

## Анализ гистерезисного поведения зоны захвата в зеэмановском кольцевом лазере

М.Е. Грушин,<sup>1</sup> Е.Г. Ларионцев,<sup>2,\*</sup> И.И. Савельев,<sup>1</sup> Е.В. Сухов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>АО «НИИ «Полус» им. М.Ф. Стельмаха». Россия, Москва, 117342, ул. Введенского, д. 3, корп. 1

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 22.04.2025; после доработки 12.10.2025; подписана в печать 17.10.2025)

Широкие области гистерезиса, экспериментально наблюдаемые в окрестности зоны захвата в зеэмановском кольцевом лазере, до последнего времени не удавалось описать теоретически. В настоящей статье предложена новая модель, учитывающая поглощение лазерного излучения в зеркалах резонатора. Получены выражения для коэффициентов связи встречных волн при дифракции на решетках поглощения. Проведены экспериментальные исследования гистерезиса области захвата в зеэмановском КЛ. На основе численного моделирования в рамках предложенной модели получены результаты, качественно согласующиеся с экспериментом.

PACS: 42.25.-p, 42.55.-f, 42.62.-b УДК: 535, 535.8

Ключевые слова: зеэмановский лазерный гироскоп, зона захвата частот встречных волн, гистерезис, режим биений.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80.2560403](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80.2560403)

### ВВЕДЕНИЕ

Кольцевые лазеры (КЛ) широко используются для измерения угловой скорости вращения [1]. При малых скоростях существует область нечувствительности к вращению, в которой КЛ переходит в режим захвата частот встречных волн. В окрестности области захвата может возникать гистерезисный эффект, проявляющийся в том, что порог области захвата  $\Omega_L^{\max}$  при выходе из области захвата в режим биений с ростом фазовой невязанности резонатора  $\Omega$  больше, чем порог  $\Omega_L^{\min}$  при входе в область захвата из режима биений. Гистерезис порога захвата затрудняет прогнозирование точностных параметров лазерных гироскопов. В то же время изучение его влияния на амплитудно-частотные характеристики кольцевого лазера позволяет лучше понять физику процессов в кольцевом лазере. Таким образом, исследование этого эффекта представляет научный и практический интерес, поэтому внимание к данному эффекту не пропадает, несмотря на то, что он известен уже давно [1–9]. Наиболее широкие области гистерезиса в He–Ne КЛ наблюдались экспериментально в [2] при работе в режиме синхронизации продольных мод. В режиме генерации на одной продольной моде гистерезисное поведение зоны захвата в He–Ne КЛ обсуждалось в [3–7]. В работе [6] для объяснения гистерезисных явлений был предложен механизм, связанный с воздействием внутррезонаторного поля на зеркала резонатора. Поле стоячей волны, возникающей в режиме захвата, создает дифракционные

решетки в зеркалах резонатора, которые приводят к дополнительному обратному рассеянию встречных волн и к увеличению зоны захвата. В работе [7] этот механизм возникновения дополнительной инерционной обратной связи был включен в систему уравнений, описывающую динамику излучения встречных волн в He–Ne КЛ. На основе численного решения этой системы уравнений были найдены узкие области гистерезиса с относительной шириной  $(\Omega_L^{\max} - \Omega_L^{\min})/\Omega_L^{\min}$  порядка 0.01. Экспериментально наблюдаемая ширина области гистерезиса в зеэмановском КЛ (см. [4, 5]) гораздо больше,  $(\Omega_L^{\max} - \Omega_L^{\min})/\Omega_L^{\min}$  порядка 1 и более.

Целью настоящей работы является выяснение причин такого несоответствия теории с экспериментом. В работе предложена модификация существующей теоретической модели, позволяющая описать широкие области гистерезиса, наблюдаемые в зеэмановском КЛ.

