the source. As the thickness of the elastic layer decreases, the discrete spectrum of the problem tends to the values for the classical waveguide; with sufficiently large thickness and attenuation, it resembles the discrete spectrum of the Pekeris elastic waveguide. Examples of numerical implementation for waveguide parameters typical for the Black Sea region are given.

PACS: 43.30.-k, 43.30.+m.

Keywords: inhomogeneous hydroacoustic waveguide, elastic bottom, impedance boundary conditions, normal modes

Received 04 May 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. 5. Pp. .

Сведения об авторах

1. Папкина Юлия Игоревна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: yulia.papkova@gmail.com.
2. Папков Станислав Олегович — доктор физ.-мат. наук, доцент; e-mail: SOPapkov@sevsu.ru.