### 1. ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ШИРИНУ ОБЛАСТИ ЗАХВАТА

Рассмотрим модель He–Ne КЛ с дополнительной инерционной обратной связью встречных волн, рассмотренную в [7]. Поле в кольцевом резонаторе  $E(z, t)$  запишем в виде суммы двух встречных волн:

$$E(z, t) = E_1 \exp(ikz) + E_2 \exp(-ikz), \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $E_{1,2} = |E_{1,2}| \exp(i\varphi_{1,2})$  — комплексные амплитуды волн.

С целью моделирования дополнительной инерционной связи встречных волн, возникающей в зер-

\* E-mail: [e.lariontsev@yahoo.com](mailto:e.lariontsev@yahoo.com)

калах резонатора, внутрь резонатора вводится плоскопараллельный поглощающий слой. Плотность населенности инерционных поглощающих центров (ловушек электронов) в этом слое записывается

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \frac{\Delta\nu}{2} \left[ \kappa_1 \frac{1+\eta}{n_0} - 1 - \alpha |E_1|^2 - \beta |E_2|^2 \right] E_1 - i\Omega E_1/2 + i\tilde{m}_1 E_2/2 + \sigma(N_0 E_1 + N_1 E_2)l/2T, \\ \dot{E}_2 &= \frac{\Delta\nu}{2} \left[ \kappa_2 \frac{1+\eta}{n_0} - 1 - \alpha |E_2|^2 - \beta |E_1|^2 \right] E_2 + i\Omega E_2/2 + i\tilde{m}_2 E_1/2 + \sigma(N_0 E_2 + N_1^* E_1)l/2T, \\ \dot{N}_0 &= \frac{1}{T_1} [\bar{N} - N_0 - N_1 a E_2 E_1^* - N_1^* a E_1 E_2^*], \\ \dot{N}_1 &= \frac{1}{T_1} [-N_1 - N_0 a E_1 E_2^*].\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $\Delta\nu = p_c/T$  — ширина полосы резонатора,  $p_c$  — потери внутри резонатора,  $T = L/c$  — время обхода светом периметра резонатора,  $L$  — периметр резонатора,  $l$  — толщина поглощающего слоя;  $\kappa_1, \kappa_2$  — коэффициенты, описывающие поляризуемость усиливающей среды,  $1 + \eta$  — относительное превышение усиления над потерями в максимуме линии усиления,  $n_0$  — значение коэффициента усиления  $\kappa_1$  в максимуме линии усиления;  $\tilde{m}_{1,2} = m_{1,2} \exp(\pm i\vartheta_{1,2})$  — комплексные коэффициенты связи встречных волн;  $\sigma$  — поперечное сечение поглощения,  $T_1$  — время релаксации населенностей поглощающих центров,  $a$  — параметр насыщения поглощения,  $\bar{N}$  — плотность населенности  $N$  при отсутствии внутрирезонаторного поля.

Вклады поляризации поглощающей среды  $P_{1,2}$ , связанные с отражениями встречных волн на наведенных ими решетках поглощения  $N_1$ , записываются в модели 1 в виде

$$P_1 = \sigma N_1 E_2 l/2T, \quad P_2 = \sigma N_1^* E_1 l/2T. \quad (3)$$

Дополнительная связь встречных волн  $m_{1,2}^a$  на решетках поглощения описывается в уравнениях для комплексных амплитуд членами

$$m_1^a E_2/2 = \sigma N_1 l E_2/2T, \quad m_2^a E_1/2 = \sigma N_1^* l E_1/2T. \quad (4)$$

В режиме захвата частот встречных волн из уравнений (1) находим следующие стационарные значения населенностей

$$N_1 = -N_0 a E_1 E_2^*. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned}m_1^a E_2 &= -\sigma N_0 |E_2|^2 E_1/T, \\ m_2^a E_1 &= -\sigma N_0 |E_1|^2 E_2/T.\end{aligned}\quad (6)$$

Из (6) следует, что дополнительная связь, вносимая обратным рассеянием на решетках поглощения, не зависит от разности фаз встречных волн  $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$ . В режиме захвата учет этой связи аналогичен изменению коэффициента кросс — насыщения усиления  $\beta$  и не приводит к изменению ширины области захвата. При численном решении

в виде  $N = N_0 + N_1 \exp(i2kz) + N_1^* \exp(-i2kz)$ . Для комплексных амплитуд  $E_{1,2}$  и пространственных гармоник  $N_0$  и  $N_1$  запишем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

этой системы уравнений в [7] были найдены очень узкие области гистерезиса с относительной шириной  $(\Omega_L^{\max} - \Omega_L^{\min})/\Omega_L^{\min}$  порядка 0.01.

Таким образом, модель дополнительной инерционной связи на поглощающих центрах в зеркалах резонатора, предложенная в [7], не может описать широкие области гистерезиса зоны захвата с относительной шириной  $(\Omega_L^{\max} - \Omega_L^{\min})/\Omega_L^{\min}$  порядка 1 и более.

## 2. МОДУЛЯЦИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЗЕРКАЛА

В настоящей работе предложена и исследована другая феноменологическая модель инерционной обратной связи встречных волн на поглощающих центрах в зеркалах резонатора. Будем для удобства эту модель называть моделью 2, а предложенную в [7] — моделью 1.

Поглощение света на электронных ловушках исследовалось во многих работах (см., например, обзор [11]). Изменение концентрации электронных ловушек  $N$  в модели 2 будем описывать скоростным уравнением [11]

$$dN/dt = A - qSNI - N/T_1, \quad (7)$$

где  $A$  — скорость образования ловушек,  $T_1$  — их время жизни,  $q$  — квантовая эффективность возбуждения электрона в зону проводимости при поглощении фотона ловушкой,  $S$  — сечение поглощения фотона.

Поле двухплоских встречных волн, падающих под углом  $\vartheta$  на зеркало резонатора (см. рис. 1), запишем в виде:

$$E(x, y, t) = \mathbf{e}_1 E_1(y, t) \exp(ik_x x + ik_y y) + \mathbf{e}_2 E_2(y, t) \exp(-ik_x x + ik_y y), \quad (8)$$

где  $k_x = k \sin \vartheta, k_y = k \cos \vartheta$ ,  $\vartheta$  — угол падения волн на зеркало,  $\mathbf{e}_{1,2}$  — векторы поляризации волн.

Интенсивность излучения на поверхности зеркала равна

$$I = E(x, y, t) E^*(x, y, t) = I_0 + \Delta I, \quad (9)$$

2560403-3

$$\dot{N}_0 = A - \frac{N_0}{T_1} \left( 1 + \frac{I_0}{I_S} \right), \quad (17)$$

$$d\tilde{N}_1/dt = -\frac{\tilde{N}_1}{T_1} \left( 1 + \frac{I_0}{I_S} \right) - \frac{N_0}{T_1} \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 E_1 E_2^*}{I_S}, \quad (18)$$

$$d\tilde{N}_2/dt = -\frac{\tilde{N}_2}{T_1} \left( 1 + \frac{I_0}{I_S} \right) - \frac{\tilde{N}_1}{T_1} \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 E_1 E_2^*}{I_S}. \quad (19)$$

В уравнениях (17)–(19)  $I_S = T_1/qS$  — параметр насыщения. Поскольку в уравнениях (16) используются амплитуды поля, нормированные на амплитуду поля насыщения в активной среде He–Не лазера, параметр  $I_S$  оказывается равным отношению интенсивности насыщения электронных ловушек к интенсивности насыщения в активной среде лазера. Коэффициенты дополнительной связи встречных волн на поглощающих решетках в уравнениях (16) описываются выражениями  $m_{1d} = iA_m \tilde{N}_1 \tilde{N}_2^*/T$ ,  $m_{2d} = -iA_m^* \tilde{N}_1^* \tilde{N}_2$ .

## 5. ШИРИНА ОБЛАСТИ ЗАХВАТА В МОДЕЛИ 2

Рассмотрим, как влияет дополнительная связь встречных волн в зеркалах резонатора (в модели 2) на ширину зоны захвата и ее гистерезис. Будем решать численно систему уравнений (16)–(19) при следующих значениях параметров. Зеемановский КЛ [13] с периметром кольцевого резонатора  $L = 160$  см работает на одном изотопе Ne при давлении газовой смеси 700 Па. Внутррезонаторные потери за один обход резонатора равны  $p_c = 0.2\%$ . В работах [14, 15] приведены формулы для расчета коэффициентов, описывающих поляризуемость усиливающей среды. По этим формулам для рассматриваемого ЗЛГ были вычислены значения параметров в центре линии усиления:  $\alpha = 2.3006$ ,  $\beta = 1.1674$ . Положим относительное превышение усиления над потерями  $1 + \eta = 1.5$ . Коэффициенты связи встречных волн через обратное рассеяние  $\tilde{m}_{1,2} = m_{1,2} \exp(\pm i\vartheta_{1,2})$  зададим в виде:  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$ ,  $m/2\pi = 75$  Гц. Время жизни электронных ловушек положим равным  $T_1 = 1$  с. В модели 2 будем полагать, что электронные ловушки образуются под действием ультрафиолетового излучения из области газового разряда. В этом случае скорость образования ловушек пропорциональна току накачки и параметр  $A$  зададим в виде  $A = 1.25 \times 10^{-4}(1 + \eta)$ . При таком выборе  $A$  потери в зеркале, вносимые поглощением на ловушках, порядка  $10^{-4}$  и их можно не учитывать. Значения остальных параметров положим равными:  $I_S = 0.2$ ,  $A_m = 7.5 \times 10^4$ ,  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 1$ .

На основе численного решения уравнений (16)–(19) с указанными выше параметрами было получено, что в отсутствие нелинейной связи на зеркалах резонатора ( $A_m = 0$ ) ширина области

захвата, в соответствии с теорией, оказывается равной  $\Omega_L/2\pi = 75$  Гц. С учетом нелинейной связи при указанных выше значениях параметров ширина зоны захвата оказывается равной  $\Omega_L^{\max}/2\pi = 405$  Гц. Таким образом, в предложенной нами модели 2 дополнительная связь встречных волн зависит от разности фаз встречных волн  $\Phi$  и приводит к увеличению ширины области захвата. Вход в область захвата из режима биений при уменьшении фазовой невзаимности резонатора происходит при  $\Omega_L^{\min}/2\pi = 65$  Гц.

Зависимость ширины области захвата  $\Omega_L^{\max}$  от превышения накачки над порогом  $\eta$ , полученная на основе численного моделирования, показана на рис. 2.

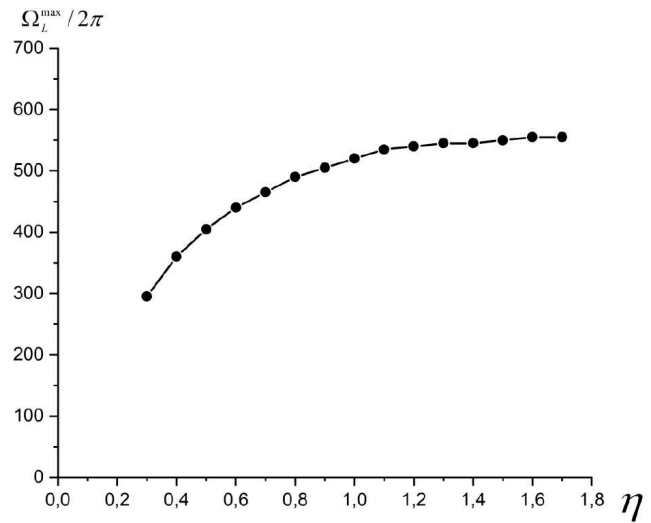


Рис. 2. Зависимость ширины области захвата  $\Omega_L^{\max}$  от превышения накачки над порогом  $\eta$

## 6. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальные исследования проводились на четырехзеркальном He–Ne кольцевом лазере с неплоским резонатором. Встречные волны генерировали на одной моде с круговой поляризацией. Лазер работал на изотопе Ne<sup>20</sup> при давлении газовой смеси 700 Па. Внутррезонаторные потери за проход резонатора равнялись  $p_c = 0.2\%$ , периметр кольцевого резонатора  $L = 160$  см. Угол падения лазерного излучения на зеркала составлял 44°. Измерение ширины области захвата проводились на установке измерения захвата, описанной в патенте [16].

Для вывода лазера из области захвата создавалась постоянная частотная подставка при наложении постоянного магнитного поля на активную среду. В исследуемом лазере наблюдался гистерезис зоны захвата. Ширина области захвата при переходе из режима захвата в режим биений  $\Omega_L^{\max}$  превышала ширину  $\Omega_L^{\min}$ , измеряемую при переходе из режима биений в режим захвата. На

рис. 3 показаны экспериментально измеренные зависимости  $\Omega_L^{\max}$  и  $\Omega_L^{\min}$  от превышения накачки над порогом  $\eta$ .

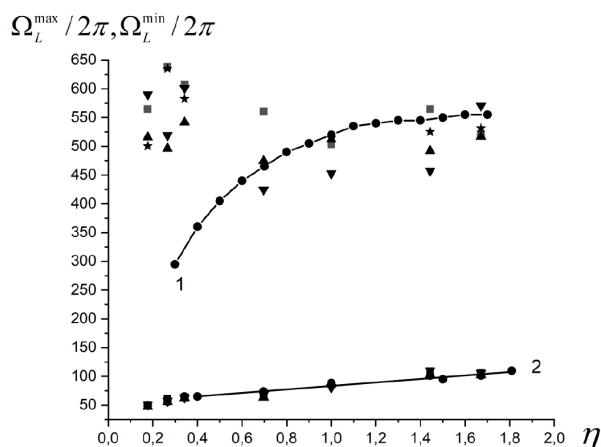


Рис. 3. Экспериментально измеренные и теоретические (кривые 1 и 2) зависимости ширин областей захвата  $\Omega_L^{\max}/2\pi$  и  $\Omega_L^{\min}/2\pi$  от превышения накачки над порогом  $\eta$

На рисунке приведены результаты измерений для четырех соседних продольных мод (при каждом  $\eta$  получены четыре значения  $\Omega_L^{\max}$  и четыре  $\Omega_L^{\min}$ ). Точки «квадрат» и «пирамида» — две

последовательные продольные моды одной поляризации (1 и 3 моды), «звездочка» и «перевернутый треугольник» — две последовательные продольные моды другой поляризации (2 и 4 моды). Для сравнения теории с экспериментом на рис. 3 приведены также результаты численного моделирования при указанных выше значениях параметров (кривые 1 и 2).

Как видно из рис. 3, предложенная в настоящей работе модель 2 дает результаты, находящиеся в хорошем качественном соответствии с экспериментом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе показано, что модель 1 [7] не позволяет описать гистерезис области захвата в He-Ne кольцевом лазере. Для объяснения гистерезиса предложена модель 2, учитывающая поглощение лазерного излучения в зеркалах резонатора. Получены выражения для коэффициентов связи встречных волн при дифракции на решетках поглощения. На основе численного моделирования в рамках модели 2 найдена зависимость ширин областей захвата  $\Omega_L^{\max}$  и  $\Omega_L^{\min}$  от превышения накачки над порогом. Проведены экспериментальные исследования гистерезиса области захвата в зеэмановском КЛ. Результаты, полученные в рамках модели 2, качественно согласуются с экспериментом.

- [1] Синельников А.О., Тихменев Н.В., Ушанов А.А., Медведев В.М. // *Фотоника*. **18**, № 6, 450 (2024).
- [2] Wax S.I., Chodorow M. // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. **8**, 352 (1972).
- [3] Aronowitz F., Collins R.J. // *J. of Appl. Phys.* **41**, 130 (1970).
- [4] Савельев И.И., Синельников А.О. Сборник материалов XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2015, 386–389.
- [5] Tikhmenev N., Bannikov D., Rogozhkina M., Knyazev I. // In 2022 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS) (IEEE, 2022, 1–3).
- [6] Зборовский В.А., Куликов В.Н., Переверзев А.В. и др. // *Квантовая Электроника*. **5**, 521 (1978).
- [7] Зборовский В.А., Соломатин В.А. // *Квантовая электроника*. **7**, 855 (1980).
- [8] Петрухин Е.К., Бессонов А.С. // *Квантовая электроника*. **54**, 652 (2024).

- [9] Lariontsev E.G. // *Appl. Opt.* **62**, 5135 (2023).
- [10] Брославец Ю.Ю. и др. Труды XXX Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2023.
- [11] Buse K. // *Appl. Phys. B*. **64**, 273 (1997).
- [12] Гуляев Ю.В., Проклов В.В., Шкердин Г.Н. // *УФН*. **124**, 61 (1978).
- [13] Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Савельев И.И. // *Квантовая электроника*. **45**, 171 (2015).
- [14] Хромых А.М., Якушев А.И. // *Квантовая электроника*. **4**, 27 (1977).
- [15] Савельев И.И., Хромых А.М., Якушев А.И. // *Квантовая электроника*. **6**, 1155 (1979).
- [16] Дронов И.В., Колбас Ю.Ю., Родионов М.И., Новиков В.С. Патент РФ 135 408 U1 от 10.12.2013. Бюллетень ФИПС № 54.

## Analysis of Hysteresis Behaviour of the Lock-in Range in a Zeeman Ring Laser

M.E. Grushin<sup>2</sup>, E.G. Lariontsev<sup>1, a</sup>, I.I. Savel'ev<sup>2</sup>, E.V. Soukhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics  
Moscow 119991, Russia

<sup>2</sup> POLYUS Research Institute of M.F. Stelmakh Joint Stock Company  
Moscow 117342, Russia



*E-mail:* <sup>a</sup> [e.lariontsev@yahoo.com](mailto:e.lariontsev@yahoo.com)

Wide hysteresis regions experimentally observed in the lock-in range in a Zeeman ring laser have not been described theoretically until recently. In the present article, a new model that accounts for the absorption of laser radiation in the resonator mirrors is proposed. Expressions are derived for the coupling coefficients of counter-propagating waves due to their diffraction on absorption gratings. Experimental studies of the hysteresis of the lock-in range in a Zeeman RL have been carried out. Numerical simulations based on the proposed model yield results that are in qualitative agreement with the experiment.

PACS: 42.25.-p, 42.55.-f, 42.62.-b.

*Keywords:* Zeeman laser gyro, lock-in of oncoming waves, hysteresis, beat mode.

*Received* 22 April 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. 6. Pp. .

#### Сведения об авторах

1. Грушин Михаил Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, нач. отдела;  
e-mail: [mihail.grushin1968@gmail.com](mailto:mihail.grushin1968@gmail.com).
2. Ларионцев Евгений Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотрудник;  
e-mail: [e.lariontsev@yahoo.com](mailto:e.lariontsev@yahoo.com).
3. Савельев Игорь Иванович — канд. тех. наук, нач. отдела; e-mail: [i.saveliev@gmail.com](mailto:i.saveliev@gmail.com).
4. Сухов Евгений Викторович — канд. тех. наук, нач. отдела; e-mail: [tov.suhov81@mail.ru](mailto:tov.suhov81@mail.ru).